Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que ou $f(x) = x$ para todo x ou então $f(x) = -x$ seja qual for x.

UMA SOLUÇÃO

Tomando $y = 0$, vemos que $|f(x)| = |x|$, logo $f(x) = \pm x$ para todo x. Resta mostrar que não se pode ter $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = -x_2$ com x_1 e x_2 não nulos. De fato, se isto ocorresse, então

$$|x_1 + x_2| = |x_1 - (-x_2)| = |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|\,.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade $|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$ concluiríamos que $x_1 x_2 = -x_1 x_2$, isto é, que $x_1 x_2 = 0$, o que é uma contradição com o fato de x_1 e x_2 serem ambos nulos.

Questão 2. Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, consideremos as funções afins $g(x) = mx + t$, onde m é fixo e t será escolhido convenientemente. Prove que existe uma (única) escolha de t para a qual a equação $f(x) = g(x)$ tem uma, e somente uma, raiz x. Interprete este fato geometricamente em termos dos gráficos de f e g.

UMA SOLUÇÃO

A equação $f(x) = g(x)$ significa $ax^2 + (b-m)x + c - t = 0$. Esta equação do segundo grau tem uma raiz única se, e somente se, seu discriminante $(b-m)^2 - 4a(c-t)$ é igual a zero, ou seja, se $t = c - \frac{(b-m)^2}{4a}$ (observando que $a \neq 0$, já que f é quadrática).

Ao variar t, a reta gráfico de g se desloca paralelamente a si mesma e toca a parábola gráfico de f num só ponto quando é sua tangente. Este é o valor de t que foi calculado.

Questão 3. Dados os pontos $A = (3,7)$, $B = (4,5)$, $C = (5,5)$ e $D = (5,3)$ em $\mathbb{R}^2$, determine a função afim $f(x) = ax + b$ cujo gráfico contém três desses pontos.

UMA SOLUÇÃO

As inclinações dos segmentos AB, AC e AD são, respectivamente, -2, -1 e -2. Portanto A, B e D são colineares.

O segmento CD é vertical, logo C e D não podem pertencer ao gráfico de uma função afim. Logo, além de A, B, D só resta a possibilidade de que A, B e C sejam colineares. No entanto, AB tem inclinação -2 e BC tem inclinação 0, então A, B e C não podem ser colineares.

Assim, A, B e D são os únicos três pontos colineares dentre os quatro pontos dados. A função afim cujo gráfico os contém é $f(x) = ax + b$ tal que $f(3) = 7$ e $f(4) = 5$. Portanto $3a + b = 7$ e $4a + b = 5$. Daí resulta que $a = -2$ e $b = 13$. A função procurada é $f(x) = -2x + 13$.

Questão 4. A população de uma cultura de bactérias, num ambiente controlado, é estimada pela área que ocupa sobre uma superfície plana e tem taxa de crescimento diária proporcional a seu tamanho. Se, decorridos 20 dias, a população duplicou, então ela ficou 50% maior

(a) antes de 10 dias.

(b) ao completar 10 dias.

(c) após 10 dias.

Escolha a resposta certa e justifique sua opção.

UMA SOLUÇÃO

Se p_0 é a população original, após decorridos t dias a população $p = p(t)$ será dada por $p = p_0 a^t$, onde a é uma constante maior do que 1. Temos $p_0 a^{20} = 2p_0$, logo $a^{20} = 2$. Então $p(10) = p_0 a^{10} = p_0\sqrt{a^{20}} = p_0\sqrt{2} \simeq 1,414p_0$. Então $p(10) < 1,5p_0$, o que nos faz concluir que o crescimento de 50% será atingido após os primeiros 10 dias. A opção correta é (c).

Questão 5. Dados números reais positivos x e y, ache α e β tais que $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta$. Em seguida mostre como (mediante o uso de uma tabela de funções trigonométricas) esta igualdade pode ser empregada para reduzir o produto de dois números reais positivos *quaisquer* às operações de soma e divisão por 2.

UMA SOLUÇÃO

A fórmula do cosseno de uma soma, junto com a observação de que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$, nos dá

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

e

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y\,,$$

logo $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$. Daí resulta a igualdade proposta, com $\alpha = x + y$ e $\beta = x - y$.

Em seguida, se a e b são números reais positivos quaisquer, dados por suas expressões decimais, deslocando as vírgulas que separam suas partes inteiras (alteração que pode facilmente ser refeita no final), podemos supor que esses números são ambos compreendidos entre 0 e 1. A tabela nos dá x e y tais que $\cos x = a$ e $\cos y = b$. E a igualdade inicial fornece $ab = \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$. Na prática, é preciso (i) tomar x e y pela tabela; (ii) calcular $x+y$ e $x-y$; (iii) obter seus cossenos, também pela tabela; (iv) somar os cossenos; e (v) dividir por 2.

Este artifício era usado pelos astrônomos antes da descoberta dos logaritmos.