

III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

**EXTENSÕES DE TEOREMAS
DE GEOMETRIA PLANA
COM AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA**

Jonathan de Aquino Silva
Carmen Vieira Mathias

**EXTENSÕES DE TEOREMAS
DE GEOMETRIA PLANA
COM AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA**

Extensões de teoremas de geometria plana com auxílio do software Geogebra

Copyright © 2019 Jonathan de Aquino Silva e Carmen Vieira Mathias

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice- Presidente: Nancy Garcia

Diretores:

Gregório Pacelli

João Xavier

Marcio Gomes Soares

Walcy Santos

Editor Executivo

Hilário Alencar

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Comitê Científico

Paolo Piccione – USP

Antonio Amaral – Prefeitura de Cocal dos Alves – PI

Cydara Ripoll – UFRGS

Leticia Rangel – CAP UFRJ

Hugo Diniz – UFOPA

Humberto Bortolossi – UFF

João Xavier Neto – UFPI

Mauro Rabelo – UnB

Comissão Organizadora

Ana Luiza Kessler – Seeduc – RS

Graziele Mozer – Colégio Pedro II

Magda Braga Lemos – CMRJ

Marcelo Casemiro dos Santos – CMRJ

Marcela de Souza – UFTM

Priscilla Guez – Colégio Pedro II

Raquel Bodart – IFTM

Renata Magarinus – IFSUL

Capa: Pablo Diego Regino

Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-145-8

Distribuição e vendas

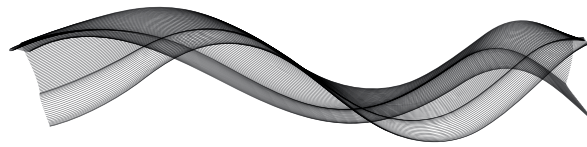
Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)



III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

EXTENSÕES DE TEOREMAS DE GEOMETRIA PLANA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Jonathan de Aquino Silva
Carmen Vieira Mathias

1ª edição
2018
Rio de Janeiro

Sumário

1	Introdução	3
2	Os Teoremas	5
2.1	Teorema de Varignon	5
2.1.1	Extensão do Teorema de Varignon para quadriláteros fora do padrão.	5
2.1.2	Extensão do Teorema de Varignon para outros pontos. . .	8
2.2	O Teorema dos Carpetes	10
2.2.1	Extensão do Teorema dos Carpetes para regiões triangulares.	14
2.2.2	Extensão do Teorema dos Carpetes para regiões circulares.	15
3	O Uso do GeoGebra na Extensão dos Teoremas	17
3.1	Teorema de Varignon	17
3.1.1	Generalização do Teorema de Varignon	21
3.1.2	Extensão do Teorema de Varignon	26
3.2	Teorema dos Carpetes	29
3.2.1	Extensão do Teorema dos Carpetes para regiões triangulares.	32

Prefácio

Os resultados de Geometria Euclidiana podem chamar atenção daqueles que gostam de trabalhar com recursos computacionais, pois, a partir desses, existe a possibilidade de realizar conjecturas, visto a dinamicidade dos aplicativos. Neste sentido, no minicurso proposto pretendemos apresentar a possibilidade de realizar extensões para dois Teoremas de Geometria Euclidiana, o Teorema de Varignon e o Teorema dos Carpetes, discutindo suas demonstrações e abordando alguns problemas relacionados. Além disso, realizaremos a construção dos entes geométricos envolvidos nesses dois resultados, utilizando o aplicativo GeoGebra. Ao utilizar os recursos tecnológicos, a ideia é fazer com que os participantes percebam que esses podem ser um aliado à aprendizagem de novos conceitos, além de facilitar a visualização dos resultados e extensões dos mesmos.

Capítulo 1

Introdução

Conforme [3] existe uma enorme dicotomia entre os conteúdos vistos no Ensino Superior e sua aplicação direta na Educação Básica. Procurando estreitar esses laços, buscamos assuntos abordados em Geometria Plana que podem ser facilmente encontrados em problemas do Ensino Fundamental e Médio. A ideia é abordar dois teoremas da Geometria Plana: O Teorema dos Carpetes e o Teorema de Varignon. Diretamente, o Teorema dos Carpetes não é trabalhado em cursos regulares de graduação em Matemática, porém acreditamos que os professores e alunos de cursos de graduação em Matemática, possuem ferramentas para entendê-lo, demonstrá-lo e questionar sua validade para outros tipos de regiões, que não sejam quadriláteros. Além disso o Teorema de Varignon, assim como o Teorema dos Carpetes, apresenta relações geométricas acerca de quadriláteros. Acreditamos que desenvolver os teoremas acima citados, além da aplicabilidade em diversos problemas geométricos, é algo que pode aproximar o conteúdo visto na universidade aquele que o professor trabalha em sala de aula. Assim, o objetivo desse minicurso é apresentar as demonstrações dos dois teoremas, e realizar as construções, no aplicativo GeoGebra, visando a extensões dos mesmos para casos não usuais.

Capítulo 2

Os Teoremas

2.1 Teorema de Varignon

Um resultado matemático que chama atenção ao estudo de Geometria, é o chamado Teorema de Varignon. Tal teorema afirma que os pontos médios E , F , G e H dos respectivos lados de um quadrilátero $ABCD$ são os vértices de um paralelogramo (conforme Figura 2.1).

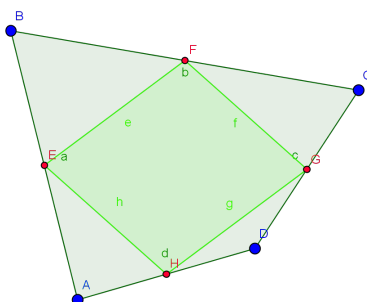


Figura 2.1: Construção do Teorema em um quadrilátero qualquer.

A demonstração desse resultado é encontrada em [2].

2.1.1 Extensão do Teorema de Varignon para quadriláteros fora do padrão.

Segundo [4], alguns teoremas têm a capacidade de se estender para diferentes casos. Seguindo essa ideia, o Teorema de Varignon é classificado como um resultado que possui tal propriedade. Ele é verdadeiro não apenas para quadriláteros convexos, mas também para os quadriláteros fora do padrão, que entendemos como os não convexos, cruzados ou degenerados.

A Figura 2.2 ilustra alguns exemplos de quadriláteros degenerados.

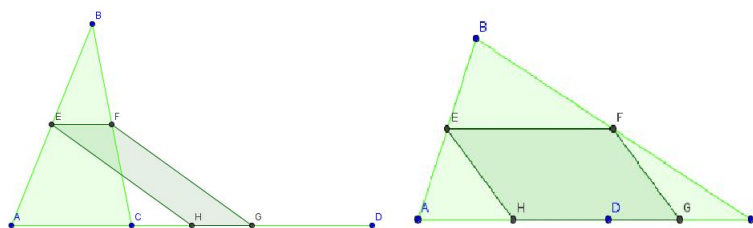


Figura 2.2: Exemplos do Teorema de Varignon em quadriláteros degenerados.

A Figura 2.3 ilustra os quadriláteros do tipo cruzados (à esquerda) e quadriláteros não convexos (à direita).

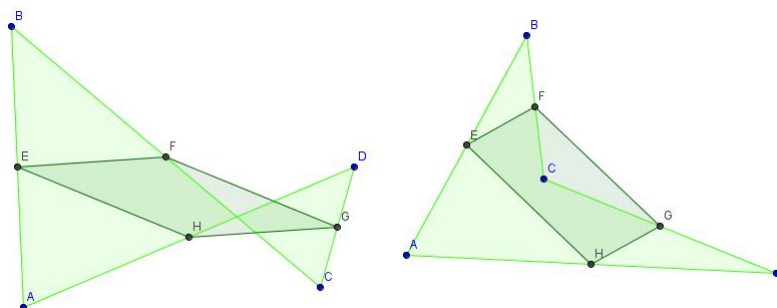


Figura 2.3: Exemplos do Teorema de Varignon em quadriláteros cruzados e não convexos

A demonstração do Teorema de Varignon para esses casos é análoga à do caso de um quadrilátero convexo. Na sequência é realizada a demonstração para o caso cruzado, no intuito de perceber a analogia.

Dado o quadrilátero cruzado $ABCD$, construímos o quadrilátero $EFGH$, sendo cada vértice o ponto médio dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , respectivamente. Desejamos provar que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo. Para começar, construiremos a diagonal AC , conforme a Figura 2.4:

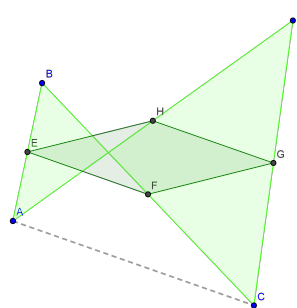


Figura 2.4: Construção da diagonal AC.

2.1. TEOREMA DE VARIGNON

7

Tomando o $\triangle ABC$, consideramos os pontos médios de \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente, E e F . Como $\overline{EB} \in \overline{AB}$ e $\overline{BF} \in \overline{BC}$, podemos concluir que $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$

Da mesma forma, tomando o $\triangle ADC$. Temos que G e H são pontos médios de \overline{CD} e \overline{AD} , respectivamente. Como $\overline{GD} \in \overline{CD}$ e $\overline{HD} \in \overline{AD}$, podemos concluir via Teorema da Base Média que $\overline{AC} \parallel \overline{GH}$

Sendo assim, se

$$\overline{AC} \parallel \overline{EF},$$

e

$$\overline{AC} \parallel \overline{GH},$$

então, por transitividade,

$$\overline{EF} \parallel \overline{GH}.$$

Da mesma forma, consideramos a diagonal BD , conforme ilustra a Figura 2.5.

