PROFMAT **EXAME DE ACESSO PROFMAT - 2014** SBM

SOLUÇÕES

Questão 1. *(Teorema de Pitágoras)*

Uma pirâmide de base quadrada tem todas as suas arestas congruentes, de medida 8. A altura da pirâmide (em relação à base quadrada) mede:

(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{2}/3$ (E) $4\sqrt{2}/3$

Resposta: A

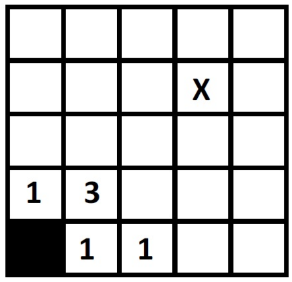
Uma solução:

A altura h é um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é uma aresta a e o outro cateto é a metade da diagonal d do quadrado da base. Temos $d = a\sqrt{2}$ e assim $h^2 = a^2 - (d/2)^2 \Rightarrow h^2 = a^2/2 \Rightarrow h = a/\sqrt{2} \Rightarrow h = a\sqrt{2}/2$. Pondo $a = 8$ temos $h = 4\sqrt{2}$.

Questão 2. *(Métodos de contagem)*

Num quadriculado como na figura abaixo, a casa inferior na esquerda é pintada de preto indicando a casa inicial. Os movimentos permitidos são apenas três:

- Para a casa da direita mais próxima
- Para a casa acima mais próxima
- Para a casa na diagonal superior direita mais próxima



Cada casa é marcada com o número de maneiras possíveis de atingi-la partindo da casa inicial. Por exemplo, o 3 indica os três caminhos possíveis a partir da casa inicial: para a direita e para cima, para cima e para a direita ou diretamente para diagonal superior direita. A casa indicada com X deverá receber qual número?

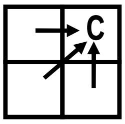
(A) 51 (B) 43 (C) 13

(D) 27 (E) 63

Resposta: E

Uma solução:

Na linha mais abaixo do quadriculado todas as casas devem ser preenchidas com o número 1. O mesmo vale para a coluna mais à esquerda. Para atingir uma determinada casa (marcada com C), é preciso fazer um dos movimentos indicados na figura abaixo à esquerda. Logo, o número que será colocado na casa C é a soma dos números que constam das outras três casas que aparecem na figura. Portanto, o quadriculado completado até a marca X fica como segue e a resposta é 63.



1	7	25	63	
1	5	13	25	
1	3	5	7	
1	1	1	1	

Questão 3. *(Proporcionalidade e porcentagem / Equações do primeiro grau)*

Em um show de música, os organizadores notaram que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes no início do evento era de $\frac{7}{10}$. Durante o show nenhum homem e nenhuma mulher saiu ou entrou. Ao final do show, os organizadores observaram um aumento de mais 255 homens e que 150 mulheres deixaram o local, de modo que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes depois disto passou a ser $\frac{9}{10}$. Qual o número total de pessoas que estiveram presentes em algum momento no show?

(A) 1365 (B) 1950 (C) 3315

(D) 3570 (E) 3954

Resposta: D

Uma solução:

Denotemos por h_0 o número de homens que estavam presentes no início do evento e m_0 o número de mulheres que estavam presentes no início. Assim, temos que

$$\frac{h_0}{m_0} = \frac{7}{10} \Longrightarrow m_0 = \frac{10}{7}h_0. \tag{1}$$

Porém, no final a proporção era de

$$\frac{h_0 + 255}{m_0 - 150} = \frac{9}{10} \Longrightarrow h_0 = \frac{9}{10}(m_0 - 150) - 255. \tag{2}$$

Portanto, substituindo (1) em (2), temos

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{9}{7}h_0 - 135 - 255 \\ &= \frac{9}{7}h_0 - 390, \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{2}{7}h_0 = 390 \Longrightarrow h_0 = 1365.$$

Assim, obtemos que

$$m_0 = \frac{10}{7}h_0 = 1950.$$

Portanto o número total de pessoas que estiveram no show foi $(h_0 + 255) + m_0 = 3570$.

Questão 4. *(Noções de Estatística)*

Numa empresa, os salários não são todos iguais e um novo funcionário foi contratado com um salário igual à média dos salários pagos pela empresa antes de sua contratação. Comparando a média dos salários e o desvio padrão calculados antes da contratação do novo funcionário com a média dos salários e o desvio padrão calculados levando em conta o novo funcionário, podemos afirmar que:

(A) a nova média é menor que a antiga e o desvio padrão permanece igual.

(B) a nova média e o novo desvio padrão são ambos iguais aos antigos.

(C) a nova média e o novo desvio padrão são ambos maiores que os antigos.

(D) a nova média é igual a antiga e o novo desvio padrão é menor que o antigo.

(E) a nova média e o novo desvio padrão são ambos menores que os antigos.

Resposta: D

Uma solução:

É possível resolver a questão sem fazer contas se os conceitos estão claros. A média não se altera se agregamos um elemento igual a própria média e o desvio padrão deve diminuir (já que é uma medida da dispersão em relação à média).

Fazendo os cálculos, podemos solucionar o problema da forma que segue. Suponha que a empresa tenha n empregados com salários $s_1, s_2, ...s_n$. Então a média dos salários é

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i$$

e o desvio padrão é

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(s_i - m)^2}{n}}$$

O novo empregado terá um salário de m. Portanto a nova média e o novo desvio padrão serão:

$$m_{nova} = \frac{1}{n+1}\big((\sum_{i=1}^{n} s_i) + m\big) = \frac{mn+m}{n+1} = m$$

$$d_{novo} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(s_i - m)^2 + (m-m)^2}{n+1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(s_i - m)^2}{n+1}} = d\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < d,$$

pois o desvio padrão é positivo. Portanto, a média permanece igual e o desvio padrão diminui.

