COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO SUL

IV Colóquio de Matemática
da Região Sul

BELOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

INDUÇÃO E CONTAGEM

ROGÉRIO STEFFENON
FELIPE GUARNIERI

FURG

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Belos problemas de matemática: indução e contagem

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

ISBN (eBook) 978-85-8337-099-4

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES

REGIÃO SUL

IV Colóquio de Matemática
da Região Sul

BELOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

INDUÇÃO E CONTAGEM

ROGÉRIO STEFFENON
FELIPE GUARNIERI

1ª EDIÇÃO
2016
RIO GRANDE

FURG

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Para Carla, Guilherme e Jaqueline.

Sumário

Prefácio

O IV Colóquio de Matemática da Região Sul é promovido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ocorre de 02 a 06 de maio de 2016 na Universidade Federal do Rio Grande. A ideia dos colóquios regionais da SBM é apresentar para participantes, alunos de graduação e de pós-graduação, minicursos e palestras que propiciem uma formação mais ampla nas diversas áreas da Matemática.

O começo de tudo foi no minicurso apresentado na III Bienal da SBM no ano de 2006 em Goiânia, intitulado *Uma Grosa de Problemas de Matemática*, em parceria com Ricardo Misturini. De lá para cá vários minicursos semelhantes foram apresentados nas diversas bienais.

Nesse minicurso, com três encontros de noventa minutos, apresentaremos alguns belos problemas de Matemática que acreditamos que qualquer aluno formado em Matemática deveria conhecer. Na primeira aula abordaremos problemas envolvendo indução matemática; na segunda alguns aspectos da contagem, assim como as estratégias de demonstração combinatória e contagem dupla; a terceira aula será dedicada a belos problemas relacionados com o princípio das gavetas de Dirichlet.

A ideia é apresentar brevemente os conceitos e propor aos leitores uma grande variedade de exercícios, alguns deles originários de competições matemáticas, que estão praticamente todos resolvidos no final do livro. Mesmo assim é importante tentar resolvê-los antes de espiar a solução, pois como dizia George Pólya “Não se pode fazer Matemática sem sujar as mãos”.

O assunto do primeiro capítulo é a indução matemática, que pode ser usada para provar resultados envolvendo os números naturais. Apresentamos aspectos básicos da indução, algumas desigualdades importantes, as Torres de Hanói, o Teorema Fundamental da Aritmética, a Sequência de Fibonacci, o Problema de Josephus, as Pesagens de Moedas, as Frações Egípcias, os Jogos de Subtração com Palitos e o Teorema de Pick. Para quem tiver mais interesse no tema, sugerimos [9] que é totalmente dedicado à indução, [14] que traz cerca de uma centena de exercícios resolvidos e o excelente livro que todos deveriam ter em casa [23].

No segundo capítulo abordamos os aspectos básicos da contagem, como princípios aditivo e multiplicativo, permutações simples, com repetição e circulares, combinações simples e completas. Um outro tópico muito interessante é a parte de demonstração combinatória e contagem dupla. Para aqueles que desejam se aprofundar mais no assunto sugiro os livros [13], [18], [23] e [24], assim como o texto [26] que trata de contagens duplas.

O terceiro capítulo é dedicado a um dos tópicos mais fascinantes da Matemática: o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Apesar de muito simples de enunciar e entender, a partir dele podemos resolver uma variedade muito grande de problemas de diversas áreas da Matemática. São cerca de cinquenta belos problemas que podem ser resolvidos usando essa técnica de demonstração de existência. Para o leitor que queira saber mais sobre o assunto sugerimos os livros [18], [23] e [24], assim como os ótimos textos [5] e [25].

Esperamos que gostem do texto e aceitamos sugestões, assim como críticas e indicações de erros (matemáticos e de escrita), que podem ser encaminhadas para o email steffenonenator@gmail.com ou felipemilg@gmail.com

SIGLAS TEXTO

IMC – International Mathematics Competition for University Students – http://imc-math.org
IMO – International Mathematical Olympiad – http://www.imo-official.org
OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática – http://www.obm.org.br/opencms/
Profmat – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - http://www.profmat-sbm.org.br
Putnam – William Lowell Putnam Mathematical Competition – http://kskedlaya.org/putnam-archive/

São Leopoldo, 17 de março de 2016.

Agradecimentos

Agradecemos aos organizadores do IV Colóquio de Matemática da Região Sul pela oportunidade de apresentar esse minicurso. Cabe também mencionar a valiosa contribuição de Thomás Jung Spier e Valentino Amadeus Sichinel, que sugeriram problemas e algumas soluções.