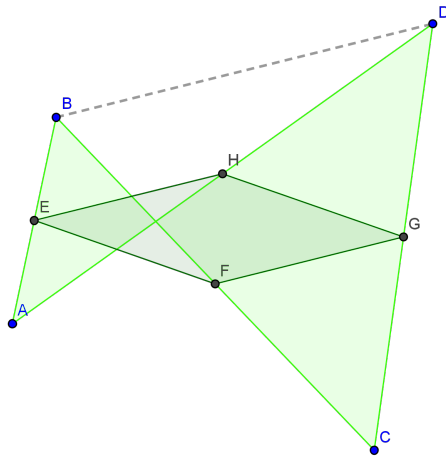


Figura 2.5: Construção da diagonal BD .

No $\triangle BCD$, temos que F e G são, respectivamente, pontos médios de \overline{BC} e \overline{CD} . Como $\overline{FC} \in \overline{BC}$ e $\overline{CG} \in \overline{CD}$, podemos concluir que $\overline{BD} \parallel \overline{FG}$

E considerando o $\triangle ABD$, temos que E e H são pontos médios de \overline{AB} e \overline{BD} , respectivamente. Como $\overline{AE} \in \overline{AB}$ e $\overline{AH} \in \overline{AD}$, podemos concluir que $\overline{BD} \parallel \overline{EH}$

Sendo assim, se

$$\overline{BD} \parallel \overline{FG},$$

e

$$\overline{BD} \parallel \overline{EH},$$

então, por transitividade,

$$\overline{FG} \parallel \overline{EH}.$$

Portanto, concluímos que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo.

2.1.2 Extensão do Teorema de Varignon para outros pontos.

Uma questão interessante a se investigar sobre o Teorema de Varignon é se o mesmo pode ser estendido para outros tipos de pontos tais como uma triseção, pentasecção, ou até uma n-ésima secção dos seus lados. Como podemos ver na Figura 2.6, é razoável dizer que uma triseção determina um paralelogramo, dependendo dos pontos escolhidos.

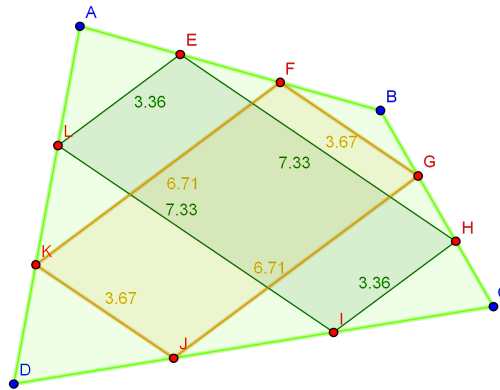


Figura 2.6: Paralelogramos determinados por uma triseção apropriada dos lados do quadrilátero.

A Figura 2.7 ilustra que, ao realizar uma pentasecção e unir pontos apropriados, também teremos como resultado um paralelogramo, dependendo dos pontos escolhidos.

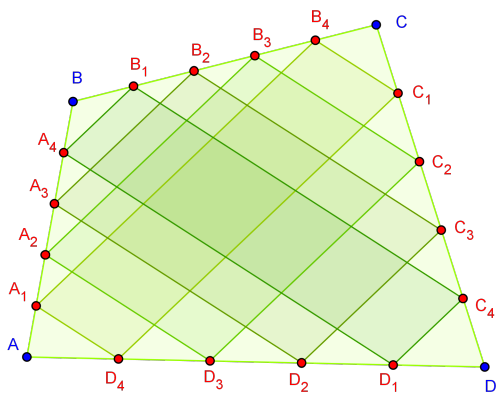


Figura 2.7: Paralelogramos determinados por uma penta,-secção apropriada dos lados do quadrilátero.

Para provar que os quadriláteros construídos nas Figuras 2.6 e 2.7 são paralelogramos, podemos utilizar o Teorema de Tales, cujos enunciado e demonstração podem ser encontrados em [2]. No que segue demonstraremos que realizando uma

pentasecção no quadrilátero $ABCD$, o quadrilátero $A_2B_3C_2D_3$ é um paralelogramo. A prova realizada tem como base a demonstração encontrada em [4].

Para isso, construímos a diagonal \overline{AC} e \overline{BD} , conforme a Figura 2.8.

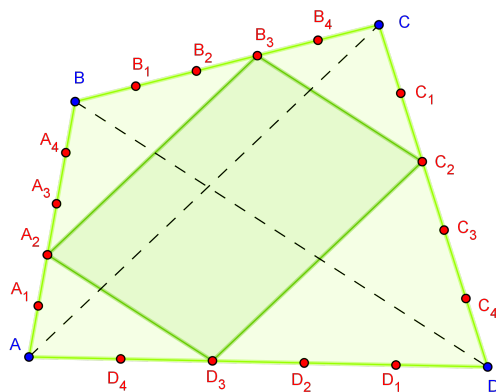


Figura 2.8: $A_2B_3C_2D_3$ é um paralelogramo.

Consideremos primeiramente o triângulo $\triangle BCD$. Assim, como os pontos escolhidos pertencem a uma pentasecção dos lados do triângulo, temos

$$\frac{CC_2}{C_2D} = \frac{2}{3} = \frac{CB_3}{B_3B}$$

podemos concluir pela recíproca do Teorema de Tales que $\overline{C_2B_3} \parallel \overline{DB}$. Considere agora $\triangle ABD$, a igualdade,

$$\frac{AA_2}{A_2B} = \frac{2}{3} = \frac{AD_3}{D_3D}$$

implica que $\overline{D_3C_2} \parallel \overline{A_2B_3}$. Portanto, o quadrilátero $A_2B_3C_2D_3$ é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos.

Observando as Figuras 2.6 e 2.7 podemos ser induzidos a uma generalização de um resultado envolvendo uma n -secção. Assim, consideramos $ABCD$ um quadrilátero qualquer onde cada lado é dividido em n segmentos congruentes. Os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ são as n -secções do lado \overline{AB} . Os pontos $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$ são as n -secções do lado \overline{BC} . Os pontos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$ são as n -secções do lado \overline{CD} . Os pontos $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{n-1}$ são as n -secções do lado \overline{DA} . O quadrilátero $A_iB_{n-i}C_iD_{n-i}$ é um paralelogramo, conforme sugere a Figura 2.9.

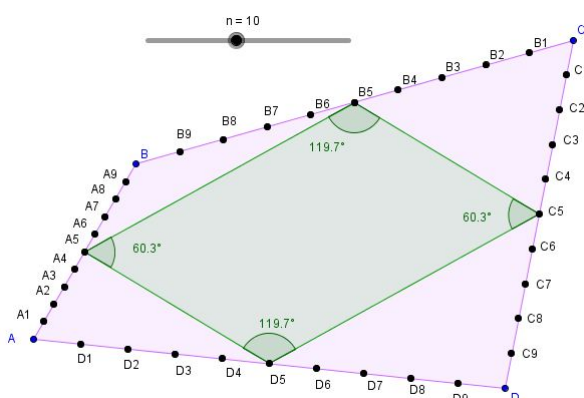


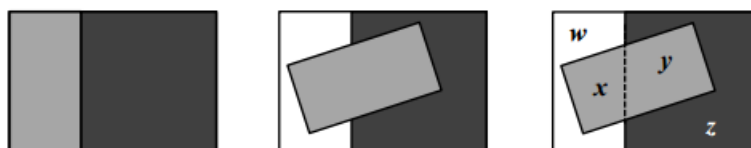
Figura 2.9: Construção da n -secção.

2.2 O Teorema dos Carpetes

Podemos associar ao teorema demonstrado por Pierre Varignon outro teorema que envolve áreas, semelhanças e congruências de figuras, denominado Teorema dos Carpetes. A Geometria Plana traz inúmeros conceitos sobre semelhanças e congruências de áreas de figuras, os quais nos ajudam na resolução de diversos problemas sobre o assunto. Esses resultados e conceitos podem auxiliar também em questões de competição ([6]), donde tiramos um exercício que indiretamente envolvia o Teorema dos Carpetes. A Figura 2.10 apresenta o problema em questão.

PROBLEMA 3

Um fato relativamente simples sobre áreas e que muitas vezes ajuda a resolver problemas complexos é o *Teorema dos carpetes*:



Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por carpetes.

Utilizando a notação dada pela figura, isto é, w é a região branca, z é a região cinza escuro, e a região cinza claro é composta pelas regiões x e y , sendo que a região y é a intersecção dos carpetes, prove o Teorema dos carpetes, ou seja, prove que $y = w$.

Figura 2.10: Exercício da Olimpíada Paulista de Matemática.

Fonte: [6]

Pensamos em como um aluno de 8º ou 9º ano, nível para o qual a questão apresentada foi proposta, poderia resolver o item "a" do problema. Acreditamos que o aluno pensaria da seguinte forma: Sejam x a área do tapete que não está na sobreposição, y a área do tapete sobreposta e w a área do dormitório que não está com o tapete, logo

$$y + x = A_{CC},$$

2.2. O TEOREMA DOS CARPETES

11

$$w + x = A_D,$$

onde A_{CC} é a área coberta pelo tapete cinza-claro e A_D é a área do dormitório que não possui o tapete cinza-escuro. Como o tapete cinza-claro estava, inicialmente, no espaço sem o tapete cinza-escuro, e, não há sobras no dormitório, segue que:

$$y + x = w + x,$$

e daí

$$y = w.$$

É interessante observar que é possível resolver o exercício utilizando um teorema conhecido como o Teorema dos Carpetes, que possui o seguinte enunciado:

"Suponha-se que o chão de uma sala retangular é coberto por uma coleção de tapetes, os quais não se sobrepõem. Se movimentarmos um dos tapetes, então, fica claro que a área da sobreposição será igual à área da sala que ficará descoberta." [1]

Para demonstrar o teorema, podemos considerar que os formatos da sala ou dos tapetes são irrelevantes, pois o que irá nos interessar principalmente é a parte sobreposta. Então vamos supor que a sala seja um quadrado, assim, sejam M e N os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{BC} de um quadrado $ABCD$. Tomemos $P = \overline{AN} \cap \overline{DM}$, $Q = \overline{AN} \cap \overline{CM}$ e $R = \overline{CM} \cap \overline{DN}$. Devemos provar a igualdade:

$$A(AMP) + A(BMQN) + A(CNR) = A(DPQR),$$

onde $A(AMP) + A(BMQN) + A(CNR)$ representa a área sem carpetes e $A(DPQR)$ representa a área da sobreposição. A Figura 2.11 ilustra a descrição acima realizada.

