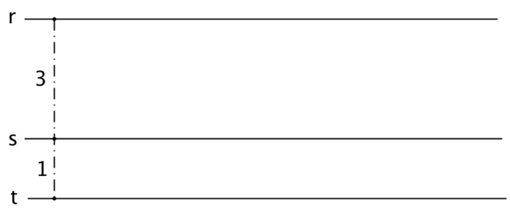
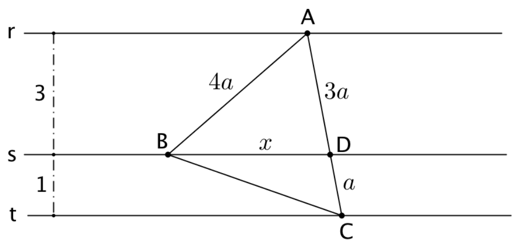
Questão 1. *(pontuação: 2)*

As retas r, s e t são paralelas, como mostra a figura abaixo. A distância entre r e s é igual a 3 e a distância entre s e t é igual a 1. O triângulo equilátero ABC possui os vértices A, B e C sobre as retas r, s e t, respectivamente. Determine o lado do triângulo ABC.



Uma solução:

Seja $AB = BC = CA = 4a$. Sendo D o ponto de interseção da reta s com o lado AC temos, pelo teorema de Tales, $AD = 3a$ e $DC = a$.



Vamos calcular a área de ABC de duas formas.

a) A área de um triângulo equilátero de lado $4a$ é $S = \dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}a^2$.

b) A área de ABC é a soma das áreas dos triângulos BDA e BDC que possuem base comum $BD = x$ e alturas 3 e 1, respectivamente. Então, $S = \dfrac{x.3}{2} + \dfrac{x.1}{2} = 2x$. Assim, $4\sqrt{3}a^2 = 2x$.

Que relação há entre a e x?

A relação de Stewart no triângulo ABC com a ceviana AD fornece

$$16.a^2.3a + 16a^2.a = x^2.4a + a.3a.4a$$

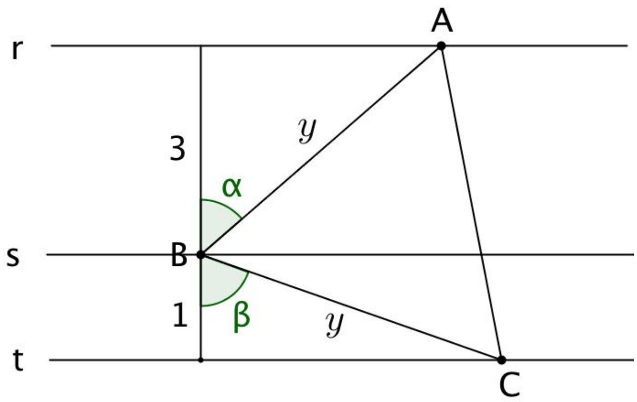
ou seja, $x = a\sqrt{13}$.

Como $4\sqrt{3}a^2 = 2x$ então $4\sqrt{3}a^2 = 2a\sqrt{13}$, ou seja, $a = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Então o lado do triângulo é $AB = 4a = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

Outra solução

Seja y o lado do triângulo e sejam α e β os ângulos que BA e BC fazem com uma reta perpendicular às paralelas, respectivamente.



Como $\cos\alpha = \dfrac{3}{y}$ então $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{9}{y^2}} = \sqrt{\dfrac{y^2-9}{y^2}}$ e como $\cos\beta = \dfrac{1}{y}$ então $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{y^2}} = \sqrt{\dfrac{y^2-1}{y^2}}$.

Como $\angle ABC = 60^{\circ}$ então $\alpha + \beta = 120^{\circ}$. Assim, $\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$.