> *“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."*
>
> – Carl Friedrich Gauss

Capítulo 1

Princípio de Indução Matemática

"Deus criou os números naturais, todo o resto é trabalho do Homem."
– Leopold Kronecker

Neste capítulo veremos alguns exemplos e exercícios de uma técnica de demonstração muito utilizada na matemática para provar resultados referentes a números naturais, a indução matemática. Entendemos que muitos dos temas abordados podem ser usados na escola básica, pois com acreditamos que o raciocínio indutivo é muito importante na formação dos alunos. Outros tópicos são um pouco mais sofisticados e devem ser conhecidos por qualquer aluno que faça graduação em Matemática ou mesmo em outras áreas das Ciências Exatas.

1.1 Indução – Primeiros Passos

1.1.1 Conceitos Básicos e Exemplos

Se uma propriedade envolvendo números naturais vale para 1, 2, 3,..., 1000, então vale sempre?

Como podemos ter certeza da validade de uma certa propriedade para todos os números naturais?

Você já deve ter visto exibições em que milhares de peças de dominó são colocadas em sequência e que a queda da primeira peça implica na queda das demais, sucessivamente. Muitas vezes as peças têm cores diferentes e vão se formando desenhos. O princípio de indução matemática se assemelha com isso, pois tem como foco provar que determinado resultado vale para todos os números naturais ou para todos os naturais a partir de um certo n_0 dado.

A matemática se diferencia de outras ciências, pois para provarmos que um resultado vale num conjunto infinito precisamos ter certeza de que isso foi testado ou provado para todos os elementos desse conjunto.

A definição concisa e precisa do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais foi dada pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) no ano de 1889 na *Arithmetices principia nova methodo exposita*. $\mathbb{N}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados

números naturais e a essência de sua caracterização está na palavra **sucessor**. Os Axiomas de Peano são:

1) Todo número natural tem um único sucessor, que é ainda um número natural.

2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

3) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

4) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Essas afirmações podem ser escritas de outra maneira:

1') Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se sucessor de n.

2') A função s é injetiva.

3') Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4') Se um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $1 \in A$ e $s(A) \subseteq A$ (isto é, $k \in A \Rightarrow s(k) \in A$), então $A = \mathbb{N}$.

O axioma 4) é conhecido como Princípio de Indução Matemática. Intuitivamente, ele significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante, com um número finito de etapas. O Princípio de Indução Matemática serve de base para um método de demonstração de resultados referentes a números naturais, como método de indução ou recorrência, o qual funciona assim:

"Se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número k daí resultar que P é válida também para seu sucessor $s(k)$, então P é válida para todos os números naturais".

Observação. *O conjunto dos números naturais pode ser* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$ *ou* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$*, dependendo da conveniência. No que segue vamos usar* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$*, mas às vezes provaremos resultados começando em* $n = 0$*.*

Para cada uma das afirmações abaixo diga se é verdadeira ou falsa.

Exemplo 1. *Todo número natural é menor do que 1.000.000.*

É fácil ver que isso vale para 1, 2, ...etc. Mas falha para $n = 1.000.000$. Portanto é Falso. $\square$

Exemplo 2. *Se* $n \in \mathbb{N}$*, então* $n^2 + n + 41$ *é primo.*

Vale para $n = 1, 2, \ldots, 39$, pois $1^2 + 1 + 41 = 43, 2^2 + 2 + 41 = 47, \ldots, 39^2 + 39 + 41 = 1601$ são números primos. Mas, para $n = 40$, temos $40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 1 \cdot 41 = (40 + 1) \cdot 41 = 41^2$ não é primo. Portanto é Falso. □

Exemplo 3. *Se n é inteiro positivo, então $991n^2 + 1$ não é quadrado perfeito.*

Falha para $N = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$, mas vale para todos os números inteiros positivos menores que N. Este exemplo mostra que um resultado valha até um "zilhão", pode falhar depois disso. □

Exemplo 4. *A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.*

Observe que $1 = 1^2, 1{+}3 = 2^2, 1{+}3{+}5 = 3^2, 1{+}3{+}5{+}7 = 4^2$ e $1{+}3{+}5{+}7{+}9 = 5^2$, mas também é possível que isso seja apenas uma coincidência para esses cinco primeiros casos. □