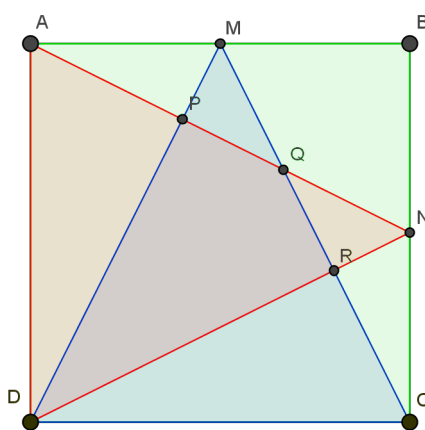


Figura 2.11: Base para trabalho do teorema.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que a área do quadrado seja igual a um. Mostraremos que a figura é simétrica em relação à BD . Para tanto, a Figura 2.12 nos auxiliará nesta visualização.

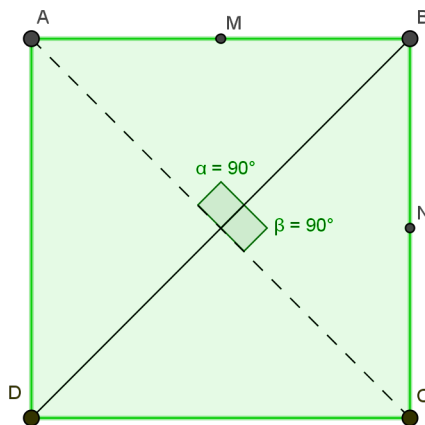


Figura 2.12: Simetria em relação à BD .

Temos que $\triangle ABO \cong \triangle BCO$, pois $AB \equiv BC$, OB é comum e $\widehat{BOA} = \widehat{BOC} = 90^\circ$. Os triângulos $\triangle ABO$ e $\triangle BOC$ são retângulos com a hipotenusa e um cateto congruentes, logo $AO \equiv OC$.

Na Figura 2.13, observamos que os triângulos $\triangle AQD$ e $\triangle NQB$ são semelhantes, pois os ângulos em \widehat{AQD} e \widehat{NQB} são congruentes (opostos pelo vértice), os ângulos \widehat{NBQ} e \widehat{ADQ} são congruentes entre si (ângulos alternos internos).

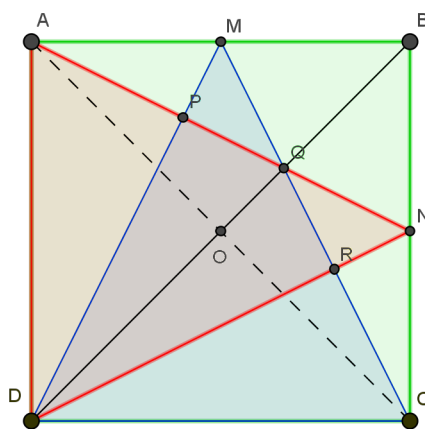


Figura 2.13: Semelhança de triângulos

2.2. O TEOREMA DOS CARPETES

13

Então, tendo $\overline{BN} = \frac{\overline{AD}}{2}$, ou ainda $\overline{AD} = 2\overline{BN}$, verificamos que:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BN}},$$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QN}} = \frac{2\overline{BN}}{\overline{BN}},$$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QN}} = 2,$$

$$\overline{AQ} = 2\overline{QN}.$$

Quanto ao lado \overline{AN} , verificamos que:

$$\overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AN}$$

$$\overline{QN} = \frac{1}{3}\overline{AN}$$

Temos que $A(\overline{ABN}) = \frac{1}{4}A(\overline{ABCD})$, pois a base \overline{AB} se mantém e $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, além disso, consideremos as bases \overline{AQ} e \overline{AN} dos triângulos $\triangle AQB$ e $\triangle ABN$ eles possuem a mesma altura $h = d(B, \overline{AN})$:

$$A(\overline{AQB}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}A(\overline{ABCD}) = \frac{1}{6}A(\overline{ABCD}),$$

$$A(\overline{BQN}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}A(\overline{ABCD}) = \frac{1}{12}A(\overline{ABCD}),$$

e, por congruência,

$$A(\overline{BQM}) = \frac{1}{12}A(\overline{ABCD}).$$

Consideremos $N' = \overrightarrow{AN} \cap \overrightarrow{DC}$, conforme apresenta a Figura 2.14.

Assim, os triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle N'DP$ também são semelhantes, pois os ângulos \widehat{MAP} e $\widehat{DN'P}$ são alternos internos, bem como $\widehat{PDN'}$ e \widehat{PMA} e os ângulos \widehat{APM} e $\widehat{DPN'}$ são opostos pelo vértice. Como $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, e $\overline{DN'} = 2\overline{CD}$, temos

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{DN'}},$$

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PD}} = \frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{2\overline{CD}},$$

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PD}} = \frac{1}{4}.$$

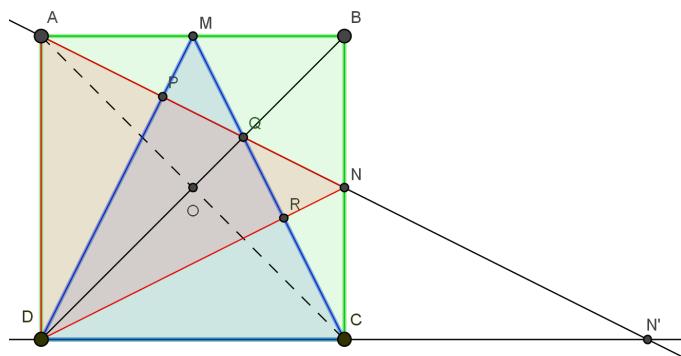


Figura 2.14: Prolongamento do segmento AN até a intersecção com DC .

Logo, $\overline{MD} = 5\overline{MP}$ Temos que $A(ADM) = \frac{1}{4}A(ABCD)$, pois a base \overline{AD} se mantém, mas $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Agora considerando no $\triangle AMP$ a base \overline{MP} e altura $h = d(A, \overline{MP})$ e no $\triangle ADM$ a base \overline{MD} e a altura $h = d(A, \overline{MP})$, temos

$$A(AMP) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} A(ABCD) = \frac{1}{20} A(ABCD),$$

Finalmente, mostra-se que,

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AN}} = \frac{4}{15}.$$

Mas, $A(AND) = \frac{1}{2}A(ABCD)$ e, assim,

$$A(PQD) = \frac{4}{15}A(AND) = \frac{2}{15}A(ABCD),$$

Ou seja,

$$A(AMP) + A(BMQ) = \frac{1}{12}A(ABCD) + \frac{1}{20}A(ABCD) = \frac{2}{15}A(ABCD).$$

2.2.1 Extensão do Teorema dos Carpetes para regiões triangulares.

Relacionados ao Teorema dos Carpetes, são encontrados outros problemas interessantes, conforme os propostos por [5]. No que segue, apresentaremos dois desses problemas e suas respectivas soluções. O primeiro problema apresentado pela autora é o que segue:

"Sejam \overline{AM} e \overline{BN} medianas do triângulo $\triangle ABC$ e D o baricentro. Prove que a área do triângulo $\triangle ABD$ é igual à área do quadrilátero $CMDN$ ". A Figura 2.15 ilustra tal situação.

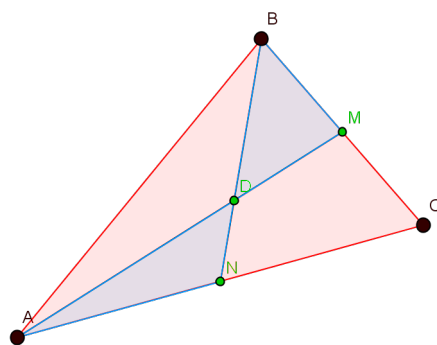


Figura 2.15: Problema proposto no triângulo.

Uma propriedade conhecida da mediana é a de que ela divide o triângulo em dois outros de mesma área. Notemos que, usando as propriedades acima citadas, podemos determinar a área de tais triângulos, conforme segue:

$$A(ABC) = A(ABN) + A(CBN)$$

$$A(ABN) = A(CBN) = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{2 \cdot b \cdot h}{2} = b \cdot h$$

Observando o mesmo resultado para a mediana \overline{AM} , podemos concluir que os triângulos $\triangle ABN$ e $\triangle ABM$ têm mesma área. Assim, o Teorema dos Carpetes garante-nos que a área do triângulo $\triangle ABD$, que fica na intersecção dos triângulos $\triangle ABN$ e $\triangle ABM$, é igual à área do quadrilátero $CMDN$.