Questão 5. *(Probabilidade)*

Numa caixa estão três bolas numeradas de 1 a 3. Um dado, com seis faces numeradas de 1 a 6, é lançado e uma das bolas é escolhida ao acaso. Assinale a alternativa que dá a probabilidade da bola e do dado exibirem o mesmo número.

(A) 3/17 (B) 5/18 (C) 1/6

(D) 1/3 (E) 1/9

Resposta: C

Uma solução:

A tabela abaixo mostra todas as tiragens possíveis. Cada uma delas ocorre com probabilidade de 1/18. Os eventos em que a bola e o dado exibem o mesmo número são destacados em negrito. São 3 eventos em 18. Logo, a resposta correta é $3/18 = 1/6$.

bolas \ dado	1	2	3	4	5	6
1	**1/18**	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18
2	1/18	**1/18**	1/18	1/18	1/18	1/18
3	1/18	1/18	**1/18**	1/18	1/18	1/18

Questão 6. *(Razões trigonométricas/Teorema de Pitágoras)*

Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm. A soma das tangentes dos ângulos agudos é aproximadamente:

(A)1
(B) 1,3
(C) 2
(D) 2,5
(E) 2,8

Resposta: E

Uma solução:
Os catetos são 5 e 12 (pelo Teorema de Pitágoras). As tangentes são $5/12$ e $12/5$ e sua soma é $169/60 \approx 2{,}8$.

Questão 7. *(Proporcionalidade)*

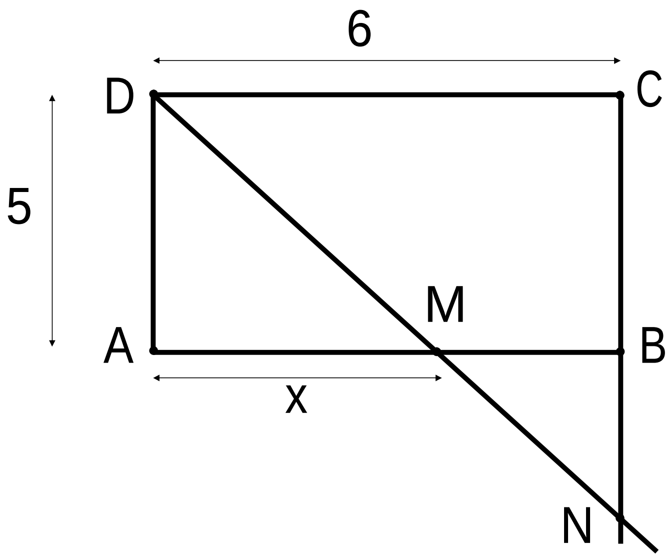
Considere um retângulo $ABCD$ com lados AB de medida 6 cm, BC de medida 5 cm e seja M um ponto qualquer do segmento AB, distinto de A e de B. A reta que passa por M e D intercepta a reta que passa por C e B no ponto N. Chame de x o comprimento (em centímetros) do segmento AM. Assinale a expressão que dá o comprimento (em centímetros) de BN em função de x.

(A) $BN = \frac{30-5x}{x}$ (B) $BN = \frac{30-6x}{x}$ (C) $BN = \frac{6-x}{x}$
(D) $BN = \frac{6-x}{5}$ (E) $BN = \frac{6x}{30x-5}$

Resposta: A

Uma solução:

A figura abaixo ilustra a situação descrita.



Da semelhança entre os triângulos BNM e CND, conclui-se que $\frac{BN}{BM} = \frac{CN}{CD}$. Substituindo $CD = 6$, $BM = 6 - x$ e $CN = 5 + BN$, obtemos

$$\frac{BN}{6-x} = \frac{5+BN}{6},$$

ou seja,

$$BN = \frac{30-5x}{x}.$$

Questão 8. *(Equações do primeiro grau)*

Em um processo seletivo contendo 35 questões objetivas, para cada resposta correta ganha-se 3 pontos e, para cada resposta errada, perde-se 2 pontos. Se um candidato respondeu todas as questões e obteve um total de 50 pontos, quantas questões ele acertou?

(A) 11
(B) 15
(C) 20
(D) 24
(E) 27

Resposta: D

Uma solução:

Denotando por x o número de questões respondidas corretamente e por y o número de questões respondidas erradas, obtemos

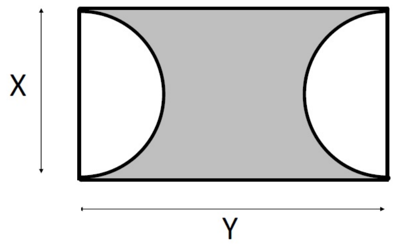
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 3x - 2y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 35 - x \\ 3x - 2(35 - x) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 35 - 24 = 11 \\ x = 24 \end{cases}$$

Portanto, o candidato acertou 24 questões e errou 11 questões.

Questão 9. *(Áreas de figuras planas / Equações do segundo grau)*

De um retângulo de lados medindo X e Y, $X \leq Y$, são retirados dois semicírculos de raio $X/2$ formando a figura ilustrada abaixo, em cinza. Entre todas as figuras assim construídas, com perímetro medindo 10 m, determine aquela de área máxima e assinale, entre as alternativas abaixo, a que melhor aproxima esta área máxima.

(A) $12{,}5\,\text{m}^2$
(B) $2{,}5\,\pi\,\text{m}^2$
(C) $6{,}8\,\text{m}^2$
(D) $\frac{10}{3\pi}\,\text{m}^2$
(E) $2{,}65\,\text{m}^2$



Resposta: E

Uma solução:

A área da figura é $A = X.Y - \pi.\frac{X^2}{4}$ e, como o perímetro é 10, sabemos que $2Y + \pi X = 10$. A área como função de X é dada por

$$A(X) = \frac{10 - \pi X}{2}.X - \pi\frac{X^2}{4} = -\frac{3\pi}{4}X^2 + 5X$$

O gráfico desta função é uma parábola com a concavidade para baixo e raízes 0 e $20/3\pi$. Portanto, o ponto de máximo desta parábola ocorre para $X = 10/3\pi$ e a área máxima é $A(\frac{10}{3\pi}) = \frac{25}{3\pi}\,\text{m}^2$. Tomando uma aproximação de π como 3,14, temos uma aproximação para a área máxima: $2,65\text{m}^2$.