Exemplo 5. *Todo número par, maior do que 2, é a soma de dois números primos.*

Veja alguns exemplos: $4 = 2+2, 6 = 3+3, 8 = 3+5, 10 = 3+7 = 5+5, 12 = 5+7, 14 = 3+11 = 7+7, 16 = 3+13 = 5+11, \ldots, 30 = 7+23 = 11+19 = 13 + 17$. Note que, em alguns casos, um número pode ser escrito como soma de dois primos de duas ou mais maneiras diferentes. Este resultado é conhecido como *Conjectura de Goldbach*: Christian Goldbach escreveu uma carta para Leonhard Euler em 1742, com essa afirmação. Sabe-se que o resultado vale para todos os números pares menores do que $4 \cdot 10^{18}$, mas isso não quer dizer muita coisa. Este é um problema em aberto, ou seja, não sabemos se é verdadeiro ou falso. □

Observação. *Antes de enunciar o Princípio de Indução Matemática, precisamos lembrar que uma sentença aberta em n é uma frase de conteúdo matemático onde figura a letra n como palavra e que se torna uma proposição (com valor lógico verdadeiro ou falso), quando n é subtituído por algum valor específico ou quando introduzimos um quantificador lógico. Por exemplo, $n^2 \geqslant 0$ é uma sentença aberta, que pode ser transformada numa das seguintes proposições: $5^2 \geqslant 0$, $i^2 \geqslant 0$ (onde i é a unidade imaginária), $(\forall n \in \mathbb{R})\ [n^2 \geqslant 0]$, etc.*

Começamos com a versão mais fraca da indução.

Princípio de Indução Matemática – PIM
Seja $P(n)$ uma sentença aberta em n e $n_0 \in \mathbb{N}$. Suponha que

(i) $P(n_0)$ é verdadeira, e

(ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, se $P(k)$ é verdadeira, segue que $P(k + 1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geqslant n_0$.

Vamos deduzir algumas fórmulas e depois prová-las, utilizando o PIM.

Conta-se que Carl Friedrich Gauss(1777-1855), aos nove anos de idade, junto com seus colegas de aula, teve delegada a seguinte tarefa: *somar todos os números de 1 até 100.*

Exemplo 6. *Quanto vale a soma dos n primeiros números naturais, ou seja, qual o valor da soma* $1+2+3+\cdots+n=?$

Seja $S=1+2+\cdots+(n-1)+n$, então $S=n+(n-1)+\cdots+2+1$.
Escreva uma soma abaixo da outra, verifique a regularidade e obtenha

$$2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)\ .$$

Como $n+1$ aparece n vezes, segue que $2S=n(n+1)$, ou seja, $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Para termos a garantia desse resultado precisamos usar o PIM.

Base de Indução (BI): para $n=1$ é óbvio que $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$.

Hipótese de Indução (HI): Supõe que o resultado vale para um certo $k\geqslant 1$.

Passagem de Indução (PI): Devemos mostrar a validade do resultado para $k+1$:

De fato, $\underbrace{1+2+3+\cdots+k}+(k+1)=^{HI}\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\ .\square$$

Essa ideia pode ser usada para obter a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

1.1.2 O Teorema Fundamental da Aritmética

Em alguns casos precisamos de uma versão mais forte do PIM, embora seja equivalente à versão acima.

Princípio de Indução Matemática – Forma Forte
Seja $P(n)$ uma sentença aberta em n e $n_0\in\mathbb{N}$. Suponha que

(i) $P(n_0)$ é verdadeira, e

(ii) para todo $k\in\mathbb{N}$, com $k\geqslant n_0$, se $P(j)$ é verdadeira para $n_0\leqslant j\leqslant k$, segue que $P(k+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n\geqslant n_0$.

Definição 1. *Um número inteiro $p > 1$ é dito primo se os únicos divisores positivos são 1 e p.*

São números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 127, 641.

Definição 2. *Um número inteiro $n > 1$ é dito composto se ele não for primo.*

Uma característica importante de um número composto n é que ele pode ser escrito na forma $n = a \cdot b$, com $1 < a \leqslant b < n$. São números compostos: $4 = 2 \cdot 2, 51 = 3 \cdot 17, 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

O resultado abaixo será provado usando a forma forte do PIM.

Lema 1. *Todo número inteiro $n \geqslant 2$ é produto de números primos.*

Demonstração. É claro que vale para $n = 2$. Agora supõe que o resultado vale para todo j tal que $2 \leqslant j \leqslant k$. Se $k + 1$ é primo, então vale o resultado. Mas, se $k+1$ for composto segue que $k+1 = ab$ com $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant k$. Logo, por hipótese de indução, a e b podem ser escritos como produto de números primos e assim vale o mesmo para $ab = k + 1$. □

Observação. *Um resultado conhecido sobre números primos e que não será provado aqui é que se p é primo, a e b são inteiros tais que ab é divisível por p, então a é divisível por p ou b é divisível por p.*

Com isso podemos provar o resultado abaixo.