2.2.2 Extensão do Teorema dos Carpetes para regiões circulares.

Outro problema proposto, que pode ser demonstrado utilizando o referido Teorema, trata de regiões circulares, cujo enunciado é o que segue: "Sabendo-se que os arcos da figura são arcos de circunferências, prove que as áreas S_1 e S_2 indicadas na figura, são iguais". A Figura 2.16 ilustra tal enunciado.

Juntas, as áreas dos semicírculos indicados por λ_1 e λ_2 equivalem à área do setor circular indicado por λ_3 . De fato, podemos observar na Figura 2.17 que as regiões circulares possuem o mesmo raio.

Temos que $S_{\lambda_3} = \frac{1}{4}\pi(2r)^2 = \pi r^2$ e $S_{\lambda_1} = S_{\lambda_2} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$. Então, o Teorema dos Carpetes garante que $S_1 = S_2$.

Deste modo, nota-se que um teorema a princípio proposto para quadriláteros, pode ser utilizado para outras figuras geométricas.

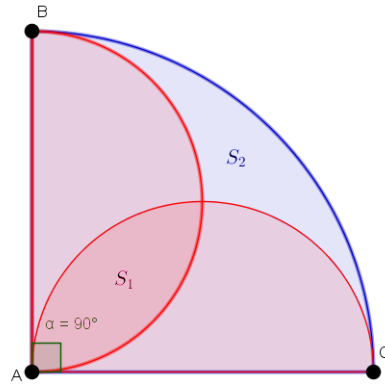


Figura 2.16: Problema proposto no arco de circunferência.

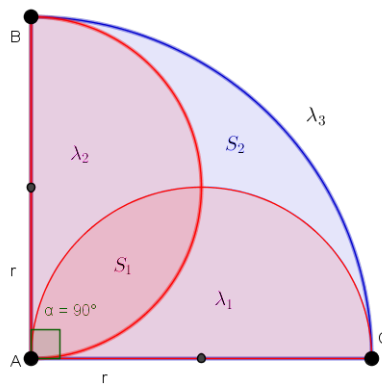


Figura 2.17: Separação das regiões indicadas.

Capítulo 3

O Uso do GeoGebra na Extensão dos Teoremas

3.1 Teorema de Varignon

O Teorema de Varignon é um bom exemplo de uma atividade que pode ser planejada em termos de Geometria Dinâmica, pelo fato de que é válido para qualquer quadrilátero e o dinamismo do aplicativo faz com que isso seja evidente. Todas as construções aqui apresentadas estão disponíveis em Silva (2015).

O GeoGebra possui uma ferramenta denominada *Relação* (Figura 3.1), a qual permite verificar relações matemáticas existentes entre dois elementos previamente selecionados.

Assim, construído um quadrilátero qualquer, os pontos médios de seus lados e o quadrilátero definido por esses pontos, o aplicativo permite verificar se de fato esse quadrilátero possui as propriedades que o garantem ser um paralelogramo.

No que segue, apresentaremos o processo de construção do quadrilátero qualquer e dos elementos que permitem verificar a validade do Teorema de Varignon.

Com a ferramenta polígono, construímos um quadrilátero qualquer (Figura 3.2).

18CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

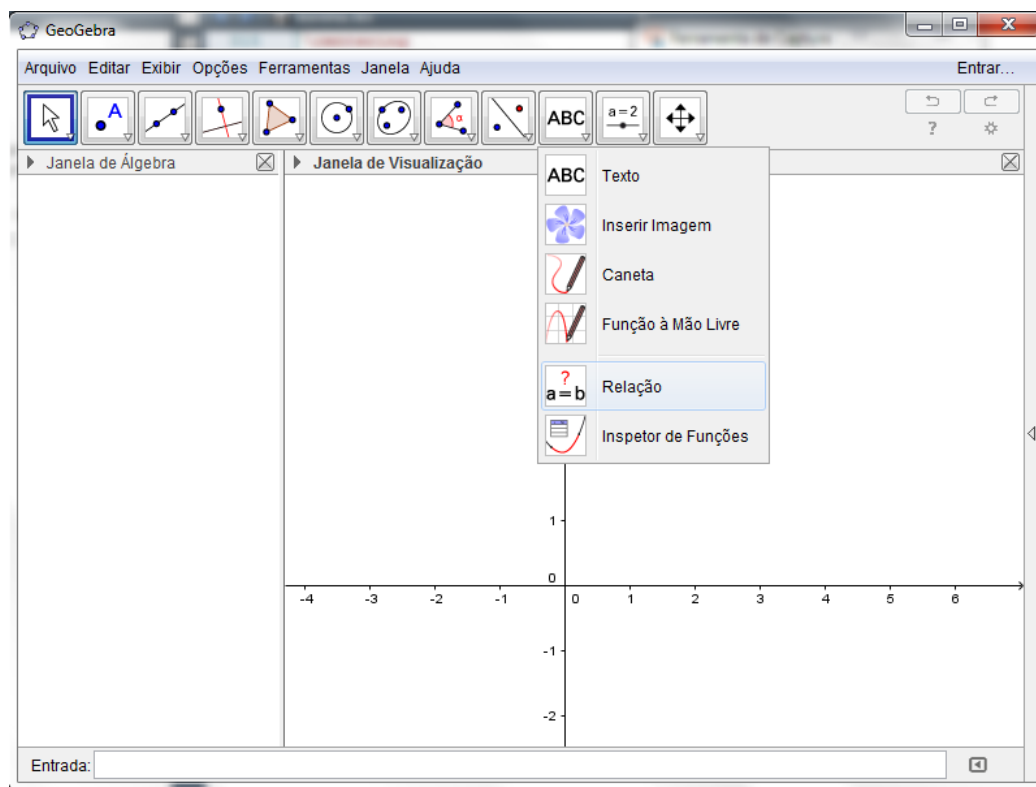


Figura 3.1: Ferramenta "Relação" no software GeoGebra

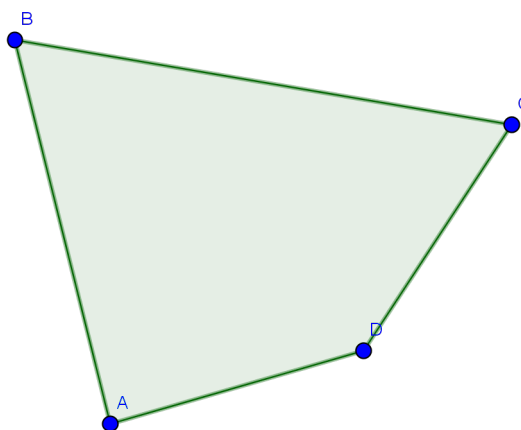


Figura 3.2: Construção do quadrilátero $ABCD$

Com a ferramenta *Ponto Médio*, construímos o ponto médio de cada lado do quadrilátero (Figura 3.3).

A partir da ferramenta *Polígono*, construímos o polígono formado pelos pontos

3.1. TEOREMA DE VARIGNON

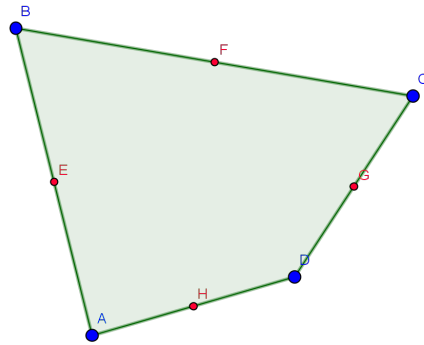


Figura 3.3: Construção dos pontos médios dos lados

médios dos lados (Figura 3.4).

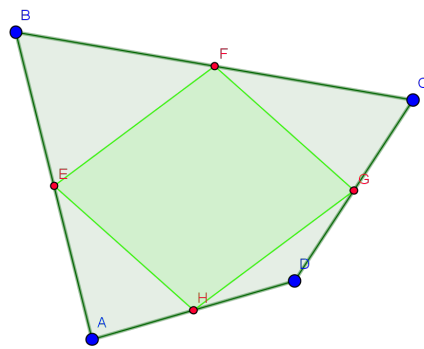


Figura 3.4: Construção do quadrilátero formado pelos pontos médios

20CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

Para concluir que o segundo quadrilátero é um paralelogramo, podemos utilizar a ferramenta *Relação* e clicando nos lados não adjacentes, conforme a Figura 3.5.

