

PROMAT - Exame de Qualificação 2012-1

1.

(10pts) Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo t (em minutos), seja $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton, $D(t)$ é uma função decrescente de t , com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t) - D(t + h)}{D(t)}$$

no intervalo de tempo $[t, t + h]$ depende apenas da duração h desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta:

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30° . A água, que fervia a 100° numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60° . Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

2.

- (a) **(5pts)** Dado um número $a > 0$, quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a ?
- (b) **(10pts)** Justifique matematicamente por que não se pode responder o item (a) se trocarmos “mínimo” por “máximo”.

3.

Uma moeda honesta é lançada sucessivas vezes.

- (a) **(10pts)** Se a moeda for lançada 4 vezes, qual é a probabilidade de que o número observado de caras seja ímpar? E se a moeda for lançada 5 vezes?
- (b) **(5pts)** Observando o resultado do item (a), formule uma conjectura sobre a probabilidade de se observar um número ímpar de caras em n lançamentos da moeda.
- (c) **(10pts)** Demonstre, utilizando indução finita, a conjectura do item (b).

4.

$ABCD$ é um quadrado, M é o ponto médio do lado BC e N é o ponto médio do lado CD . Os segmentos AM e BN cortam-se em P .

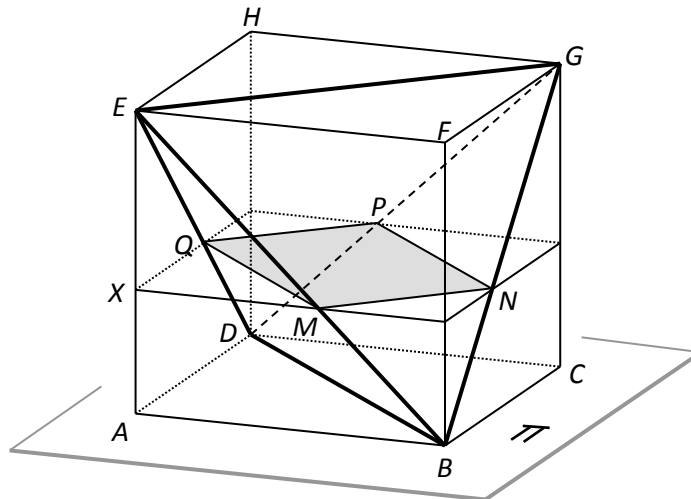
- (a) **(5pts)** Mostre que $\frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}$.
- (b) **(5pts)** Calcule a razão $\frac{PA}{PM}$.
- (c) **(5pts)** Se $AB = 1$ calcule a área do quadrilátero $PMCN$.

Obs: Para mostrar os itens (b) e (c) você pode usar o resultado do item (a) mesmo que não o tenha demonstrado.

5.

Na figura abaixo, $ABCDEFGH$ é um cubo de aresta 1. AE, BF, CG e DH são arestas e a face $ABCD$ está contida em um plano horizontal Π . Seja T o tetraedro $BDEG$. Seja X um ponto da aresta AE (diferente de A e de E) e Π' o plano paralelo a Π que passa por X . A intersecção de Π' com T é o quadrilátero $MNPQ$, como mostrado na figura.

- (a) **(5pts)** Mostre que $MNPQ$ é um retângulo.
- (b) **(5pts)** Mostre que o perímetro de $MNPQ$ é igual a $2\sqrt{2}$, independentemente do ponto X .



(Atenção: como a folha de questões não será olhada na correção, se usar novos elementos na figura é conveniente explicitá-los no caderno de respostas.)

6.

Um truque de adivinhação de números.

- (a) **(5pts)** Descreva e justifique métodos práticos para obter os restos da divisão por 9, 10 e 11, respectivamente, de um número natural escrito no sistema decimal.
- (b) **(5pts)** Ache as soluções mínimas de cada uma das seguintes congruências:
- i. $110y \equiv 1 \pmod{9}$
 - ii. $99y \equiv 1 \pmod{10}$
 - iii. $90y \equiv 1 \pmod{11}$
- (c) **(10pts)** Um mágico pede a sua audiência para escolher um número natural M de pelo menos dois algarismos e menor do que 1000, e de lhe revelar apenas os restos r_9 , r_{10} e r_{11} da divisão de M por 9, 10 e 11, respectivamente (tarefa fácil, pelo item (a)). Sem nenhuma outra informação ele consegue descobrir M . Explique como ele consegue fazer isto.
- (d) **(5pts)** Supondo que a plateia tenha dado as seguintes informações ao mágico: $r_9 = 7$, $r_{10} = 8$ e $r_{11} = 9$, qual foi o valor de M que o mágico achou?