Questão 10. *(Métodos de contagem)*

Um cubo tem as faces numeradas de 1 a 6 (faces opostas não somam 7 necessariamente). São feitos 2 lançamentos. No primeiro lançamento, a soma dos números gravados nas 4 faces laterais é 15. Num segundo lançamento, a soma dos números gravados nas 4 faces laterais é 12. Qual o número que está na face oposta à face do 6?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

Resposta: C

Uma solução:

O cubo tem 3 pares de faces opostas: $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ e sabemos que $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 21$.

Na primeira jogada, digamos que as faces de baixo e de cima sejam a_1 e a_2. Como $b_1+b_2+c_1+c_2 = 15$, concluímos que $a_1 + a_2 = 6$.

Na segunda jogada, digamos que as faces de baixo e de cima sejam b_1 e b_2. Como $a_1+a_2+c_1+c_2 = 12$, concluímos que $b_1 + b_2 = 9$. Logo,

$$21 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 6 + 9 + c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 6$$

Conclusão: temos três pares de faces opostas e quando somamos faces opostas, obtemos os seguintes resultados: 6, 9 ou 6. Somando 6 ao algarismo gravado na sua face oposta, seja ele qual for, resulta em um número maior que 6. Logo, a única possibilidade é que esta soma seja 9, portanto, na face oposta ao 6 deve aparecer o 3.

Questão 11. *(Noções de Estatística)*

Em um cofre há seis moedas: duas moedas de 1 real e quatro moedas de 50 centavos. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do cofre. Qual é a melhor aproximação do valor esperado da média aritmética dos valores das duas moedas retiradas do cofre?

(A) R$ 0,50 (B) R$ 0,67 (C) R$ 0,75

(D) R$ 0,90 (E) R$ 1,00

Resposta: B

Uma solução:

Intuitivamente o valor da média de estar entre 0,50 e 0,75, pois há mais moedas de 50 centavos do que de 1 real. Esta intuição pode ser confirmada observando-se a tabela

Moedas retiradas	Média	Probabilidade
$(0,50; 0,50)$	$0,50$	$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$
$(0,50; 1,00)$	$0,75$	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$
$(1,00; 0,50)$	$0,75$	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$
$(1,00; 1,00)$	$1,00$	$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

O valor esperado da média é $0,50.\frac{12}{30} + 0,75.2.\frac{8}{30} + 1.\frac{2}{30} = \frac{20}{30} \approx 0,67$.

Questão 12. *(Probabilidade)*

João faz parte de um grupo de 10 pessoas. Desse grupo, três pessoas são sorteadas em uma premiação. Qual é a probabilidade de João ter sido sorteado?

(A) 3/10 (B) 1/10 (C) 7/40

(D) 7/10 (E) 7/20

Resposta: A

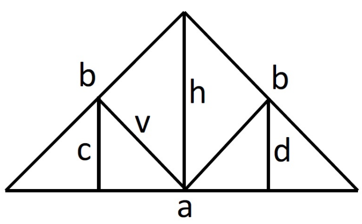
Uma solução:

É possível formar C_{10}^3 subconjuntos de três pessoas dentre as 10 do grupo. Dessas, João faz parte de C_9^2. Logo a probabilidade é

$$\frac{C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{\frac{9!}{7!\,2!}}{\frac{10!}{7!\,3!}} = \frac{9!\,3!}{2!\,10!} = \frac{6}{2 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

Questão 13. *(Teorema de Pitágoras)*

A figura mostra o esquema de uma tesoura de telhado. O triângulo maior é isósceles e tem base de medida $a = 16$ e lados laterais de medida $b = 10$. Os três apoios verticais de medidas c, h e d dividem a base em quatro partes congruentes.



As medidas de h, c e v são, respectivamente:

(A) 6, 3 e 5

(B) 6, 4 e 5

(C) $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

(D) $6\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

(E) 6, 9/2 e 5

Resposta: A.

Uma solução:

Notemos que h, sendo mediatriz, é também mediana e altura, logo h é um cateto do triângulo retângulo de hipotenusa b e segundo cateto $a/2$. Logo

$$h^2 = b^2 - (a/2)^2 = 10^2 - (16/2)^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow h = 6$$

Por outro lado, o apoio de medida c é paralelo a h e tem um extremo no ponto médio do cateto do triângulo retângulo, logo o outro extremo é o ponto médio da hipotenusa. Assim

$$c = \frac{h}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Notemos agora que v é lado lateral de um triângulo isósceles, pois a mediana desse triângulo coincide com a altura relativa à base. Assim

$$v = \frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Questão 14. *(Proporcionalidade)*

Você pretende matricular-se em uma academia de ginástica e está entre duas opções. A academia X cobra uma taxa de matrícula de R$ 130,00 e uma mensalidade de R$ 70,00. A academia Y cobra uma taxa de matrícula de R$ 90,00 e uma mensalidade de R$ 80,00. Qual é o período de tempo que você deve permanecer na academia para que os custos das duas academias sejam equivalentes?

(A) 4 meses

(B) 6 meses

(C) 8 meses

(D) 10 meses

(E) 12 meses

Resposta: A

Uma solução:

Vamos representar por f e g as funções do custo em função do tempo de permanência (em meses), para as academias X e Y respectivamente.

Academia X: $f(x) = 130 + 70x$

Academia Y: $g(x) = 90 + 80x$

Os custos das duas academias se equivalem quando $f(x) = g(x)$. Assim, $130+70x = 90+80x \Rightarrow 10x = 40 \Rightarrow x = 4$ meses.

Questão 15. *(Equações do segundo grau)*

Considere a equação $x^2 - 2|x| = k$ (x é a incógnita e $k \in \mathbb{R}$). Assinale a alternativa que indica todos os valores de k para os quais a equação tem exatamente 4 soluções em $\mathbb{R}$.