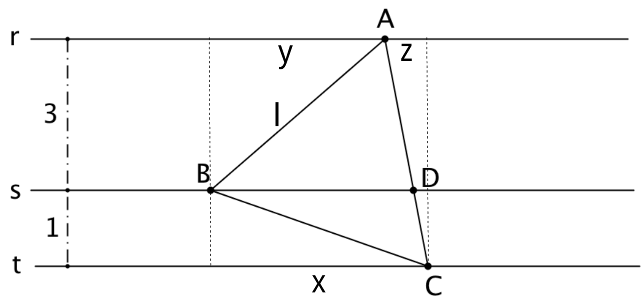
Daí, fazendo as substituições, temos

$$\frac{3}{y}.\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{y^2-9}}{y}.\frac{\sqrt{y^2-1}}{y} = -\frac{1}{2}$$

Após as necessárias manipulações algébricas encontramos $y = \sqrt{\dfrac{52}{3}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

Mais uma solução

Primeiro traçamos duas perpendiculares às retas paralelas, passando por B e C, como na figura:



Assim $x = y + z$ e, aplicando três vezes o teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{cases} x = y + z \\ l^2 = x^2 + 1 \\ l^2 = y^2 + 9 \\ l^2 = z^2 + 16 \end{cases}$$

Apesar de não linear, este sistema pode ser facilmente resolvido. De fato,

$$\sqrt{l^2 - 1} = \sqrt{l^2 - 9} + \sqrt{l^2 - 16}$$

Elevando ao quadrado, isolando o termo que aparecerá ainda com a raiz quadrada e elevando novamente ao quadrado, chegamos à solução $l = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

Obs: Há várias outras soluções.

Questão 2. *(pontuação: 2)*

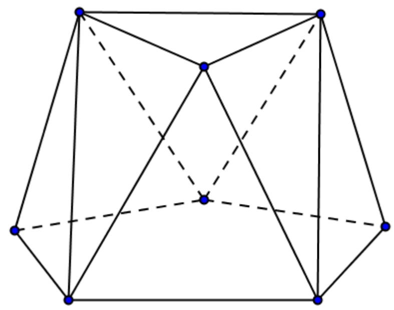
Um poliedro convexo P possui 8 vértices, apenas uma face pentagonal e todas as outras faces triangulares.

(1,0) a) Determine o número de faces triangulares de P.

(1,0) b) Determine o número de diagonais de P.

Uma solução:

a) Como P possui 8 vértices e uma face pentagonal (5 vértices), então há uma face triangular oposta à essa face pentagonal. Fazendo um desenho e unindo os vértices dessas duas faces formando triângulos, obtemos o poliedro abaixo.



Como mostra o desenho, há 9 faces triangulares.

Outra forma de chegar à mesma conclusão:

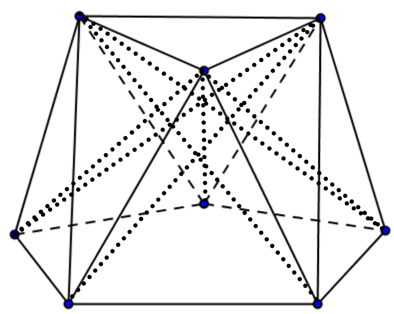
No poliedro P temos uma face pentagonal e x faces triangulares: $F_3 = x$ e $F_5 = 1$. Como $2A = 3F_3 + 5F_5$, temos $2A = 3x + 5$, ou seja,

$$A = \frac{3x+5}{2}$$

A relação $A+2 = F+V$ fornece $\frac{3x+5}{2} + 2 = x + 1 + 8$, pois só há faces triangulares e uma pentagonal. A solução dessa equação é $x = 9$. O poliedro P possui 9 faces triangulares.

b) A face pentagonal possui 5 diagonais. Essas diagonais não são diagonais de P. O poliedro P possui 8 vértices, 10 faces e 16 arestas. O número de diagonais de P é

$$d = C_8^2 - 16 - 5 = 7$$



Questão 3. *(pontuação: 2)*

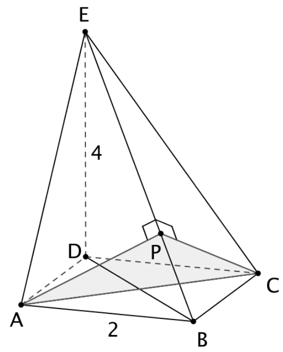
O quadrado $ABCD$ está contido no plano Π e DE é um segmento perpendicular a Π. Trace os segmentos EA, EB e EC formando a pirâmide $EABCD$. Considere $AB = 2$ e $DE = 4$.