Teorema 2. Teorema Fundamental da Aritmética – TFA
Todo número inteiro $n > 1$ pode ser escrito de maneira única, na forma $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, onde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ são números primos, $e_1, e_2, \ldots, e_k$ são inteiros positivos e $k \geqslant 1$. Além disso, n possui $(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$ divisores positivos.

Demonstração. A existência da escrita foi provada no lema acima. Agora vamos provar a unicidade.

Supõe que n possui duas fatorações diferentes $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_s, q_1, q_2, \ldots, q_t$ são todos primos, com $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_s$ e $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_t$. Removendo todos os primos comuns obtemos $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_u} = q_{j_1} \cdot q_{j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_v}$, onde não há mais primos comuns dos dois lados, $u \geqslant 1$ e $v \geqslant 1$. Pelo observação acima segue que q_{j_k} é divisível por p_{i_1}para algum j_k, o que dá uma contradição.

Para a segunda parte, seja $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$. Um divisor de n é da forma $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, onde $0 \leqslant a_i \leqslant e_i$ para $1 \leqslant i \leqslant k$. Logo temos $e_1 + 1$ escolhas possíveis para $a_1, e_2 + 1$ para e_2,..., $e_k + 1$ para a_k e, pelo princípio multiplicativo (veja Capítulo 4), segue o resultado. □

Duas consequências do TFA

Corolário 3. *Todo número natural $n \geqslant 1$ pode ser escrito de modo único na forma $n = 2^k(2m + 1)$, onde k, m são inteiros não negativos.*

Corolário 4. *Um número natural n tem quantidade ímpar de divisores positivos se, e somente se, n for um quadrado perfeito.*

O resultado acima pode ser usado para resolver o seguinte problema:

Exemplo 7. *Numa escola há um corredor com 2016 armários numerados de 1 a 2016 , inicialmente todos fechados. 2016 alunos numerados de 1 a 2016, passam pelo corredor. O aluno de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k. Por exemplo, o aluno de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12,..., abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos. Ao final, depois da passagem do 2016^o aluno, quais armários ficarão abertos?*

Definição 3. *Um conjunto infinito X é dito enumerável se existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, f é dita uma enumeração dos elementos de X: $f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n, ...$ e escrevemos $X = \{x_1, x_2, ...\}$.*

Dado k inteiro não negativo, seja $A_k = \{2^k(2m+1) : m \in \mathbb{Z}, m \geqslant 0\}$. Por exemplo, $A_0 = \{$naturais ímpares$\}$ e $A_1 = \{$naturais que têm um 2 na sua fatoração$\}$.

É fácil provar que: cada A_k é infinito, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \mathbb{N}$.

No exemplo abaixo todos os conjuntos infinitos serão enumeráveis. Nesse texto não será abordado o conceito de infinito não enumerável.

Exemplo 8. O Hotel de Hilbert

O Hotel de Hilbert é bem diferente daqueles que você conhece, pois ele tem infinitos quartos, numerados de acordo com os números reais.

Num certo dia o hotel estava lotado e chegou um ônibus com 40 possíveis hóspedes. Uma dessas pessoas era um matemático que se dirigiu à portaria para saber se havia vagas. O porteiro informou que, apesar do hotel ter infinitos quartos, não havia vagas. O matemático perguntou ao porteiro se era possível passar uma informação para todos os quartos simultaneamente. A resposta foi: sim!

O matemático disse para o porteiro passar a seguinte instrução para os hóspedes: "Você que está no quarto n, vá para o quarto $n + 40$.' Com isso os quartos $1, 2, \ldots, 40$ ficaram vagos e todos os passageiros do ônibus conseguiram se hospedar.

Mais tarde, com o hotel ainda lotado, chegou um vagão de trem com infinitos passageiros. Dessa vez o porteiro achou que seria bem mais difícil acomodar todos eles, mas resolveu consultar o matemático. Este sugeriu a seguinte instrução: "Você que está no quarto n, vá para o quarto $2n$." Com isso os quartos ímpares ficaram todos vagos e os passageiros do trem puderam se hospedar.

Assim que todos estavam acomodados chegou um trem com infinitos vagões e infinitos passageiros em cada vagão. Dessa vez porteiro achou que daria um *problema impossível para o matemático resolver. Mas o matemático não titubeou e disse para o porteiro passar a seguinte mensagem para os hóspedes: "Você que está no quarto n, vá para o quarto $2n - 1$."*

Portanto, todos os quartos pares ficaram vagos. Os passageiros do primeiro vagão foram acomodados nos quartos com os números no conjunto A_1 acima, os do segundo vagão foram para os quartos numerados de acordo com o conjunto A_2 e assim por diante, ou seja, os passageiros do k-ésimo vagão foram para os quartos numerados com os elementos do conjunto A_k. $\square$

1.1.3 Sistema Binário

Exemplo 9. *Num torneio de tênis individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo mata-mata* , quantos jogos seráo realizados para se definir o vencedor?*

*Os jogadores são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar um jogador, que é proclamado campeão.