(A) $k \in \,]0, 1[$

(B) $k \in \,]-\frac{1}{2}, 3[$

(C) $k \in \,]-1, +\infty[$

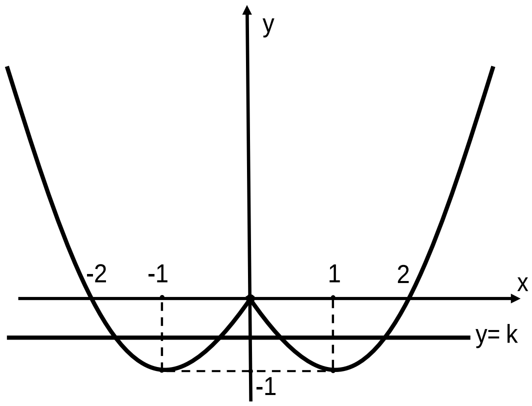
(D) $k \in \,]-1, 0[$

(E) $k \in [0, 1]$

Resposta: D

Uma solução:

O gráfico da função $y = x^2 - 2|x|$ está ilustrado abaixo. Uma reta $y = k$ intercepta o gráfico da função em 4 pontos se e somente se $-1 < k < 0$.



Observe que, para $k = 0$ há 3 pontos de intersecção (pontos de abscissa $x = 2$, $x = 0$ e $x = -2$) e para $k = -1$ há 2 pontos de intersecção (pontos de abscissa $x = 1$ e $x = -1$).

Para uma solução algébrica, procedemos como segue:

$$y = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se} \quad x > 0 \\ x^2 + 2x, & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Consideramos $x > 0$. Dado um número real k, $x^2 - 2x = k$ se e somente se $x = 1 \pm \sqrt{1+k}$ e, temos duas soluções se $k > 1$, uma solução se $k = -1$ e nenhuma solução se $k < -1$. No entanto, para que $x = 1 - \sqrt{1+k} > 0$ (que é o universo que estamos considerando), devemos ter $k < 0$. Concluímos então que, se $x > 0$, a equação $x^2 - 2x = k$ tem:

duas soluções se e somente se $-1 < k < 0$;
uma solução se e somente se $k > 0$ ou se $k = -1$;
nenhuma solução se e somente se $k < -1$.

Se $x \leq 0$, o raciocínio é análogo e concluímos que a equação $x^2 + 2x = k$ tem:
duas soluções se e somente se $-1 < k < 0$;
uma solução se e somente se $k > 0$ ou se $k = -1$;
nenhuma solução se e somente se $k < -1$.

A equação $x^2 - 2|x| = k$ tem 4 soluções reais se e somente se a equação $x^2 - 2x = k$ tem duas soluções em $]0, +\infty[$ e a equação $x^2 + 2x = k$ tem duas soluções em $]-\infty, 0[$.

Questão 16. *(Métodos de contagem)*

As placas de automóveis têm 3 letras do alfabeto (de 26 letras) e 4 números (de 0 a 9). Elas foram inseridas num banco de dados usando a ordem alfabética para as letras e a ordem habitual para os números. Começando com AAA0000, seguem, em ordem crescente dos números, as placas que iniciam com AAA para, em seguida, aparecer a placa AAB0000. Depois da placa AAZ9999 seguirão: ABA0000, ABA0001, etc. Assinale a alternativa que traz a inscrição da placa que ocupa a posição 20.290.754.

(A) DAA0753 (B) DAA0754 (C) DAB0753
(D) DAB0754 (E) DAC0753

Resposta: C

Uma solução:

Entre as placas que começam por A, existem $26 \times 26 = 676$ escolhas possíveis para a segunda e terceira letras. Como os números vão de 0000 a 9999, são 10 mil números. Logo, existem 6.760.000 placas iniciadas por A: de AAA0000 até AZZ9999. A placa na posição 6.760.001 é a placa BAA 0000. Da posição 6.760.001 até a posição 6.760.000+6.760.000 = 13.520.000 são as placas que iniciam por B: de BAA0000 até BZZ9999. A placa na posição 13.520.001 é a placa CAA0000. E o raciocínio se repete. A placa na posição 20.280.001 (= 13.520.001+6.760.000) é a primeira placa iniciada por D, ou seja, DAA0000. A placa procurada começa com a letra D, já que 20.290.754 = 20.280.000 + 10.754 e 10.754<6.760.000. As placas iniciadas com DA são em número de 260.000 (= 26×10.000). As primeiras 10.000 são as placas de DAA0000 até DAA9999 que ocupam as posições 20.280.001 e 20.290.000, respectivamente. A placa na posição 20.290.001 é a placa DAB0000.

Logo, a placa na posição 20.290.754 é a placa DAB0753.

Questão 17. *(Probabilidade)*

Uma urna contém cinco cartões, numerados de 1 a 5. Retira-se sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões da urna e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos. Qual é a probabilidade de esse número ser divisível por 4?

(A) 1/20 (B) 2/20 (C) 3/20
(D) 4/20 (E) 5/20

Resposta: D

Uma solução:

O total de números distintos que podem ser formados é 5!=120. Para que um número seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Assim, com os algarismos de 1 a 5, temos 12, 24, 32, 52 que são divisíveis por 4. Fixados os dois últimos algarismos, temos 3! números distintos. Assim, a probabilidade solicitada é $4 \times 3!\ /5! = 4/20$.

Questão 18. *(Proporcionalidade e porcentagem)*

O número médio de novos sócios aceitos em um clube nos anos de 2009 a 2012 (4 anos) foi de 325 por ano. Já o número médio de novos sócios por ano no período 2009-2013 é 20% maior do que o número de sócios por ano no período 2009-2012. Quantos sócios o clube aceitou em 2013?

