Primeira Prova de Aritmética - MA14

2012/2 semestre

SOLUÇÕES

Questão 1 (valor: 2 pontos)

Mostre que na representação na base 10 de um número da forma $a^5 - a$, em que $a \in \mathbb{N}$, o algarismo das unidades é sempre igual a 0.

Uma solução:

Escrevamos

$$m = a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a-1)(a+1)(a^2+1).$$

Como m possui dois fatores formados por inteiros consecutivos, o número m é par. Agora só falta mostrar que m é múltiplo de 5.

Escrevamos $a = 5k + r$, com $r = 0, 1, 2, 3$ ou 4 e façamos uma análise de casos.

- Caso $a = 5k$. Como a é um divisor de m, temos que 5 divide m.
- Caso $a = 5k + 1$. Como $a - 1 = 5k$ é divisor de m, temos que 5 divide m.
- Caso $a = 5k + 2$. Como $a^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$, temos que 5 divide m.
- Caso $a = 5k + 3$. Como $a^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$, temos que 5 divide m.
- Caso $a = 5k + 4$. Como $a + 1 = 5k + 5$, temos que 5 divide m.

Observação: O fato que 5 divide $a^5 - a$ decorre imediatamente do Pequeno Teorema de Fermat, que não faz parte da matéria dada.

Questão 2 (valor: 2 pontos)

Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é irredutível a fração

$$\frac{21n+4}{14n+3}.$$

Uma solução:

Temos que

$$\begin{aligned}(21n+4, 14n+3) &= (21n+4-14n-3, 14n+3) = (7n+1, 14n+3) \\ &= (7n+1, 14n+3-14n-2) = (7n+1, 1) = 1.\end{aligned}$$

Questão 3 (valor: 2 pontos)

Denotando por (x, y) e por $[x, y]$, respectivamente, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números naturais x e y, resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} (x, y) = 6 \\ \\ [x, y] = 60 \end{cases}$$

Uma solução:

Sabemos que x e y são múltiplos de 6 e divisores de 60 e são tais que

$$xy = (x, y)[x, y] = 6 \cdot 60 = 360.$$

As possíveis soluções são: $x, y \in \{6,\ 12,\ 30, 60\}$.

A condição $xy = 360$ implica que as únicas soluções do sistema são $x = 6,\ y = 60$; $x = 12,\ y = 30$; $x = 30,\ y = 12$ e $x = 60,\ y = 6$.

Questão 4 (valor: 2 pontos)

Uma terna de números primos da forma $(a, a + 2, a + 4)$ é chamada de terna de *primos trigêmeos*.

a) Mostre que dados três números inteiros a, $a + 2$ e $a + 4$, um e apenas um deles é múltiplo de 3.

b) Mostre que a única terna de primos trigêmeos é $(3, 5, 7)$.

Uma solução:

a) Podemos escrever $a = 3k + r$, com $r = 0, 1$ ou 2.

- Se $r = 0$, temos $a = 3k$, $a + 2 = 3k + 2$ e $a + 4 = 3(k + 1) + 1$, logo somente a é múltiplo de 3.
- Se $r = 1$, temos $a = 3k + 1$, $a + 2 = 3(k + 1)$ e $a + 4 = 3(k + 1) + 2$, logo somente $a + 2$ é múltiplo de 3.
- Se $r = 2$, temos $a = 3k + 2$, $a + 2 = 3(k + 1) + 1$ e $a + 4 = 3(k + 2)$, logo somente $a + 4$ é múltiplo de 3.

b) Dados três primos a, $a + 2$ e $a + 4$, um deles é múltiplo de 3, sendo este número primo, ele deve ser 3. Portanto, a única possibilidade é $a = 3$, $a + 2 = 5$ e $a + 4 = 7$.

Questão 5 (valor: 2 pontos)

Um grupo de 30 pessoas entre homens, mulheres e crianças foram a um banquete e juntos gastaram 30 patacas. Cada homem pagou 2 patacas, cada mulher meia pataca e cada criança um décimo de pataca. Quantos homens, quantas mulheres e quantas crianças havia no grupo?

Uma solução:

Seja x o número de homens, y o número de mulheres e z o número de crianças. Logo, $x + y + z = 30$.

Distribuindo os gastos por grupos, devemos ter $2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{10}z = 30$.

Assim, temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ \\ 2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{10}z=30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ \\ 20x+5y+z=300 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=30 \\ \\ 19x+4y=270. \end{cases}$$

Sendo $(19,4)=1$, a equação $19x+4y=270$ possui solução. A solução mínima dessa equação é $x_0=2,\ y_0=58$. Portanto, a solução geral é dada por

$$\begin{cases} x=2+4t \\ \\ y=58-19t \end{cases}, \ t\in\mathbb{N}$$

Levando em consideração os intervalos de variação de x, y e z:

$$0<x,y,z<30,$$

a única solução possível é $x=14$, $y=1$ e $z=15$.