



NOME: \_\_\_\_\_

**Questão 1** (valor: 2 pontos)

a) (1,0) Prove que  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

b) (1,0) Calcule  $1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+1000)$ .

**Questão 2** (valor: 2 pontos)Encontre todos os números inteiros  $a \geq 1$  tais que  $a+2 \mid a^4+2$ .**Questão 3** (valor: 2 pontos)Denota-se por  $(a, b)$  o máximo divisor comum de dois números inteiros  $a$  e  $b$ . Calcule

$$\left(\frac{2^{50}+1}{2^{10}+1}, 2^{10}+1\right).$$

**Questão 4** (valor: 2 pontos)Seja  $n = a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0$  um número natural escrito em sua representação decimal. Mostre que  $n$  é divisível por 7, 11 ou 13 se, e somente se,  $a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + a_8 a_7 a_6 - \dots$  é divisível, respectivamente, por 7, 11 ou 13.(Sugestão: Observe que  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ )**Questão 5** (valor: 2 pontos)

Uma pilha de cocos foi coletada por três homens, ajudados por um macaco. À noite, um dos homens acordou enquanto os outros estavam dormindo e dividiu os cocos em 3 partes iguais, sobrando um coco, o qual deu ao macaco. Este homem escondeu uma das partes, juntou as outras duas em uma pilha (no mesmo local onde estava a pilha original) e voltou a dormir. Seguidamente, cada um dos outros dois homens realizou o mesmo procedimento, sempre sobrando um coco, que era dado ao macaco. De manhã, os três homens dividiram os cocos restantes em 3 partes iguais e novamente sobrou um coco, que foi dado ao macaco. Qual é o menor número de cocos que poderia ter a pilha original?