Questão 1.

Uma venda imobiliária envolve o pagamento de 12 prestações mensais iguais a R$ 10.000,00, a primeira no ato da venda, acrescidas de uma parcela final de R$ 100.000,00, 12 meses após a venda. Suponha que o valor do dinheiro seja de 2% ao mês.

(a) Se o comprador preferir efetuar o pagamento da parcela final junto com a última prestação, de quanto deverá ser o pagamento dessa parcela?

(b) Se o comprador preferir efetuar o pagamento à vista, qual deverá ser o valor desse pagamento único?

São dados alguns valores aproximados de $1,02^n$:

n	$1,02^n$
-12	0,788
-1	0,980
12	1,268

UMA SOLUÇÃO

(a) O valor de R$100.000,00 trazido um mês para trás é igual a

$$100.000,00 \times \frac{1}{1,02} \simeq 0,980 \times 100.000,00 = 98.000,00\,.$$

(b) Trazendo os valores para a data de compra, o comprador pagará

$$10.000,00 + \frac{10.000,00}{1,02} + \frac{10.000,00}{1,02^2} + \cdots + \frac{10.000,00}{1,02^{11}} + \frac{100.000,00}{1,02^{12}}\,.$$

Isso é igual a

$$\begin{aligned}
& 10.000,00 \times (1 + 1,02^{-1} + 1,02^{-2} + \ldots + 1,02^{-11}) + 100.000,00 \times 1,02^{-12} \\
= \quad & 10.000,00 \times \frac{1 - 1,02^{-12}}{1 - 1,02^{-1}} + 100.000,00 \times 1,02^{-12} \\
\simeq \quad & 10.000,00 \times \frac{1 - 0,788}{1 - 0,980} + 100.000,00 \times 0,788 \\
= \quad & 106.000,00 + 78.800,00 = 184.800,00\,.
\end{aligned}$$

Portanto, se o dinheiro vale 2% ao mês, pagar o esquema de prestações do enunciado equivale a pagar (aproximadamente) R$ 184.800,00 à vista.

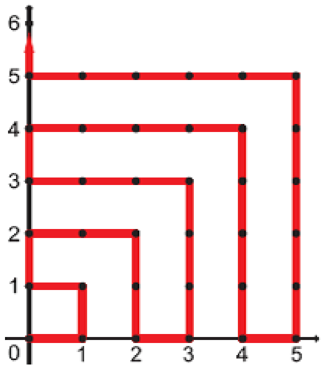
Questão 2.

A figura abaixo mostra uma linha poligonal que parte da origem e passa uma vez por cada ponto do plano cujas coordenadas são números inteiros e não negativos.

(a) O conjunto dos **pares de números inteiros e não negativos** tem a mesma cardinalidade que os números naturais? Por quê?

(b) Mostre que o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto (n, n) é $n^2 + n$, para qualquer inteiro não negativo n.

(c) Qual é o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto $(10, 13)$?



UMA SOLUÇÃO

(a) Chamemos de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ o conjunto dos inteiros não negativos. Então o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas inteiras e não negativas é o produto cartesiano $\mathbb{Z}^2_{\geq 0} = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Imaginemos que a linha é percorrida com velocidade 1 a partir do instante 1 em $(0, 0)$. A figura mostra que se no instante k a curva está num ponto de $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ então no instante $k + 1$ ela estará em um outro ponto de $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$. Por indução, estabelece-se uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ em que $f(k)$ é o ponto de $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ alcançado no instante k.

Como todos os pontos são atingidos, f é sobrejetiva. Como a linha não passa mais do que uma vez em cada ponto, f é injetiva. Assim, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$, mostrando que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ têm a mesma cardinalidade.

(b) Por inspeção a afirmação é verdadeira para $n = 0$, pois $n^2 + n = 0$ e realmente são 0 passos para chegar no ponto de partida $(n, n) = (0, 0)$. Agora suponhamos que a afirmação é válida para (n, n), isto é, que realmente são $n^2 + n$ passos até se chegar em (n, n) (hipótese de indução). Queremos mostrar que a afirmação é válida quando aplicada para $n + 1$, isto é, que são $(n + 1)^2 + (n + 1)$ passos até se chegar em $(n + 1, n + 1)$.

De (n, n) até $(n + 1, n + 1)$ são necessários: n passos (para encontrar um dos eixos; mais especificamente, para encontrar a abscissa, se n é par, e para encontrar a ordenada, se n é ímpar) mais 1 passo (para avançar nesse eixo) mais $n + 1$ passos (para voltar à diagonal, que é o conjunto dos pontos da forma (x, x)). Assim, são necessários $n + 1 + (n + 1) = 2n + 2$ passos para ir-se de (n, n) a $(n + 1, n + 1)$. Pela hipótese de indução, já foram $n^2 + n$ passos para se chegar em (n, n). Portanto são $(n^2 + n) + (2n + 2)$ passos até $(n + 1, n + 1)$. Mas

$$(n^2 + n) + (2n + 2) = (n^2 + 2n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2 + (n + 1),$$

como queríamos demonstrar.