(0,5) a) Calcule o cosseno do ângulo que a reta BE faz com Π.

(0,5) b) Calcule o cosseno do ângulo que o plano EAB faz com Π.

(1,0) c) Calcule o cosseno do ângulo entre os semiplanos EBA e EBC.

Uma solução:



a) O ângulo que BE faz com o plano da base da pirâmide é o ângulo $D\hat{B}E = \alpha$. Como $AB = 2$ então $BD = 2\sqrt{2}$ e, no triângulo EDB, retângulo em B temos, pelo teorema de Pitágoras, $EB = 2\sqrt{6}$. Assim,

$$\cos\alpha = \frac{BD}{BE} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) ED é perpendicular a DA e DA é perpendicular a AB. Então, pelo teorema das três perpendiculares, EA é perpendicular a AB. Assim, o ângulo que o plano EAB faz com o plano da base da pirâmide é o ângulo $D\hat{A}E = \beta$. No triângulo retângulo DAE calculamos $AE = 2\sqrt{5}$ e, em seguida,

$$\cos\beta = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

c) O plano que contém AC e é perpendicular a BE corta BE em P. O ângulo entre os semiplanos EBA e EBC é o ângulo $A\hat{P}C = \theta$.

Sejam $PA = PC = x$ (BDE é o plano mediador de AC). No triângulo EAB o segmento PA é a altura relativa à hipotenusa.

Como, $AE.AB = EB.PA$, temos $2\sqrt{5}.2 = 2\sqrt{6}.x$, ou seja, $x = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Assim, $x^2 = \dfrac{10}{3}$.

No triângulo APC, usando a lei dos cossenos relativa ao vértice P, temos:

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2.PA.PC.\cos\theta$$

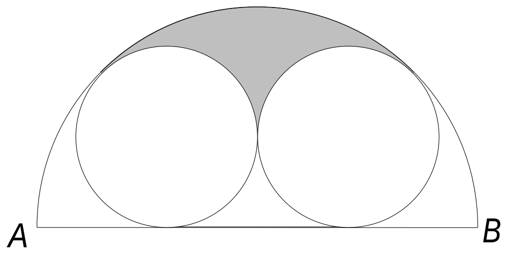
Então,

$$(2\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2.x.x.\cos\theta \Rightarrow 8 = 2x^2 - 2x^2\cos\theta \Rightarrow 4 = x^2 - x^2\cos\theta$$

Logo $4 = \dfrac{10}{3} - \dfrac{10}{3}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{5}$.

Questão 4. *(pontuação: 2)*

A figura abaixo mostra duas circunferências de raio 1, tangentes entre si e inscritas em uma semicircunferência de diâmetro AB.

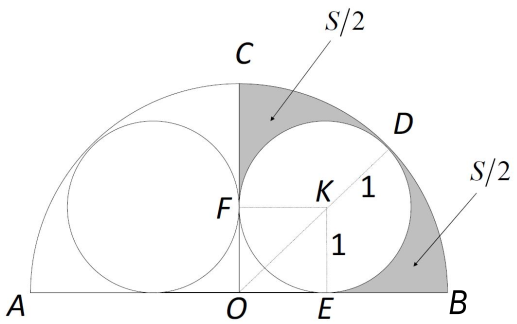


(0,5) a) Calcule o comprimento do segmento AB.

(1,5) b) Calcule a área da região sombreada.

Uma solução:

Observando a figura a seguir, sejam: O, o centro da semicircunferência, OC o raio da semicircunferência perpendicular a AB, K, o centro da circunferência da direita, KE e KF, raios dessa circunferência perpendiculares a OB e OC respectivamente, e OD, o raio da semicircunferência que passa por K.



a) $OEKF$ é um quadrado de lado 1. Como D é o ponto de tangência entre a circunferência da direita e a semicircunferência, então $OD = OK + KD = \sqrt{2} + 1$.