Na solução deste problema usaremos um argumento de contagem dupla (ou demonstração combinatória) para estabelecer a igualdade. Considere um torneio de tênis com 2^{n+1} competidores como o enunciado acima. Observe que em cada rodada o número de jogos é igual a metade do total de participantes restantes. Com isso, na primeira rodada temos 2^n partidas, na segunda 2^{n-1}, e assim sucessivamente até que na última rodada temos o jogo que decide o campeão. Com isso temos um total de $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ partidas. Por outro lado, podemos ver que a cada jogo está associado um jogador que é eliminado do torneio. Como temos 2^{n+1} competidores e no final só resta um, que é o grande vencedor, segue que foram realizadas $2^{n+1} - 1$ partidas. Concluímos então que $1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ para todo $n \geqslant 1$. $\square$

O resultado abaixo caracteriza o sistema de numeração binário.

Teorema 5. *Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos, denominada* **representação binária**.

Demonstração. Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução em n. Temos que $1 = 1, 2 = 2, 3 = 1 + 2, 4 = 4, 5 = 4 + 1, 6 = 4 + 2, 7 = 4 + 2 + 1$ e, com isso, o resultado vale para todo $n \leqslant 7$. Supõe que o resultado vale até um certo $k \geqslant 7$. Se $k + 1$ é uma potência de 2, então está provado. Caso contrário, existe j tal que $2^j < k + 1 < 2^{j+1} = 2^j + 2^j$. Logo $k + 1 - 2^j \leqslant k$ e como qualquer número menor ou igual a k é soma de potências de 2, segue que existem inteiros não negativos $0 \leqslant e_0 < e_1 < \cdots < e_l$ tais que $k + 1 - 2^j = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \cdots + 2^{e_l}$. Como $k + 1 - 2^j < 2^j$ segue que

$2^{e_0}+2^{e_1}+\cdots+2^{e_l}<2^j$ e assim $e_l<j$. Logo $k+1=2^{e_0}+2^{e_1}+\cdots+2^{e_l}+2^j$, com $0\leqslant e_0<e_1<\cdots<e_l<j$.

Agora provaremos a unicidade da representação. Supõe que a representação é única até um certo k e que $k+1=2^{a_0}+2^{a_1}+\cdots+2^{a_r}=2^{b_0}+2^{b_1}+\cdots+2^{b_s}$, com $0\leqslant a_0<a_1<\cdots<a_r$ e $0\leqslant b_0<b_1<\cdots<b_s$. Então $2^{a_r}\leqslant 2^{a_0}+2^{a_1}+\cdots+2^{a_r}=2^{b_0}+2^{b_1}+\cdots+2^{b_s}\leqslant 2^0+2^1+\cdots+2^{b_s}=2^{b_s+1}-1$. Logo $2^{a_r}<2^{b_s+1}$ e assim $a_r<b_s+1$, ou seja, $a_r\leqslant b_s$. De maneira análoga podemos mostrar que $b_s\leqslant a_r$ e, portanto $a_r=b_s$. Usando a hipótese de indução concluímos que $r-1=s-1$ e que $a_i=b_j$, para $i,j\in\{0,1\ldots,r-1\}$. Portanto está provada a unicidade. □

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos Binários, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 63, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 6 cartelas abaixo e o matemático faz 6 perguntas. O número que você pensou está na primeira cartela? está na segunda cartela? E assim por diante.

Ao final das 6 perguntas o matemático revela o número que a pessoa pensou.

Após realizar a mágica umas duas ou três vezes, a plateia deve deduzir o truque utilizado e por que ele sempre funciona.

Cartões Mágicos Binários

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

1.1.4 Desigualdades

Definição 4. *Sejam $x_1,x_2,\ldots,x_n$ números reais positivos. As médias aritmética e geométrica desses números são definidas, respectivamente, por:*

$$MA(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\quad e\quad MG(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\,.$$

Proposição 6. Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

A igualdade ocorre se, e só se, todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem iguais.

Demonstração. Primeiro iremos provar a validade da desigualdade para o caso em que n é uma potência de 2.

Base de Indução (BI) $n = 2$: Como $x_1 x_2 = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{4} - \dfrac{(x_1-x_2)^2}{4} \leqslant \dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}$

e, extraindo a raiz quadrada dos dois lados, segue que $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Hipótese de Indução (HI): Supõe que o resultado vale para um certo $k \geqslant 2$.