(A) 500 (B) 525 (C) 550
(D) 600 (E) 650

Resposta: E

Uma solução:

Como a nova média aumentou em 20%, ela passou de 325 para 390. Denotando por n o número de sócios aceitos em 2013, temos

$$\frac{1300+n}{5} = 390 \Rightarrow n = 650$$

Questão 19. *(Porcentagem)*

Um automóvel desvaloriza-se 20% a cada ano. Depois de quantos anos, no mínimo, o automóvel valerá menos do que a metade do valor original?

(A) 3 anos (B) 4 anos (C) 5 anos
(D) 6 anos (E) 7 anos

Resposta: B

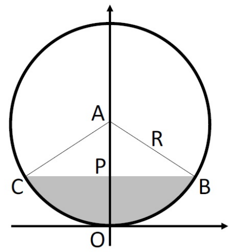
Uma solução:

Fazendo as contas : $1 \to 0,8 \to 0,64 \to 0,512 \to 0,4096$. No mínimo 4 anos.

Questão 20. *(Áreas de figuras planas)*

Os tanques que armazenam combustíveis nos postos de gasolina ficam subterrâneos, têm a forma de um cilindro circular reto e ficam deitados de modo que seu eixo é paralelo ao solo. Para medir o volume de combustível insere-se verticalmente no tanque uma vareta milimetrada e, lendo a altura até onde a vareta fica molhada, é possível saber o volume do combustível armazenado. Qual é o volume do combustível em um desses tanques, com raio R, medido em metros, e comprimento 10 m, quando a medida na vareta de medição marca um quarto do diâmetro?

(A) $V = 10(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{16})R^2\,\mathrm{m}^3$
(B) $V = 10(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})R^2\,\mathrm{m}^3$
(C) $V = 10(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{16})R^2\,\mathrm{m}^3$
(D) $V = 10(\frac{\pi-\sqrt{3}}{2})R^2\,\mathrm{m}^3$
(E) $V = 10(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})R^2\,\mathrm{m}^3$



Resposta: B

Uma solução:

Para calcular o volume pedido, precisamos calcular a área da figura F em cinza (no desenho do enunciado da questão). Essa área é a diferença entre as áreas: $F =$ área $(ACOBA))-$ área (ΔACB).

Cálculo da área $(ACOBA)$:

Ora, $cos(P\hat{A}B) = \frac{PA}{AB} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$, donde $P\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$. Logo, área $(ACOBA) = P\hat{A}B \times R^2 = \frac{\pi}{3}R^2$.

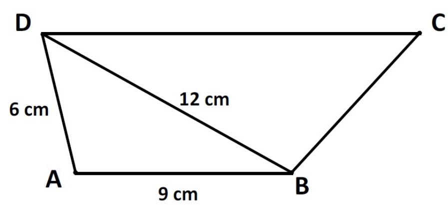
Cálculo da área (ΔACB):

Temos $R^2 = PB^2 + \frac{R^2}{4} \Longrightarrow PB = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Assim, área $(\Delta ACB) = \frac{1}{2}.2.\frac{\sqrt{3}}{2}.R.\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$

Finalmente: $F =$ área $(ACOBA))-$ área $(\Delta ACB) = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})R^2$ e o volume procurado é $V = 10(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}).R^2\,m^3$.

Questão 21. *(Proporcionalidade)*

Um trapézio, ilustrado pela figura, é formado pela reunião de dois triângulos semelhantes mas não congruentes ABD e BDC.



Seu perímetro é igual a:

(A) 25 (B) 32 (C) 39

(D) 43 (E) 50

Resposta: C

Uma solução:

Chamemos os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ de x e y, respectivamente. Identificando os ângulos semelhantes, podemos escrever a proporção: $y/12 = x/6 = 12/9$. Daí, $x = 8$ e $y = 16$. O perímetro procurado será então $P = 6 + 9 + 8 + 16 = 39$.

Questão 22. *(Métodos de contagem)*

Uma pessoa precisa ativar o alarme de sua residência cuja senha é formada por quatro algarismos distintos e ela lembra apenas que o primeiro algarismo é 5 e que o último é 3. A central do alarme permite apenas uma tentativa a cada 2 minutos. Na pior situação possível, qual é a maior duração de tempo que ela poderá levar para ativar o alarme digitando senha após senha?

(A) 1h 22m (B) 1h 50m (C) 2h 02m

(D) 2h 10m (E) 2h 20m

Resposta: B

Uma solução:

Sabendo que a senha é formada por 4 algarismos distintos, cujo primeiro dígito é 5 e o último é 3; do total de 10 algarismos restam 8 possibilidades de escolha para o segundo dígito e 7 possibilidade de escolha para o terceiro dígito. Assim, temos $8 \times 7 = 56$ combinações possíveis. Como não é necessário aguardar dois minutos para a primeira tentativa, mas temos que aguardar um intervalo de tempo de 2 minutos para as demais tentativas o tempo necessário levará para ativar o alarme será de $2 \times (56 - 1) = 110$ minutos, ou seja, 1 hora e 50 minutos.

Questão 23. *(Métodos de contagem)*

O maior múltiplo de 42 menor do que 10000 é:

(A) 9666 (B) 9669 (C) 9696

(D) 9966 (E) 9996

Resposta: E

Uma solução:

Divide-se 10000 por 42 e verifica-se que o resto é 4, logo o número procurado é 10000-4=9996.

Questão 24. *(Noções de Estatística)*

Em um conjunto de dez números inteiros, a média dos dois menores é 102, dos três menores é 103, dos quatros menores é 104, e assim por diante, até a média de todos os dez é 110. Qual é o maior desses inteiros?

(A) 140 (B) 132 (C) 125

(D) 119 (E) 117

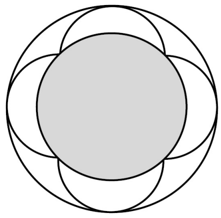
Resposta: D

Uma solução:

A partir dos dados do problema, sabemos que as somas dos números considerados são tais que: $S_{10} = 1100$, $S_9 = 981$; portanto, o maior dos números é $1100 - 981 = 119$.