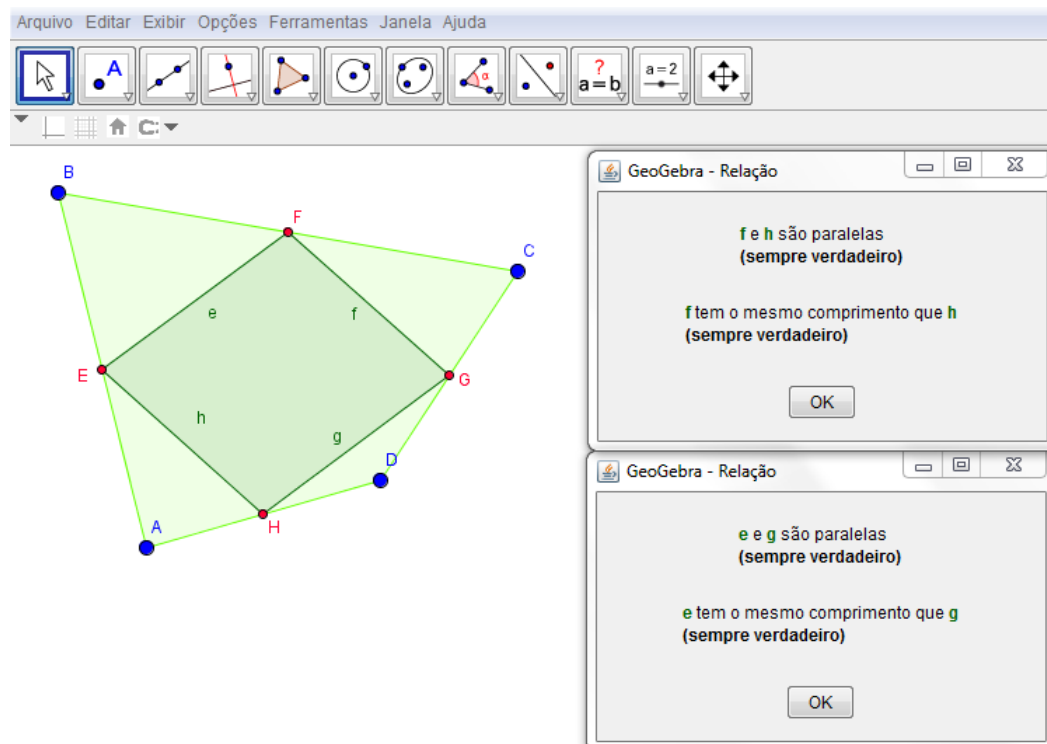


Figura 3.5: Conclusão utilizando a ferramenta *Relação*

É interessante o uso do GeoGebra para descobrir que os pontos médios formarão sempre um paralelogramo. Outra forma de se observar que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo é trabalhar com os seus ângulos consecutivos. Assim, tendo os ângulos consecutivos suplementares (Figura 3.6), implica que os segmentos opostos são paralelos. Assim, $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ e $\overline{HE} \parallel \overline{FG}$, o que implica $EFGH$ ser um paralelogramo.

3.1. TEOREMA DE VARIGNON

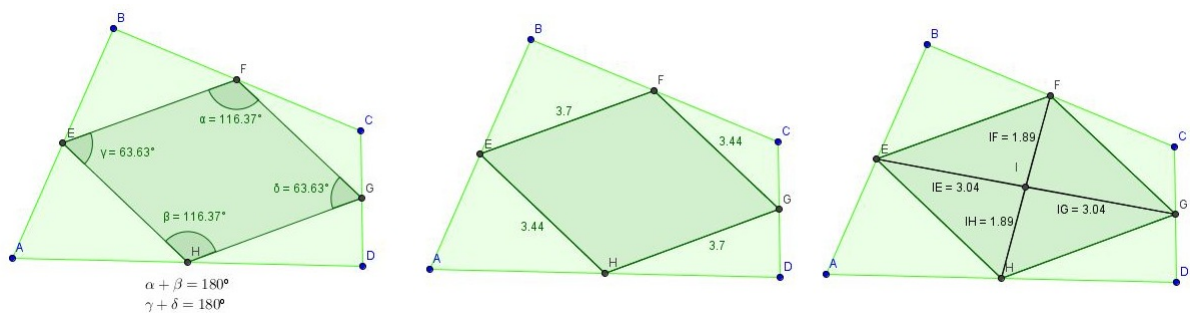


Figura 3.6: Algumas estratégias utilizadas para verificar que $EFGH$ é um paralelogramo, usando o GeoGebra

3.1.1 Generalização do Teorema de Varignon

Para verificar que a relação determinada pelos pontos médios do quadrilátero valem para outros pontos, como os da triseção, pentasecção e n -secção, foi realizada uma construção, onde houve a necessidade de trabalharmos com outros elementos de Geometria e alguns outros conceitos, como sequências, distâncias e divisão de segmentos (no âmbito da Geometria Analítica). Em nossa pesquisa realizada na internet, principalmente em repositórios de *applets*, por exemplo, **geogebra.org**, não encontramos nenhuma construção do Teorema de Varignon utilizando esses elementos, assim optamos por indicá-los. Desta forma, no que segue, descrevemos os procedimentos de construção adotados.

Começaremos com a construção da triseção dos lados de um quadrilátero. Com a ferramenta polígono, construímos um quadrilátero qualquer (Figura 3.7).

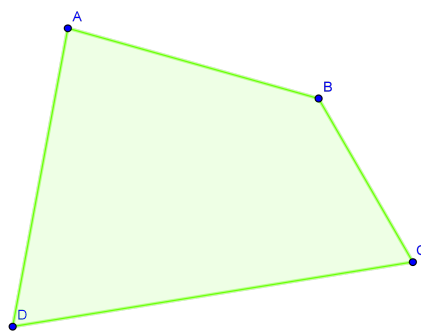


Figura 3.7: Construção de um quadrilátero qualquer

Para dividir o lado AB em três segmentos congruentes, utilizamos a reta suporte AD e marcamos um ponto M qualquer, conforme a Figura 3.8.

Para encontrar um ponto N na reta AD tal que $\overline{AM} = \overline{MN}$, utilizamos a ferramenta *Compasso* com centro em M e raio AM , conforme ilustra a Figura 3.9.

Repetimos o procedimento para encontrar o ponto O , porém tomamos como

22CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

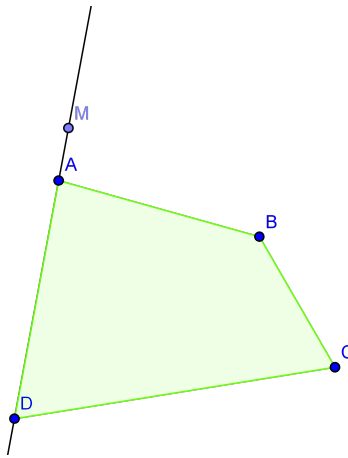


Figura 3.8: Construção do ponto M na reta AD

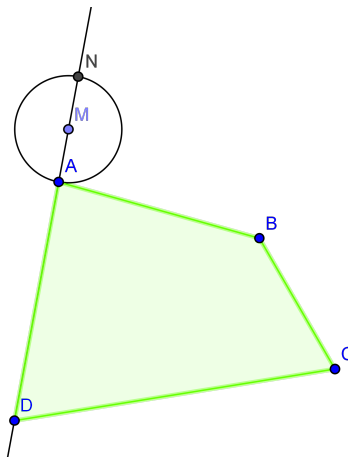


Figura 3.9: Construção do ponto N na reta AD

centro o ponto N e como raio o segmento NM (Figura 3.10).

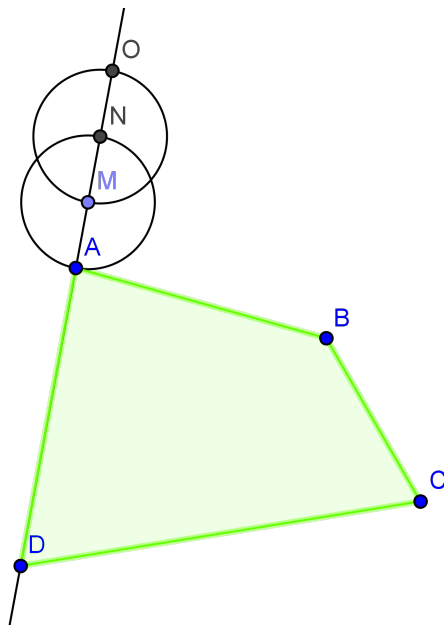


Figura 3.10: Ponto O na reta AD

Para determinar a divisão do segmento AB em 3 partes congruentes, traçamos o segmento BO . Com a ferramenta *Reta Paralela*, traçamos duas paralelas, uma passando por N e outra passando por M . Os pontos E e F serão a intersecção com o segmento AB (Figura 3.11).

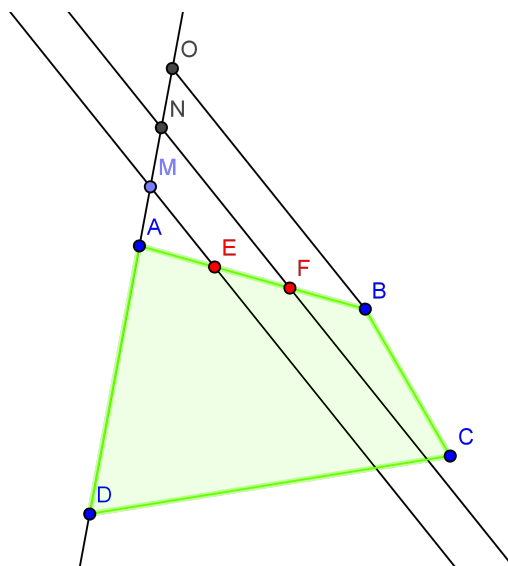


Figura 3.11: Pontos E e F dividindo o segmento AB

24CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

Analogamente, o mesmo procedimento foi realizado para os demais lados do quadrilátero. Utilizando a reta suporte AB encontramos os pontos G e H em BC . Com a reta suporte BC foram encontrados os pontos I e J em CD . A partir da reta suporte CD foram determinados os pontos K e L em DA , conforme ilustra a Figura 3.12.

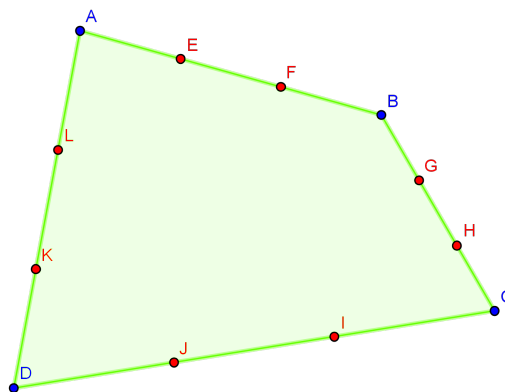


Figura 3.12: Trisecção dos lados do quadrilátero $ABCD$

A partir da ferramenta *Polígono*, foram feitos os quadriláteros $EHIL$ e $FGJK$. A conclusão que são paralelogramos pode ser observada, novamente, através da ferramenta *Relação* (Figura 3.13).