Solução alternativa 1. Para se chegar ao ponto (n, n), é preciso percorrer todos os pontos de coordenadas inteiras do quadrado $[0, n] \times [0, n]$, exceto os situados em um dos lados. Existem $(n+1)^2$ pontos de coordenadas inteiras no quadrado, dos quais n não são visitados. Logo, o comprimento da poligonal é $(n+1)^2 - 1 - n = n^2 + n$.

Solução alternativa 2. A linha poligonal da origem até o ponto (n, n) é formada por n segmentos de comprimento 1, por segmentos de comprimento $2k$, para k variando de 1 a $n-1$ e um segmento de comprimento n. Logo, seu comprimento é

$$n + 2(1 + 2 + \ldots + n - 1) + n = n + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2 + n\,.$$

(c) Primeiro, investiga-se se $(10, 13)$ ocorre a 3 passos de distância (para mais ou para menos) de $(10, 10)$ ou de $(13, 13)$, no trajeto definido pela curva. Vemos que $(10, 13)$ está 3 unidades verticalmente acima de $(10, 10)$ e 3 unidades horizontalmente à esquerda de $(13, 13)$. Quando (n, n) é par, como é o caso de $n = 10$, a linha poligonal prossegue na vertical para baixo, portanto no sentido contrário ao que esperaríamos se fosse encontrar $(10, 13)$ em 3 passos. Quando (n, n) é ímpar, como é o caso de $n = 13$, a linha poligonal prossegue horizontalmente para a esquerda. Neste caso, encontrará $(10, 13)$ após 3 passos.

Portanto, como são $13^2 + 13 = 169 + 13 = 182$ passos até $(13, 13)$ e mais 3 passos até $(10, 13)$, então são 185 passos até $(10, 13)$.

Questão 3.

Mostre, por indução finita, que se n é um inteiro positivo então $7^n - 1$ é divisível por 6.

UMA SOLUÇÃO

Para $n = 1$, $7^n - 1 = 7 - 1 = 6$, que é divisível por 6. Então a afirmação vale para $n = 1$. Suponhamos que a afirmação seja válida para n, isto é, suponha que $7^n - 1$ seja múltiplo de 6. Vamos mostrar, com essa hipótese, que $7^{n+1} - 1$ também é múltiplo de 6.

Ora, $7^{n+1} - 1 = 7^{n+1} - 7^n + 7^n - 1 = 7^n(7 - 1) + (7^n - 1) = 6 \cdot 7^n + (7^n - 1)$. O primeiro termo é múltiplo de 6, porque tem um fator 6, e o segundo também é, pela hipótese de indução. Então a soma é múltiplo de 6 e temos demonstrado o que queríamos.

Questão 4.

Considere a recorrência $x_{n+2} - 4x_n = 9n$, com as condições iniciais $x_0 = x_1 = 0$.

(a) Encontre a solução geral da recorrência homogênea $x_{n+2} - 4x_n = 0$.

(b) Determine os valores de A e B para os quais $x_n = A + nB$ é uma solução da recorrência $x_{n+2} - 4x_n = 9n$.

(c) Encontre a solução da recorrência original.

UMA SOLUÇÃO

(a) Se $x_{n+2} - 4x_n = 0$ então $x_{n+2} = 4x_n$. Então $x_{2m} = 4^m x_0$, para todo $m \geq 0$, e $x_{2m+1} = 4^m x_1$, para todo $n \geq 0$. Escrevendo de outra maneira, a solução é

$$x_0, x_1, 4x_0, 4x_1, 4^2x_0, 4^2x_1, 4^3x_0, 4^3x_1, \ldots$$

Também pode-se dizer que $x_n = 2^n x_0$, para $n \geq 0$ par, e $x_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n x_1$, para $n \geq 0$ ímpar.

(b) Se $x_n = A + nB$ então $x_{n+2} = A + (n+2)B$. Se, além do mais, (x_n) é solução de $x_{n+2} - 4x_n = 9n$, então

$$9n = x_{n+2} - 4x_n = A + (n+2)B - 4A - 4Bn = -3A + 2B - 3nB\,.$$

Para que $-3A + 2B - 3nB$ seja igual a $9n$ basta que $-3A + 2B = 0$ (primeira equação) e que $-3B = 9$ (segunda equação). Da segunda equação sai imediatamente que $B = -3$, e, colocando esse valor na primeira, que $A = -2$. Então $x_n = -2 - 3n$ é uma solução da equação não homogênea.

(c) Agora vamos combinar a solução geral da homogênea com a solução particular da não homogênea para obter a solução de $x_{n+2} - 4x_n = 9n$ com $x_0 = x_1 = 0$. Seja $\widetilde{x}_n = -2 - 3n$ a solução calculada em (b), que satisfaz $\widetilde{x}_{n+2} - 4\widetilde{x}_n = 9n$. Essa solução não satisfaz as condições iniciais pedidas, pois $\widetilde{x}_0 = -2$ e $\widetilde{x}_1 = -5$. Então seja $(\widehat{x}_n)$ solução da homogênea satisfazendo $\widehat{x}_0 = +2$ e $\widehat{x}_1 = +5$. Vamos verificar que (x_n) definida por $x_n = \widetilde{x}_n + \widehat{x}_n$ satisfaz ao mesmo tempo as condições iniciais e a relação de recorrência não homogênea.