Passagem de Indução: Vamos mostrar a validade para $2k$. De fato,

$$\sqrt[2k]{a_1 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1} \cdots a_{2k}}} \leqslant^{BI}$$

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \cdots a_{2k}}}{2} \leqslant^{HI} \frac{\dfrac{a_1 + \cdots a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{k}}{2} =$$

$$\frac{a_1 + \cdots a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{2k} = \frac{a_1 + \cdots + a_{2k}}{2k}$$

Logo o resultado vale para todas as potências de 2, ou seja, para $n = 2, 4, \ldots, 2^m, \ldots$

Agora vamos provar o resultado para todo $n \geqslant 2$. Já sabemos que o resultado vale para todas as potências de 2 e vamos supor (nova hipótese de indução) que o resultado vale até um certo $k \geqslant 2$.

Sejam $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots a_{k+1}}{k+1}$ e m o menor número inteiro positivo maior ou igual a $k + 1$. Então segue que

$$(a_1 \cdots a_{k+1} \cdot \underbrace{A \cdots A}_{2^m-(k+1)})^{1/2^m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_{k+1} + (2^m - k - 1)A}{2^m} =$$

$$\frac{(k+1)A + (2^m - k - 1)A}{2^m} = A.$$

Elevando à potência 2^m temos que

$$a_1 \cdots a_{k+1} \cdot A^{2^m-k-1} \leqslant A^{2^m} \quad \text{e assim} \quad a_1 \cdots a_{k+1} \leqslant A^{k+1}.$$

Se extrairmos a raiz $k + 1$-ésima obtemos o resultado.

A prova de que a igualdade ocorre se, e só se, $a_1 = \ldots = a_n$ pode ser feita por indução e fica como exercício. □

Um resultado um pouco mais geral é a proposição abaixo, que foi provada por Alzer em 1996 ([2]).

Proposição 7. Desigualdade das Médias com Pesos
Se $a_1, \ldots, a_n$ e $p_1, \ldots, p_n$ são números positivos e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, então

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leqslant p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \, .$$

Demonstração. Denotemos o lado esquerdo da desigualdade por G e o lado direito por A. Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Então $a_1 \leqslant G \leqslant a_n$ e assim existem pelo menos um $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $a_k \leqslant G \leqslant a_{k+1}$. Assim temos que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t} \right) dt \geqslant 0,$$

pois cada um dos integrandos são não negativos. A inequação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G} dt \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t} dt \, .$$

Calculando o lado esquerdo segue que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i - G}{G} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{A}{G} - 1 \, .$$

Já o lado direito fica ($\ln$ é o logaritmo natural)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (\ln a_i - \ln G) = \ln \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} - \ln G = 0 \, .$$

Portanto $\dfrac{A}{G} - 1 \geqslant 0$, ou seja, $G \leqslant A$.

Para que ocorra a igualdade, todas as integrais do início devem ser nulas e assim $a_1 = \ldots = a_n = G$. □

A desigualdade das médias aritmética e geométrica pode ser usada para a determinação de máximos e mínimos de funções. Vejamos um exemplo.

Exemplo 10. *Considere a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 5}$.*

Encontraremos o valor máximo de f e o ponto em que tal valor é assumido.

Pela desigualdade das médias temos que

$$x^2 + 5 = x^2 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \geq 4 \sqrt[4]{x^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}} = 4 \sqrt[4]{\frac{125}{27}} \sqrt{x} \, .$$

Logo $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+5} \leq \dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $x^2 = \dfrac{5}{3}$.

Portanto o valor máximo de f é $\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ e ocorre para $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$. $\square$

Proposição 8. Desigualdade de Bernoulli

Se $x \in \mathbb{R}, x \geqslant -1$, então $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, para todo inteiro positivo n.

Demonstração. O resultado vale para $n = 1$, pois $1 + x \geqslant 1 + x$.

Supõe que o resultado vale para um certo $k \geqslant 1$: $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.

Para provar o resultado para $k+1$, começamos notando que $(1+x)$ é um número real não negativo, visto que $x \geqslant -1$. Assim, multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por $(1+x)$, temos

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geqslant (1+kx) \cdot (1+x) = 1 + kx + x + kx^2 =$$

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x,$$

onde a última desigualdade é verdadeira pois o termo kx^2 é não negativo. $\square$

Proposição 9. Desigualdade Triangular

Se n é inteiro, $n \geqslant 2$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais, então

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \,.$$

Demonstração. A base de indução é para $n = 2$ e isso será útil na passagem de indução.