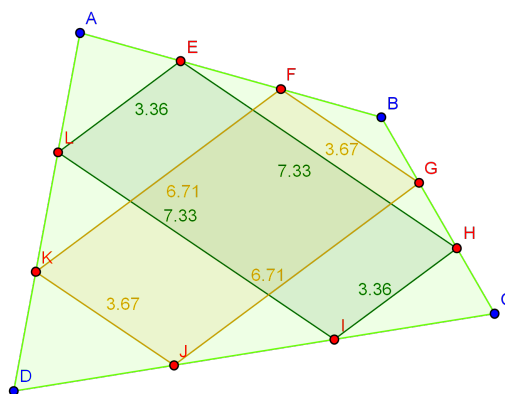


Figura 3.13: Acabamento da trisecção do Teorema de Varignon

No que segue, observamos que para dividir o lado do quadrilátero em 5 segmentos congruentes, foram realizados os mesmos procedimentos feitos para a triseção, conforme a Figura 3.14.

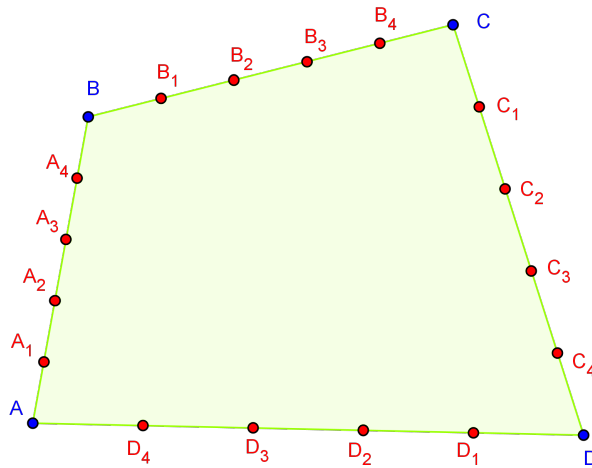


Figura 3.14: Divisão de cada lado em 5 segmentos congruentes

Feitas as partições, utilizamos a ferramenta *Polígono*, para determinar os quadriláteros seguindo a condição na qual os pontos escolhidos podem ser $A_1B_4C_1D_4$, ou $A_2B_3C_2D_3$, de maneira genérica, podemos representar por $A_iB_{5-i}C_iD_{5-i}$ com $1 \leq i \leq 4$, já que os lados estão divididos em 5 partes (Figura 3.15)

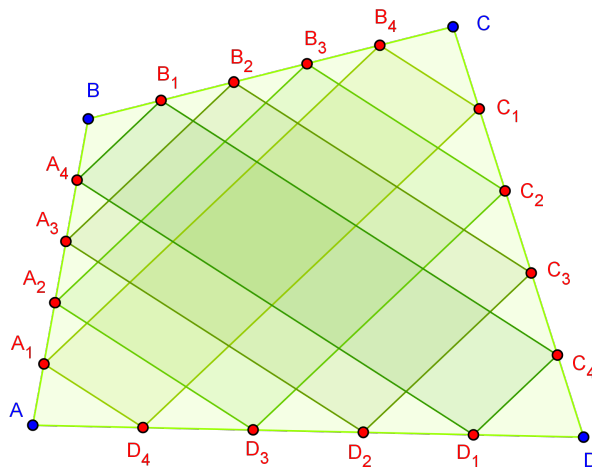


Figura 3.15: Quadriláteros formados seguindo $A_iB_{5-i}C_iD_{5-i}$

3.1.2 Extensão do Teorema de Varignon

Para iniciar a construção das n -secções dos lados do quadrilátero, foi criado, com a ferramenta *Controle Deslizante*, um controle que nos indicará o número de partições de cada lado, que tem início em 2 e fim em 20 com incremento 1 (os valores podem variar, desde que se mantenham no conjunto dos naturais). A partir da ferramenta *Polígono*, construímos um quadrilátero qualquer $ABCD$ (Figura 3.16).

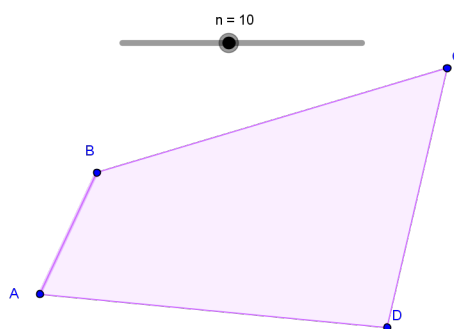


Figura 3.16: Construção do quadrilátero $ABCD$

Na sequência, construímos um ponto E fora do quadrilátero $ABCD$, para utilizá-lo como referência na construção de retas paralelas aos lados. Assim, com o auxílio da ferramenta *Reta Paralela*, construímos uma reta paralela ao lado AB passando por E e marcamos um ponto G nesta reta, conforme Figura 3.17.

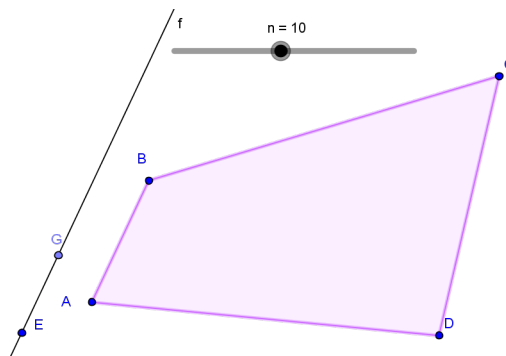


Figura 3.17: Reta paralela ao lado AB passando por E e ponto $G \in AB$

Sobre a reta EG , determinamos um vetor unitário \vec{u} , com mesma direção da reta EG e sentido conforme indica a Figura 3.18. Esse vetor será necessário para determinar as n -secções do lado do quadrilátero.

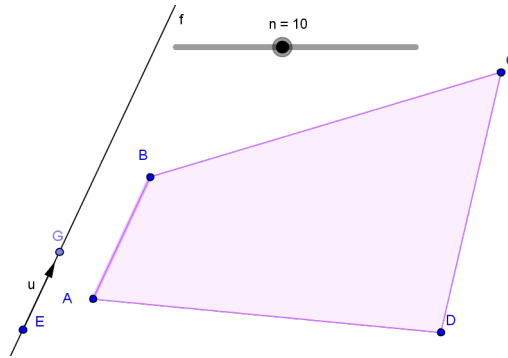


Figura 3.18: Vetor unitário de EG

Utilizando sequências, translações e o controle deslizante n , construímos uma lista de pontos no segmento AB , com o seguinte comando `Sequência[Transladar[<Objeto>, Vetor[<Ponto Inicial>, <Ponto Final>]], <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]` onde n é o valor final, conforme a Figura 3.19.

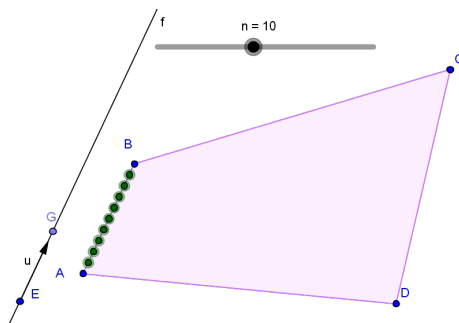


Figura 3.19: Construção da sequência de pontos em AB

De forma análoga, criamos listas de pontos nos demais lados do quadrilátero, conforme a Figura 3.20.

Para determinar os paralelogramos, escolhemos um ponto P sobre qualquer uma das listas (Figura 3.21).

Foi construída uma planilha no intuito de identificar os elementos das sequências onde temos indicadas uma coluna, sendo os valores possíveis para n e os pontos referentes aos lados por meio do comando `Elemento[<Lista>, <Posição do Elemento>]`, conforme ilustra a Figura 3.22.

28CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

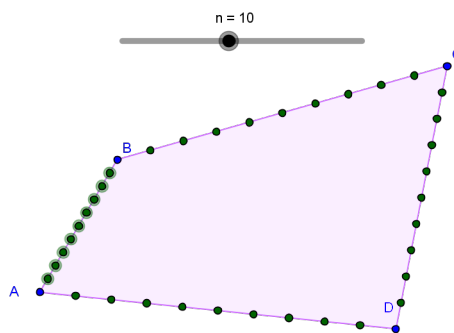


Figura 3.20: Construção das seqüências de pontos nos lados BC , CD e DA

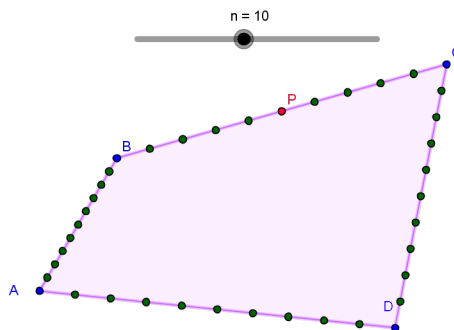


Figura 3.21: Construção do ponto P em alguma lista

Com auxílio da ferramenta *Condicional*, $Se[P=B_n, Polígono[B_n, C_n, D_n, E_n]]$, construímos os quadriláteros da forma $A_n B_n C_n D_n$. Veja a Figura 3.23.

Observamos que o ponto P pode percorrer qualquer elemento da lista na qual foi inserido e que o quadrilátero construído será sempre um paralelogramo (Figura 3.24). Esse fato pode ser percebido utilizando a ferramenta *Relação*.