Questão 25. *(Áreas de figuras planas)*

A figura mostra duas circunferências concêntricas e quatro arcos semicirculares congruentes, cujos extremos são os vértices de um quadrado inscrito na circunferência interna. A circunferência externa tangencia os arcos semicirculares. Se a área do círculo interno é 1, qual é a área do círculo externo?



(A) 4 (B) $5\pi/2$ (C) 2
(D) 2π (E) 3

Resposta: C

Uma solução:

Área do círculo interno: $\pi r^2 = 1$. O lado l do quadrado cujos vértices são as extremidades dos arcos de circunferência é tal que $2r = l\sqrt{2}$ ou $l = r\sqrt{2}$. O diâmetro do círculo externo é $D = 2R = 2l$, sendo R o raio do círculo externo, logo $R = l$. A área procurada será $A = \pi l^2 = 2\pi r^2 = 2$.

Questão 26. *(Equações do segundo grau)*

Seja r a raiz positiva da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Então

$$\frac{r^5}{1-r} + \frac{2r^6}{(1-r)^2} \qquad \text{é igual a}$$

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
(D) $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ (E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Resposta: A

Uma solução:

A raiz r satisfaz a equação $r^2 = 1 - r$. Assim,

$$\frac{r^5}{1-r} + \frac{2r^6}{(1-r)^2} = \frac{r^5}{r^2} + \frac{2r^6}{r^4} = r^3 + 2r^2 = r.r^2 + 2r^2 = r.(1-r) + 2r^2 = r + r^2 = r + 1 - r = 1$$

Questão 27. *(Métodos de contagem)*

Uma pessoa vai visitar cinco locais na cidade do Rio de Janeiro: Cristo Redentor, Pão de Açúcar, Teatro Municipal, Candelária e Jardim Botânico. De quantas maneiras diferentes pode planejar a sequência das cinco visitas, se não quiser começar nem terminar pelo Jardim Botânico?

(A) 36 (B) 72 (C) 96
(D) 120 (E) 240

Resposta: B

Uma solução:

Excluindo o Jardim Botânico e ordenando os quatro outros pontos turísticos temos 4!=24 possibilidades de roteiros distintos. Para cada um destes roteiros, o Jardim Botânico pode ser 'encaixado' em três posições, logo para cada uma das 24 possibilidades consideradas anteriormente, temos três roteiros distintos. Portanto, há 3× 24=72 possibilidades no total.

Questão 28. *(Métodos de contagem)*

Quantas palavras podemos escrever com as seis letras a, b, c, d, e, f, sem repetir letras, de modo que as letras a, b, c sempre apareçam na ordem alfabética?

(A) 120
(B) 240
(C) 720
(D) 715
(E) 360

Resposta: A

Uma solução:

As letras a, b, c formam $3! = 6$ palavras, das quais apenas uma está na ordem desejada. As seis letras a, b, c, d, e, f formam $6! = 720$ palavras, das quais interessa a sexta parte, que assim perfazem $720/6 = 120$.

Questão 29. *(Noções de estatística)*

Em ciências atuariais, uma tábua da vida é uma tabela, construída a partir de censos populacionais, que mostra a probabilidade de morte de um indivíduo em uma determinada faixa etária. Por exemplo, a tábua da vida abaixo indica que um indivíduo que completou 21 anos tem 0,10% de chance de morrer antes de completar 22 anos.

Faixa etária $[x, x+1)$	$[20, 21)$	$[21, 22)$	$[22, 23)$	$[23, 24)$	$[25, 26)$
Probabilidade de morrer	$0,09\%$	$0,10\%$	$0,10\%$	$0,10\%$	$0,10\%$

(Fonte: National Vital Statistics Reports, Vol. 54, No. 14, 2006.)

Considere um grupo de 1 000 000 pessoas que acabaram de completar 21 anos. Segundo esta tabela, qual é o número de pessoas deste grupo, em média, que se espera que faça aniversário de 23 anos?

(A) 998 001
(B) 990 000
(C) 999 900
(D) 900 001
(E) 810 000

Resposta: A

Uma solução:

Seja q_x é a probabilidade de um indivíduo na faixa etária $[x, x+1)$ morrer. Logo $p_x = 1 - q_x$ é a probabilidade de um indivíduo na faixa etária $[x, x+1)$ fazer $x+1$ anos. Se l_x representa o número de indivíduos que fizeram aniversário de x anos, então $l_{x+1} = l_x \times p_x$. No problema temos:

$l_{21} = 1000000, q_{21} = q_{22} = 0,10\%$ e, portanto, $p_{21} = p_{22} = 99,9\%$.

Logo, $l_{23} = l_{21} \times p_{21} \times p_{22} = 1000000 \times 99,9\% \times 99,9\% = 998001$ pessoas.

Questão 30. *(Áreas de figuras planas)*

A área de 3 hexágonos regulares, cada um de lado 10 cm, é equivalente a:

(A) área de um triângulo equilátero de 30 cm de lado.
(B) área de um triângulo equilátero de 60 cm de lado.
(C) área de dois triângulos equiláteros de 30 cm de lado.

(D) área de três triângulos equiláteros de 30 cm de lado.

(E) área de um hexágono regular de 30 cm de lado.

Resposta: C

Uma solução:

Basta pensar na decomposição das figuras em triângulos equiláteros de 10 cm de lado.

Cada hexágono é formado por 6 triângulos de 10 cm de lado; três hexágonos correspondem a 18 triângulos de 10 cm de lado. Cada triângulo de 30 cm de lado corresponde a 9 triângulos de 10 cm de lado e portanto 2 triângulos equiláteros de 30 cm de lado têm área equivalente aos três hexágonos do enunciado.

Questão 31. *(Equações do primeiro grau)*

Um número X, de cinco algarismos, é interessante: se escrevermos o algarismo 1 à sua direita, ele fica três vezes maior do que se escrevermos 1 à sua esquerda. Qual é a soma dos algarismos do número X?