Ora, $x_0 = \widetilde{x}_0 + \widehat{x}_0 = -2 + 2 = 0$ e $x_1 = \widetilde{x}_1 + \widehat{x}_1 = -5 + 5 = 0$. Além disso,

$$x_{n+2} - 4x_n = (\widetilde{x}_{n+2} - 4\widetilde{x}_n) + (\widehat{x}_{n+2} - 4\widehat{x}_n) = 9n + 0 = 9n\,.$$

Assim, a solução do problema proposto é a sequência dada por $x_n = 2 \cdot 2^n - 3n - 2 = 2^{n+1} - 3n - 2$, para n par, $x_n = \frac{5}{2} \cdot 2^n - 3n - 2$, para n ímpar.

OUTRA SOLUÇÃO

Esta é a solução que muitos esperavam, que usa equação característica.

(a) A equação característica é $r^2 - 4 = 0$, cujas raízes são -2 e $+2$. Logo a solução geral da recorrência é $x_n = C \cdot 2^n + D \cdot (-2)^n$.

Obs. Note que, embora esta resposta seja diferente da resposta (a) da solução anterior, ambas estão corretas, mas estão expressas em termo de outras constantes.

(b) Idêntica à resposta (b) da solução anterior.

(c) Somando as duas, obtemos a solução geral

$$x_n = C \cdot 2^n + D \cdot (-2)^n - 2 - 3n\,.$$

Usando as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} C + D - 2 &= 0 \\ 2C - 2D - 2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $C = \frac{9}{4}$ e $D = -\frac{1}{4}$. Logo, a solução é

$$x_n = \frac{9}{4} \cdot 2^n - \frac{1}{4} \cdot (-2)^n - 2 - 3n\,.$$

Não é difícil verificar que as duas soluções apresentadas são a mesma, mas escritas de formas diferentes.

Questão 5.

Para todo número natural $n \geq 2$, considere o número N formado por $n-1$ algarismos iguais a 1, n algarismos iguais a 2 e um algarismo igual a 5, nesta ordem.

(a) Mostre que o número N pode ser escrito na forma

$$\frac{A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^{n} + C}{9},$$

onde A, B e C são constantes independentes de n. Indique os valores de A, B e C.

(b) Mostre que N é um quadrado perfeito.

(c) Quantos algarismos tem $\sqrt{N}$? Diga quais são esses algarismos.

UMA SOLUÇÃO

(a) Usando a expansão na base decimal, podemos escrever N como

$$N = 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^{n+1} + 2 \cdot 10^{n} + 2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + 2 \cdot 10^{1} + 5\,.$$

Então

$$N = 10^{n+1}(1 + 10 + \ldots + 10^{n-2}) + 2 \cdot 10 \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) + 5\,.$$

Somando as duas PGs entre parênteses,

$$\begin{aligned} N &= 10^{n+1} \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} + 20 \cdot \frac{10^{n} - 1}{10 - 1} + 5 \\ &= \frac{10^{2n} - 10^{n+1} + 20 \cdot 10^{n} - 20 + 45}{9} \\ &= \frac{10^{2n} + 10 \cdot 10^{n} + 25}{9}\,. \end{aligned}$$

Portanto $A = 1$, $B = 10$ e $C = 25$.

Obs: Outra forma de fazer é multiplicar N por 9 usando o algoritmo de multiplicação e ver que fica o número $10\ldots010\ldots025$, onde o bloco de zeros mais à esquerda tem $n-2$ elementos e o bloco de zero mais à direita tem $n-1$ elementos.

(b) Queremos saber se $N = p^2$, com $p \in \mathbb{N}$. Como $10^{2n} + 10 \cdot 10^{n} + 25 = (10^{n} + 5)^2$, então

$$N = \left(\frac{10^{n} + 5}{3}\right)^2.$$

Resta saber se $10^{n} + 5$ é divisível por 3. Mas isso é verdade, porque como $10^{n} + 5 = 10\ldots05$, com um bloco de $n-1$ zeros, a soma dos algarismos desse número é igual a 6.

(c) A raiz de N é o número $p = \frac{10^n+5}{3}$. Como $10^n + 5 = 10\ldots05$, com um bloco de $n-1$ zeros, então tem $n+1$ algarismos. Ao dividir por 3, passa a ter n algarismos. Então p tem n algarismos.

Para saber qual é o número, podemos escrever

$$p = \frac{10^n - 1}{3} + \frac{6}{3}\,.$$

O termo da esquerda é $33\ldots3$ (n vezes) e o da direita é igual a 2. Então $p = 3\ldots35$, onde 3 aparece repetido $n-1$ vezes.