3.2. TEOREMA DOS CARPETES

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	(10.02, -...	(10.21, -...	(5.1, -6.81)	(4.91, -6...	?	?	?	?	?
2	2	(9.81, -3...	(10.17, -...	(5.33, -6...	(4.96, -6...	?	?	?	?	?
3	3	(9.59, -3...	(10.14, -...	(5.57, -6...	(5.01, -6...	?	?	?	?	?
4	4	(9.37, -4...	(10.1, -4...	(5.8, -6.88)	(5.06, -6...	3.68	60.3°	119.7°	60.3°	119.7°
5	5	(9.15, -4...	(10.07, -...	(6.04, -6.9)	(5.12, -6...	?	?	?	?	?
6	6	(8.93, -4...	(10.04, -...	(6.27, -6...	(5.17, -6...	?	?	?	?	?
7	7	(8.72, -4...	(10, -5.01)	(6.51, -6...	(5.22, -6...	?	?	?	?	?
8	8	(8.5, -4.29)	(9.97, -5...	(6.74, -6...	(5.27, -6...	?	?	?	?	?
9	9	(8.28, -4...	(9.93, -5...	(6.98, -7)	(5.32, -5...	?	?	?	?	?
10	10	(8.06, -4...	(9.9, -5.53)	(7.21, -7...	(5.37, -5...	?	?	?	?	?
11	11	(7.84, -4...	(9.87, -5...	(7.45, -7...	(5.42, -5...	?	?	?	?	?
12	12	(7.63, -4...	(9.83, -5...	(7.68, -7...	(5.47, -5...	?	?	?	?	?
13	13	(7.41, -4.6)	(9.8, -6.05)	(7.91, -7.1)	(5.53, -5...	?	?	?	?	?
14	14	(7.19, -4...	(9.76, -6...	(8.15, -7...	(5.58, -5...	?	?	?	?	?
15	15	(6.97, -4...	(9.73, -6.4)	(8.38, -7...	(5.63, -5...	?	?	?	?	?
16	16	(6.75, -4...	(9.7, -6.57)	(8.62, -7...	(5.68, -5...	?	?	?	?	?
17	17	(6.54, -4...	(9.66, -6...	(8.85, -7.2)	(5.73, -5.3)	?	?	?	?	?
18	18	(6.32, -4...	(9.63, -6...	(9.09, -7...	(5.78, -5...	?	?	?	?	?
19	19	(6.1, -4.97)	(9.59, -7...	(9.32, -7...	(5.83, -5...	?	?	?	?	?
20		(?, ?)								

Figura 3.22: Construção da planilha

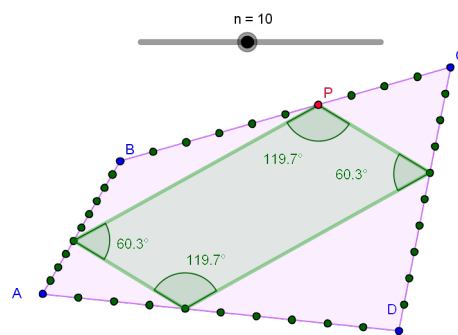


Figura 3.23: Construção dos quadriláteros

3.2 Teorema dos Carpetes

Para a construção da figura que ilustra o Teorema dos Carpetes, começamos determinando um quadrado (Figura 3.25).

30CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

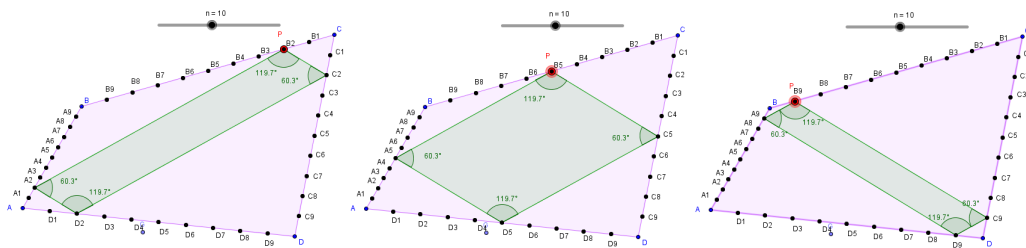


Figura 3.24: Verificação de três casos da n -secção

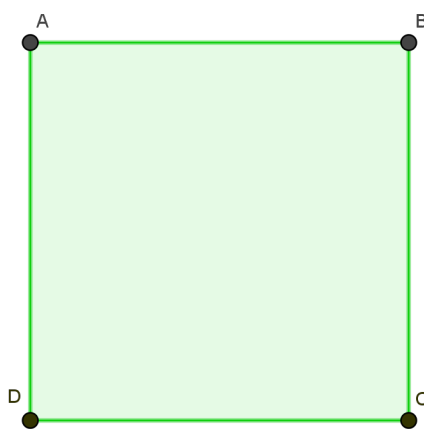


Figura 3.25: Construção do quadrado $ABCD$

Com a ferramenta *Ponto Médio*, marcamos os pontos médios de dois lados adjacentes (Figura 3.26).

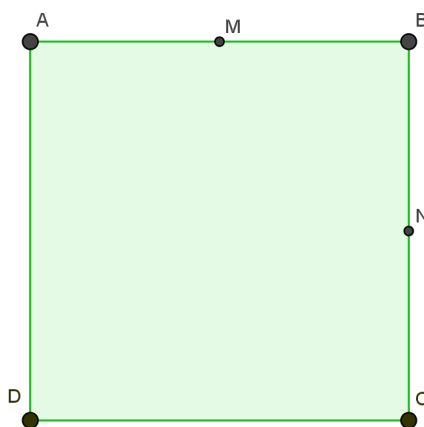


Figura 3.26: Construção dos pontos médios de dois lados

3.2. TEOREMA DOS CARPETES

A partir da ferramenta *Polígono*, marcamos dois triângulos formados pelos pontos médios criados e seus respectivos lados opostos (Figura 3.27).

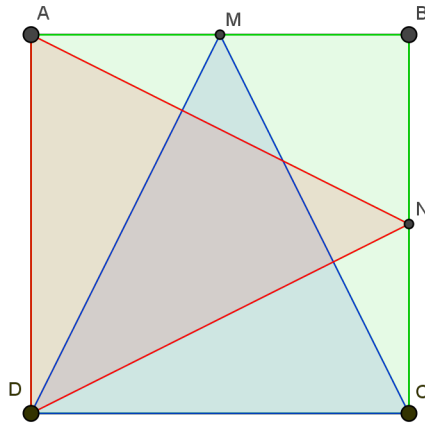


Figura 3.27: Construção dos triângulos

32CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

Com o auxílio da ferramenta *Intersecção de Dois Objetos*, marcamos os pontos em comum dos dois triângulos e realizamos a medida das áreas (Figura 3.28).

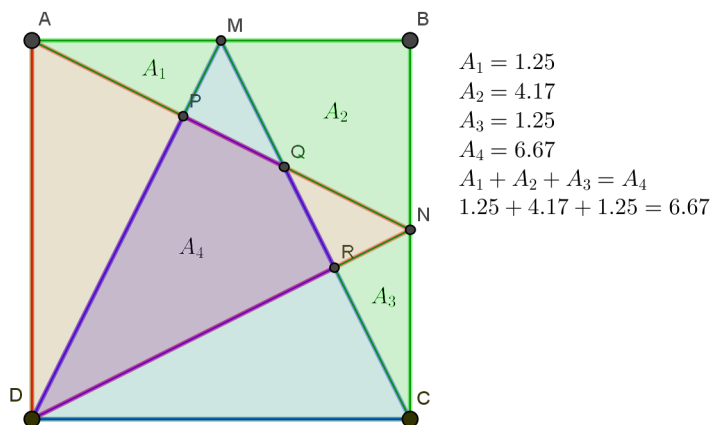


Figura 3.28: Construção das intersecções dos triângulos e verificação das áreas

Para estender o Teorema dos Carpetes para um retângulo e um triângulo, a construção é análoga à anterior, modificando apenas a figura base.

3.2.1 Extensão do Teorema dos Carpetes para regiões triangulares.

A ideia do segundo exercício proposto por Nunes (2015) era expandir o Teorema dos Carpetes para circunferências. Entretanto, para calcularmos a área, iremos aproximar as regiões por polígonos utilizando os recursos *Spline*, *Sequências* e *Polígono*, visto que o GeoGebra não calcula a área de regiões circulares (a não ser a limitada por uma circunferência). Iniciamos a construção com uma reta qualquer passando por AB e, com a ferramenta *Reta Perpendicular*, traçamos a perpendicular à AB passando pelo ponto A , conforme Figura 3.29.

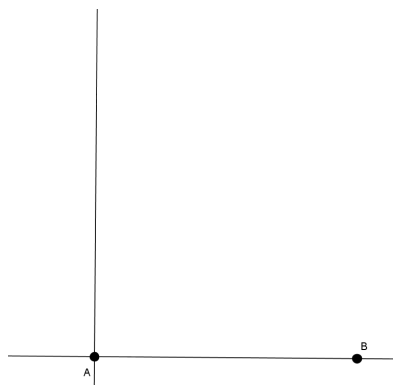


Figura 3.29: Construção da reta AB e sua perpendicular

Com auxílio da ferramenta *Compasso*, traçamos uma circunferência com centro em A e raio AB encontrando o ponto C , que será a intersecção da circunferência com a reta perpendicular anteriormente construída. (Figura 3.30).

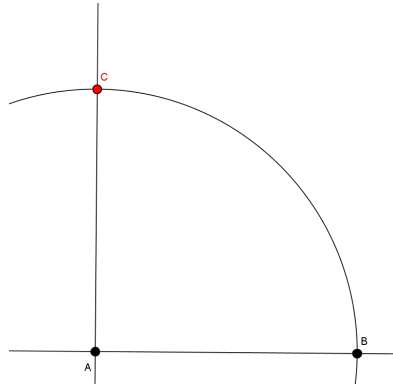


Figura 3.30: Construção da circunferência e ponto C

A partir da ferramenta *Setor Circular*, construímos um setor com os pontos A , B e C (Figura 3.31).