Assim, $AB = 2(\sqrt{2} + 1)$.

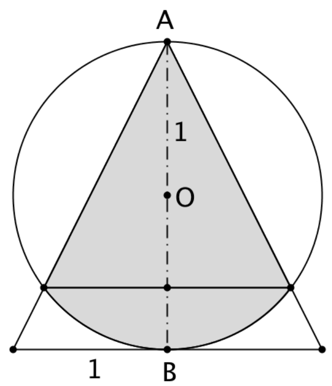
b) Seja S a área da região sombreada. Para calcular a área dessa região, transferimos a sua metade da esquerda da para a região EBD como mostra a figura acima. Assim, S é a área sombreada na figura acima, que é igual à área do quadrante circular OBC subtraída da área do quadrado $OEKF$ e da área do setor $KEDFK$.

$$S = \frac{\pi(\sqrt{2}+1)^2}{4} - 1 - \frac{3\pi}{4}$$

Simplificando, obtemos $S = \dfrac{\sqrt{2}\pi - 2}{2}$.

Questão 5. *(pontuação: 2)*

Considere uma esfera de centro O e raio 1, e seja AB um diâmetro dessa esfera. Um cone de revolução possui vértice A e base de centro B e raio 1. A figura abaixo mostra a seção nesses sólidos por um plano que contém a reta AB.



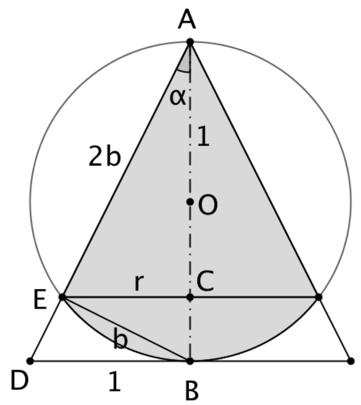
(1,0) a) Mostre que a circunferência que é a interseção da superfície da esfera com a superfície lateral do cone tem raio igual a $\dfrac{4}{5}$.

(1,0) b) Calcule o volume da parte comum entre a esfera e o cone (relacionado com a área sombreada da figura).

Obs: Você pode usar o resultado do item a) mesmo que não o tenha demonstrado.

Uma solução:

Como na figura abaixo, seja BD o raio da base do cone e CE o raio da circunferência Γ, intersecção da superfície da esfera com a superfície lateral do cone.



Se $\angle DAB = \alpha$ então $\tan\alpha = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{1}{2}$.

O triângulo AEB é retângulo em E. Assim, fazendo $EB = b$, temos $\tan\alpha = \dfrac{EB}{EA}$ e, portanto, $EA = 2b$.

O teorema de Pitágoras no triângulo AEB fornece $b^2 = \dfrac{4}{5}$.

O segmento $CE = r$ é altura relativa à hipotenusa do triângulo AEB. Assim, $EB.EA = AB.CE$, ou seja, $b.2b = 2.r$ e então $r = b^2 = \dfrac{4}{5}$.

b) A parte comum entre a esfera e o cone dado é formada por um cone de altura CA cuja base é a circunferência Γ, reunido com o segmento esférico com base na circunferência Γ e contendo o ponto B.

Como $OE = 1$ e $CE = \frac{4}{5}$, então $CO = \frac{3}{5}$.

Assim a altura do cone é $H = CA = \frac{3}{5} + 1 = \dfrac{8}{5}$.

A altura do segmento esférico é $h = 1 - \frac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.

O volume da parte comum entre a esfera e o cone dado é

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.H + \frac{\pi.h^2}{3}(3R - h)$$

$$V = \frac{\pi}{3}.(\frac{4}{5})^2.\frac{8}{5} + \frac{\pi}{3}.(\frac{2}{5})^2.(3.1 - \frac{2}{5}) = \frac{\pi}{3}.\frac{128}{125} + \frac{\pi}{3}.\frac{52}{125} = \frac{\pi}{3}.\frac{180}{125}$$

Logo

$$V = \frac{12\pi}{25}$$

.