(A) 18 (B) 26 (C) 28

(D) 31 (E) 36

Resposta: B

Uma solução:

Seja X o número procurado. Quando escrevemos 1 à sua direita, o número resultante é 10X+1; quando escrevemos 1 à sua esquerda, o número resultante será 100000+X. Daí, temos que 10X+1 = 300000+3X. Daí, 7X= 299999 e X= 42857.

Questão 32. *(Equações do primeiro grau)*

Roberto pensou em três números inteiros; somando-os, dois a dois, obteve os resultados 37, 41 e 44. O produto dos três números é:

(A) 4250. (B) 5620. (C) 6230.

(D) 8160. (E) 10530.

Resposta: D

Uma solução:

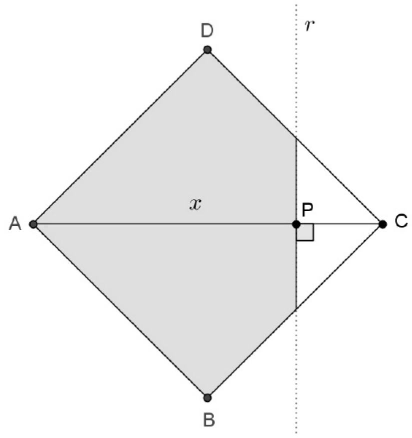
Indicando por a, b e c os números inteiros pensados, temos

$$\begin{cases} a+b=37 \\ b+c=41 \\ a+c=44 \end{cases}$$

Logo $a=20, b=17, c=24$ e $abc=8160$.

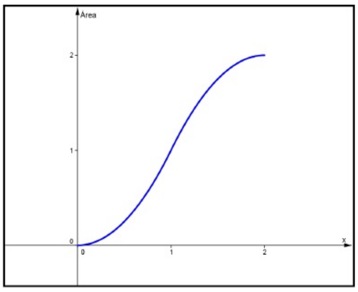
Questão 33. *(Áreas de figuras planas)*

Na figura ao lado, $ABCD$ é um quadrado em que AC mede 2, r é uma reta perpendicular a AC em P e AP mede x.

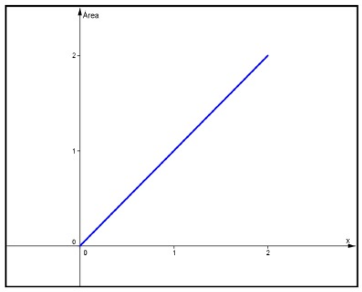


Assinale qual gráfico melhor representa a função f que, a cada valor de x em $]0, 2]$, associa a área do polígono cinzento formado pela interseção do interior do quadrado com o semiplano determinado pela reta r que contém o ponto A.

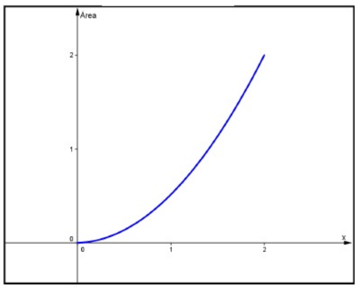
(A)



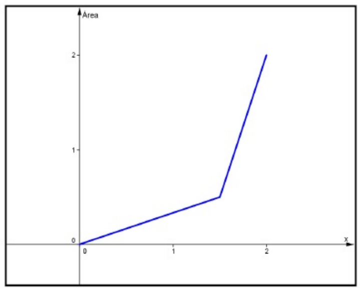
(B)



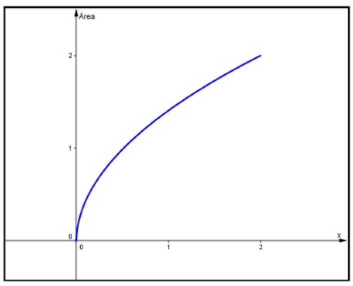
(C)



(D)



(E)



Resposta: A

Uma solução:

Se x $>$ 0 e x $\leq$ 1, então f(x) é igual a área de um triângulo retângulo isósceles de altura x. Assim, para x $>$ 0 e x $\leq$

1, $f(x) = x^2$. Se $x > 1$ e $x \leq 2$, então f(x) é igual a área do quadrado ABCD menos a área de um triângulo retângulo isósceles de altura 2-x. Assim, para $x > 1$ e $x \leq 2$, $f(x) = 2 - (2 - x)^2$. Portanto, o gráfico de f é a justaposição de dois arcos de parábola com concavidades diferentes.

Questão 34. *(Probabilidade)*

Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tato: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se simultaneamente três bolas do saco, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números das bolas retiradas ser igual a cinco?

(A) 7/110 (B) 15/110 (C) 21/110
(D) 36/110 (E) 42/110

Resposta: C

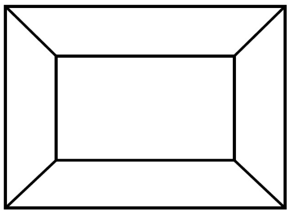
Uma solução:

Para que os números somem 5 podemos ter as triplas (1, 1, 3) ou (1, 2, 2) além de suas permutações (3 de cada). Logo a probabilidade é dada por

$$\frac{3}{12}\frac{2}{11}\frac{4}{10} \times 3 + \frac{3}{12}\frac{5}{11}\frac{4}{10} \times 3 = \frac{21}{110}$$

Questão 35. *(Métodos de contagem)*

Cada uma das cinco regiões da figura deve ser pintada com uma só cor, escolhida entre verde, amarelo, azul e branco. De quantas maneiras distintas podemos colorir a figura, de modo que regiões adjacentes não fiquem com a mesma cor?