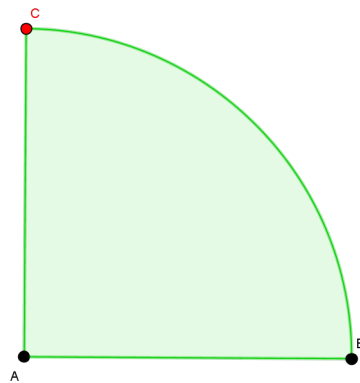


Figura 3.31: Construção do setor de circunferência ABC

Utilizamos a ferramenta *Ponto Médio* para determinarmos os pontos médio dos lados AB e AC . Em seguida, foram construídos os setores circulares DBA e EAC e, com o auxílio da ferramenta *Intersecção de Dois Objetos*, foi construído o ponto de intersecção destes dois setores, conforme ilustra a Figura 3.32.

34CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

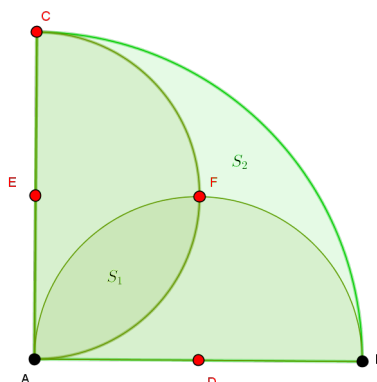


Figura 3.32: Construção dos pontos médios e dos setores de circunferência

Agora queremos verificar se a área que está na intersecção das duas semi-circunferências (S_1) e a área que está por fora (S_2) são iguais. Podemos aproximar a curva utilizando o recurso *Spline*. Para isso, foram determinados 20 pontos pertencentes às curvas que formam a intersecção e 60 pontos pertencentes às curvas de fora, conforme Figura 3.33.

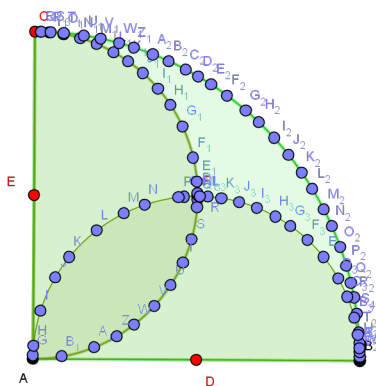


Figura 3.33: Construção dos pontos que servirão para a determinação das *splines*

Neste momento, foram determinadas duas curvas, conforme ilustra a Figura 3.34. A primeira com os pontos que formam a intersecção $spline[L_1]$ e a segunda com os pontos que formam a figura de fora $spline[L_2]$, onde L_1 e L_2 são listas de pontos.

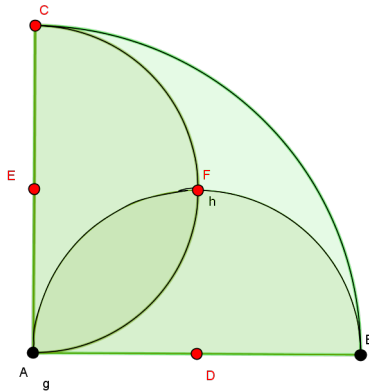


Figura 3.34: Construção das *splines*

Com a ferramenta *Controle Deslizante*, foi construído um controle n , variando de 2 a 100 com incremento 1, que servirá para nos indicar a quantidade de pontos pertencentes ao polígono que fará a aproximação das curvas das *splines*. Uma lista de pontos foi criada com o recurso *Sequências* para cada uma das *splines* da seguinte forma $Sequência[[Spline](i), i, 0, 0.999, 1/n]$ (Figura 3.35).

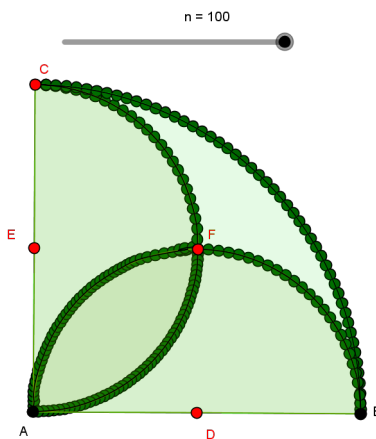


Figura 3.35: Controle deslizante e lista de pontos nas *splines*

36CAPÍTULO 3. O USO DO GEOGEBRA NA EXTENSÃO DOS TEOREMAS

Com auxílio da ferramenta *Polígono[Lista]*, foram construídos os polígonos a partir das listas determinadas pelas sequências relacionadas às *splines*. A Figura 3.36 ilustra que, quanto maior for o número de pontos n , melhor será a aproximação das áreas.

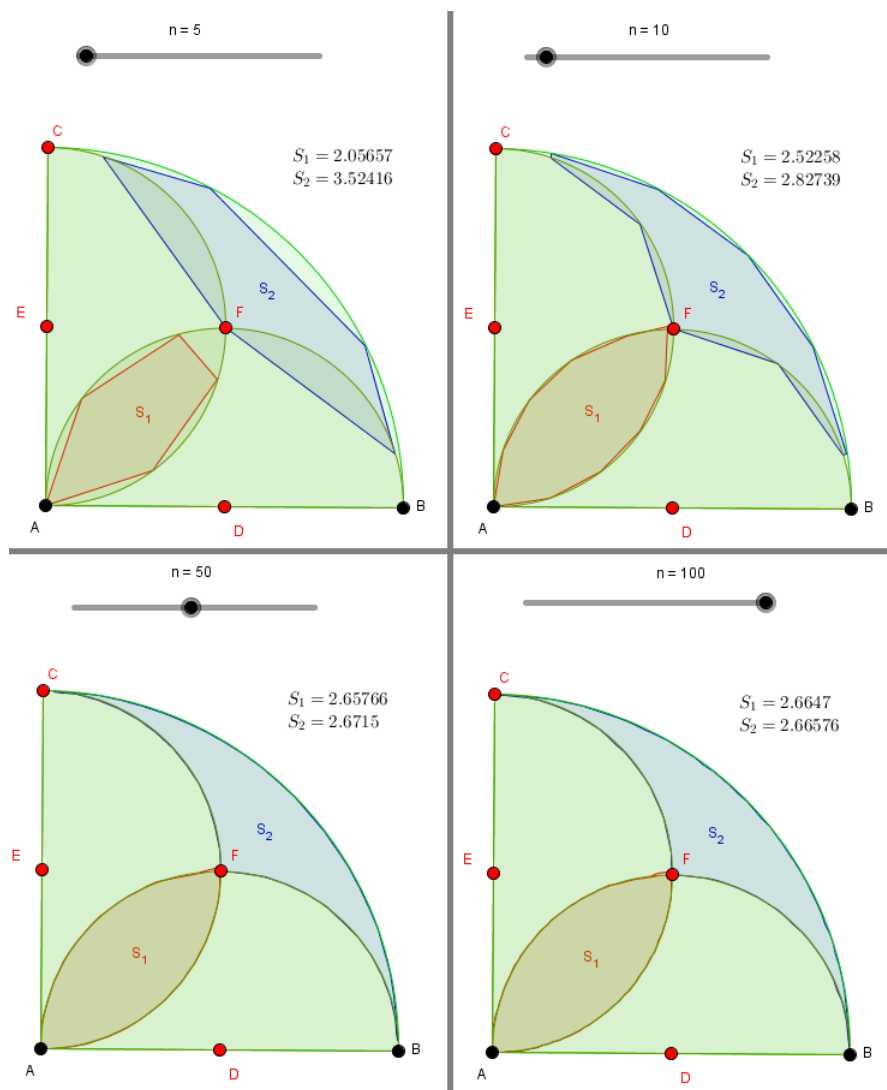


Figura 3.36: Verificação da aproximação de algumas áreas

Ressaltamos que S_1 e S_2 apresentados nas figuras são os valores aproximados das áreas.

Todas as construções realizadas estão disponíveis em [7]

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRESCU, T. *Mathematical Olympiad Treasure*. Springer, New York, 2010.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [3] BARTON, B. *The Klein Project: An IMU/ICMI Collaboration: A Short Description*. MSOR Connections, Vol. 8 (4), pp. 16-17, 2008.
- [4] CONTRERAS, J. N. "Investigating Variations of Varignons Theorem Using GeoGebra". *GeoGebra International Journal of Romania*, Vol3. 2014.
- [5] NUNES, A.L.T. "O Teorema dos Carpetes". *Revista do Professor de Matemática*, 86, pp. 1-6. SBM. Rio de Janeiro. 2014.
- [6] OPM. *Prova da XXXVII Olimpíada Paulista de Matemática*. 2015.
- [7] SILVA, J. A. *Site das Construções*. 2015. Disponível em <http://tube.geogebra.org/user/profile/id/2747187>. Acesso: novembro de 2017.

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercícios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios* - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. P. Novaes
- *Manual de Redação Matemática* - D. C. de Morais Filho
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. Pires Novaes

(continuação dos títulos publicados)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade

(continuação dos títulos publicados)

- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering
- *Topologia e Análise no Espaço R^n* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua
- *Cálculo Avançado* - R. Cipelatti
- *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e superfícies* - A. LyMBERopoulos e I. Terek Couto

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Menegutte
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M. Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo
- *Topologia das Variedades* - W. de Melo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

COLEÇÃO COLETÂNEAS DE MATEMÁTICA

- *Teorema Vivo* - C. Villani