Como $|a_1 + a_2|$ e $|a_1| + |a_2|$ são números reais não negativos, temos que

$$|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2| \Leftrightarrow |a_1 + a_2|^2 \leqslant (|a_1| + |a_2|)^2$$

$$(a_1+a_2)^2 \leqslant |a_1|^2 + 2|a_1a_2| + |a_2|)^2 \Leftrightarrow a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \leqslant a_1^2 + 2|a_1a_2| + a_2^2.$$

E essa última igualdade equivale a $a_1a_2 \leqslant |a_1a_2|$, o que é verdade.

Supõe que o resultado vale para uma parcela com k termos, onde $k \geqslant 2$, então

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}| \leqslant^{BI}$$

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \leqslant^{HI} |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$ $\square$

Proposição 10. Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se n é inteiro, $n \geqslant 2$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais, então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Demonstração. Lembre que se a, b e c são números reais tais que $a\lambda^2 + b\lambda + c \geqslant 0$, para todo λ real, então $b^2 - 4ac \leqslant 0$.

Agora note que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k)^2 \geqslant 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e assim temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\lambda + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geqslant 0, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ logo}$$

$$\left(2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0, \text{ portanto vemos que}$$

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \text{ e dividindo por 4 segue o resultado.}$$

□

1.1.5 Exercícios

Exercício 1. *Prove que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geqslant 1$.*

Exercício 2. *Prove, por indução em n, que $1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geqslant 1$.*

Exercício 3. *Prove, por indução em n, que $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$ é divisível por 3, para todo $n \geqslant 1$.*

Exercício 4. *Prove, por indução em n, que:*

(a) $n(n + 1)$ *é divisível por* 2*, para todo* $n \geqslant 1$.

(b) $n^3 - n$ *é divisível por* 6*, para todo* $n \geqslant 6$.

Exercício 5. *Prove, por indução em n, que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, para todo $n \geqslant 1$.*

Exercício 6. *Seja (a_n) uma sequência de números reais positivos tal que $a_1 = 1$ e*

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Mostre que $a_n = n$, para todo $n \geqslant 1$.

Exercício 7. *(a) Mostre que se x é um número real não nulo e k inteiro positivo, então vale a igualdade abaixo:*

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) .$$

(b) Use o item (a) para provar, por indução em n, que se $x + \frac{1}{x}$ é inteiro, então $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro para todo $n \geqslant 1$.

Observação. *Nos exercícios a seguir $a = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ é a representação decimal do número natural a, ou seja, $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$.*

Exercício 8. Critério de divisibilidade por 9

(a) Prove, por indução em n, que $10^n - 1$ é divisível por 9, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Use o item (a) para provar os critérios de divisibilidade por 3 e por 9: Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 (resp. 9) é que $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ seja divisível por 3 (resp. 9).

Exercício 9. Critério de divisibilidade por 11

(a) Prove, por indução em n, que $10^{2n} - 1$ é divisível por 11, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Prove, por indução em n, que $10^{2n-1} + 1$ é divisível por 11, para todo $n \geqslant 1$.

(c) Use os itens (a) e (b) para provar um critério de divisibilidade por 11: Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 11 é que $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ seja divisível por 11.

Exercício 10. Critério de Divisibilidade por $7, 11$ **e** 13

(a) Prove que $1000^{2n} - 1$ é divisível por 1001, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Prove que $1000^{2n-1} + 1$ é divisível por 1001, para todo $n \geqslant 1$.

(c) Use (a) e (b) para provar um critério de divisibilidade por $7, 11$ e 13: Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 7 (resp. 11, 13) é que $a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + a_8 a_7 a_6 - a_{11} a_{10} a_9 + \cdots$ seja divisível por 7 (resp. 11, 13).

Exercício 11. *Prove a validade das desigualdades abaixo, para todo $n \geqslant 1$:*

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} .$$

Exercício 12. *Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2)180°$.*

Exercício 13. *Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é igual a $\dfrac{n(n-3)}{2}$.*

Exercício 14. *Prove que, para todo número natural n maior do que 3, existe um polígono convexo com n lados e exatamente 3 ângulos agudos.*

Exercício 15. *Em um programa de televisão, um candidato deve responder 21 perguntas. A primeira pergunta vale 1 ponto, a segunda 2 pontos, a terceira 4 pontos, e assim sucessivamente, dobrando sempre. O candidato responde a todas as perguntas e ganha os pontos correspondentes às respostas que acertou, mesmo que erre algumas. Sendo assim, responda:*

(a) Qual o número de pontos que o candidato fará se acertar todas as perguntas?

(b) Quantas e quais as perguntas o candidato acertou se o número de pontos obtidos for igual a 571113?

