

Atenção: esta prova deve ser feita sem o uso de calculadoras!

Questão 1.

Uma venda imobiliária envolve o pagamento de 12 prestações mensais iguais a R\$ 10.000,00, a primeira no ato da venda, acrescidas de uma parcela final de R\$ 100.000,00, 12 meses após a venda. Suponha que o valor do dinheiro seja de 2% ao mês.

- (a) (1,0) Se o comprador preferir efetuar o pagamento da parcela final junto com a última prestação, de quanto deverá ser o pagamento dessa parcela?
- (b) (1,0) Se o comprador preferir efetuar o pagamento à vista, qual deverá ser o valor desse pagamento único?

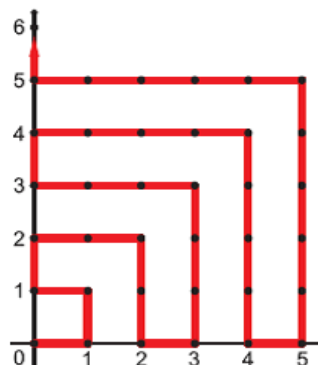
São dados alguns valores aproximados de $1,02^n$:

n	$1,02^n$
-12	0,788
-1	0,980
12	1,268

Questão 2.

A figura abaixo mostra uma linha poligonal que parte da origem e passa uma vez por cada ponto do plano cujas coordenadas são números inteiros e não negativos.

- (a) (1,0) O conjunto dos **pares de números inteiros e não negativos** tem a mesma cardinalidade que os números naturais? Por quê?
- (b) (1,0) Mostre que o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto (n, n) é $n^2 + n$, para qualquer inteiro não negativo n .
- (c) (0,5) Qual é o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto $(10, 13)$?



Questão 3.

(1,5) Mostre, por indução finita, que se n é um inteiro positivo então $7^n - 1$ é divisível por 6.

Questão 4.

Considere a recorrência $x_{n+2} - 4x_n = 9n$, com as condições iniciais $x_0 = x_1 = 0$.

- (a) (0,5) Encontre a solução geral da recorrência homogênea $x_{n+2} - 4x_n = 0$.
- (b) (0,5) Determine os valores de A e B para os quais $x_n = A + nB$ é uma solução da recorrência $x_{n+2} - 4x_n = 9n$.
- (c) (1,0) Encontre a solução da recorrência original.

Questão 5.

Para todo número natural $n \geq 2$, considere o número N formado por $n - 1$ algarismos iguais a 1, n algarismos iguais a 2 e um algarismo igual a 5, nesta ordem.

- (a) (1,0) Mostre que o número N pode ser escrito na forma

$$\frac{A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C}{9},$$

onde A , B e C são constantes independentes de n . Indique os valores de A , B e C .

- (b) (0,5) Mostre que N é um quadrado perfeito.
- (c) (0,5) Quantos algarismos tem \sqrt{N} ? Diga quais são esses algarismos.