(A) 24 (B) 36 (C) 48
(D) 72 (E) 144

Resposta: D

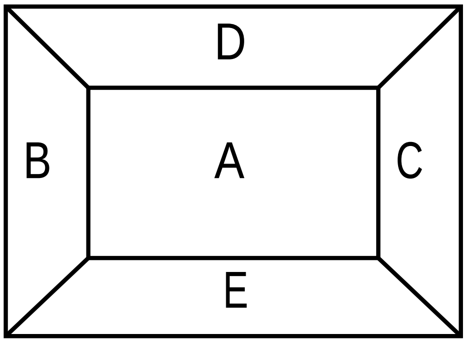
Uma solução:

Vamos denotar as 5 regiões da figura dada pelas letras A, B, C, D e E , conforme a figura abaixo. Um modo de contar as possibilidades de colorir a figura, respeitando as condições exigidas, é escolher em primeiro lugar a cor da região A e, usando o Princípio Aditivo, separar em dois casos:

1º caso: as cores das regiões B e C são diferentes. Neste caso, temos 4 cores para colorir a região A, 3 cores para a região B, 2 para colorir C e, finalmente, colorimos as regiões D e E com a quarta cor. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, podemos colorir a figura de $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ maneiras diferentes.

2º caso: as cores das regiões B e C são iguais. Neste caso, temos 4 cores para colorir a região A, 3 para a região B, que será a mesma para a região C, 2 cores para colorir a região D e, finalmente, 2 para a região E. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, podemos colorir a figura de $4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras diferentes.

Assim, pelo Princípio Aditivo, temos 24+48=72 maneiras distintas de colorir a figura dada, nas condições exigidas pelo enunciado.



Questão 36. *(Áreas de figuras planas)*

Se a base de um retângulo aumentou em 10% e a sua altura diminuiu em 10%, então sua área
(A) diminuiu em 1%
(B) permaneceu inalterada
(C) aumentou em 1%
(D) diminuiu em 20%
(E) diminuiu em 100%

Resposta: A

Uma solução:

Considere um retângulo de base b e altura h. Sua área é, portanto, igual a $A = bh$. Se b aumentou em 10% e h diminiu em 10%, então sua nova área é igual a $(1 + 0,1)b(1 - 0,1)h = (1 - 0,01)bh = (1 - 0,01)A$. Portanto, a área diminuiu em 1%.

Questão 37. *(Equações do primeiro grau)*

Em uma competição escolar, todos os alunos da torcida da turma 32 tinham o número de sua turma estampado na camiseta e todos os alunos da torcida da turma 34 também tinham o número de sua turma estampado na camiseta. Pedro somou os números de todas as camisetas das duas torcidas, e obteve 2752 como resposta. Qual é o número de alunos na torcida da turma 32, se o número total de alunos nas duas torcidas é 84?
(A) 32
(B) 34
(C) 42
(D) 52
(E) 58

Resposta: D

Uma solução:

Sejam: x o número de alunos da turma 32 e y o número de alunos da turma 34.

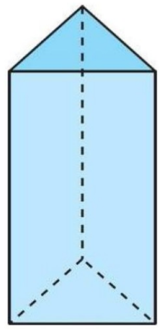
$x + y = 84 \to y = 84 - x$

$32x + 34y = 2752$

$2x = 104 \to x = 52$

Questão 38. *(Métodos de contagem)*

Vamos numerar cada um dos vértices do prisma ao lado com números do conjunto $\{0, 1\}$ e cada uma de suas faces será numerada com a soma dos números de seus vértices. Quantos resultados distintos para a soma dos números das faces poderemos obter?



(A) 4
(B) 6
(C) 7
(D) 12
(E) 19

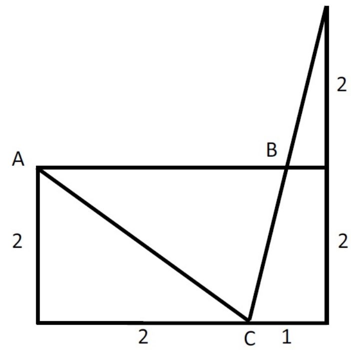
Resposta: C

Uma solução:

Quando todos os vértices forem 0, a soma será 0.
Quando um dos vértices for 1, três faces terão sua contribuição e a soma será 3.
Quando dois vértices forem 1, a soma será 6.
Quando três vértices forem 1, a soma será 9.
Quando 4 vértices forem 1, a soma será 12.
Quando 5 vértices forem 1, a soma será 15.
Quando os 6 vértices forem 1, a soma será 18.

Questão 39. *(Área de figuras planas)*

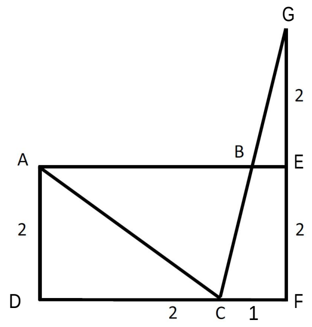
Na figura, o ponto A é vértice do retângulo de dimensões 3×2. Qual é o valor da área do triângulo ABC?



(A) 2
(B) 3
(C) 7/2
(D) 9/4
(E) 5/2

Resposta: E

Uma solução:



A área de ABC é igual à área do retângulo ADFE menos as áreas de ADC e BEFC.

A área de ADFE é 6.

A área de ADC é 2.

A área de BEFC é a diferença entre a área de CFG e BEG.

A área de BEG é 1/4 da área de CFG, pois são triângulos semelhantes com razão 1/2, logo a área de BEFC é 3/4 da área de CFG, ou seja, $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$

Assim, a área de ABC é $6 - 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Questão 40. *(Proporcionalidade)*

Os alunos de uma turma vão alugar um ônibus para um passeio. O valor do aluguel do ônibus é fixo, isto é, não depende do número de passageiros que serão transportados. O custo do ônibus é de R$ 30,00 por pessoa considerando toda a turma, mas 8 alunos desistiram do passeio e o custo por pessoa passou para R$ 37,50. Quantos são os alunos da turma?

(A) 25 (B) 30 (C) 32
(D) 40 (E) 44

Resposta: D

Uma solução:

Seja x o número de alunos na turma.

$$\frac{\text{custo}}{x} = 30 \rightarrow \text{custo} = 30x$$

$$\frac{\text{custo}}{x-8} = 37,5 \rightarrow \text{custo} = 37,5(x-8)$$

$$30x = 37,5(x-8) \rightarrow x = 40$$