Questão 1.

Calcule as seguintes expressões:

(1,0) (a) $\log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right]$

(1,0) (b) $x^{\log a / \log x}$, onde $a > 0$, $x > 0$ e a base dos logaritmos é fixada arbitrariamente.

Questão 2.

(Como caracterizar a função exponencial a partir da função logaritmo.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente, tal que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes afirmações:

(1,0) (a) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) > 1$.

(1,0) (b) Pondo $a = f(1)$, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a f(x)$ é linear. (Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.)

(0,5) (c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$, onde g é a função definida no item (b).

(0,5) (d) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Questão 3.

(1,0) (a) 24h após sua administração, a quantidade de uma droga no sangue reduz-se a 10% da inicial. Que percentagem resta 12h após a administração? Justifique sua resposta, admitindo que o decaimento da quantidade de droga no sangue é exponencial.

(1,0) (b) Em quanto tempo a quantidade de droga no organismo se reduz a 50% da dose inicial?

(0,5) (c) Se a mesma droga for administrada em duas doses de 10 mg com um intervalo de 12h, qual é a quantidade presente no organismo após 24h da primeira dose?

(Questão 4 na próxima página)

Questão 4.

(1,0) (a) Usando as fórmulas para $\cos(x+y)$ e $\operatorname{sen}(x+y)$, prove que

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(y)}{1 + \operatorname{tg}(x)\cdot\operatorname{tg}(y)}$$

(desde que $\operatorname{tg}(x-y)$, $\operatorname{tg}(x)$ e $\operatorname{tg}(y)$ estejam definidas).

(1,5) (b) Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, use a fórmula acima para resolver o seguinte problema:

Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.