Exercício 16. Progressão Aritmética

Uma Progressão Aritmética (PA) com primeiro termo a e razão r é uma sequência de números cujo primeiro termo é a e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com a razão.

Em símbolos: $a_1 = a$ *e* $a_n = a_{n-1} + r$, *se* $n \geqslant 2$.

(a) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e r. Em seguida, prove-a por indução em n.

(b) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de a, n e r. Em seguida, prove-a por indução em n.

(c) A partir do item (b), obtenha uma fórmula para S_n em função a, a_n e r.

Exercício 17. *Se $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 2$, encontre o valor da soma abaixo em função de n:*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}\ .$$

Exercício 18. *Se (a_n) é uma PA com termos não nulos, prove que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}},\ \text{para todo } n \geqslant 1.$$

Exercício 19. *Se (a_n) é uma PA com termos positivos prove, para todo $n \geqslant 1$, que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}} .$$

Exercício 20. Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica (PG) com primeiro termo a e razão $q(q \neq 0$ e $q \neq 1)$ é uma sequência de números cujo primeiro termo é a e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão.

Em símbolos, $a_1 = a$ e $a_n = a_{n-1} \cdot q$, se $n \geqslant 2$.

(a) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e q. Em seguida, prove-a por indução em n.

(b) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de a, n e q. Em seguida, prove-a por indução em n.

(c) A partir do item (b), obtenha uma fórmula para S_n em função a, a_n e q.

Exercício 21. *Para cada uma das matrizes abaixo, conjecture uma fórmula para A^n. Em seguida, prove-a, por indução em n. (θ é um número real).*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Exercício 22. *Prove, por indução em n, a Fórmula de De Moivre*

$$[\cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta]^n = \cos(n\theta) + i\ \text{sen}\ (n\theta)\,, \ \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Exercício 23. *Considere o produto*

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

(a) Calcule P_2, P_3, P_4 e P_5.

(b) Conjecture uma fórmula para P_n e prove-a por indução.

Definição 5. *Os números harmônicos são definidos por*

$$H_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}, \ \textit{para } j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Exercício 24. *Prove, por indução em n, que:*

(a) $H_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$, *para todo* $n \geqslant 0$.

(b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} H_j = 2 - \frac{H_{n+1}}{n} - \frac{1}{n+1}$, *para todo* $n \geqslant 2$.

(c) $n + H_1 + \cdots + H_{n-1} = nH_n$, *para todo* $n \geqslant 2$.

Exercício 25. *Seja a sequência* $a_1 = 2, a_2 = 3$ *e* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, *para* $n \geqslant 3$.

Prove, por indução em n, que:

(a) $a_n > \left(\dfrac{8}{5}\right)^n$, *para todo* $n \geqslant 1$.

(b) $a_n < \left(\dfrac{17}{10}\right)^n$, *para todo* $n \geqslant 4$.

Exercício 26. *Use a desigualdade de Bernoulli para mostrar que a sequência*

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *é crescente, ou seja, que* $a_n < a_{n+1}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Sugestão: Mostre que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[\dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right]^n$ e use (a).

Exercício 27. *(a) Mostre que se m é um número positivo ímpar, então o polinômio $x^m + 1$ é divisível por $x + 1$.*

(b) Use o item (a) para provar que se n é inteiro, $n \geqslant 3$ e não é potência de 2, então $2^n + 1$ é composto.

Exercício 28. *(a) Mostre, por indução em n, que $(2 + \sqrt{3})^n$ é da forma $a_n + b_n\sqrt{3}$, com a_n e b_n inteiros, para todo $n \geqslant 1$.*

(b) Prove, por indução em n, que se $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, com a_n e b_n inteiros, então $(2 - \sqrt{3})^n = c_n + d_n\sqrt{3}$, onde $c_n = a_n$ e $d_n = -b_n$, para todo $n \geqslant 1$.

(c) Use o item (b) para mostrar que $(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n}$ é divisível por 2^{n+1}, para todo $n \geqslant 1$.

(d) Deduza que $\lceil (1+\sqrt{3})^{2n} \rceil$ é um número divisível por 2^{n+1}, para todo $n \geqslant 1$, onde $\lceil x \rceil$ denota o teto de x, ou seja, o único inteiro k tal que $k-1 < x \leqslant k$.

Exercício 29. *Seja $a > 0$ e considere a sequência $a_1 = \sqrt{a}, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$,*

para $n \geqslant 1$. Prove, por indução em n, que:

(a) a_n *é crescente, ou seja, que* $a_n < a_{n+1}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

(b) $a_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Exercício 30. *Considere a sequência* $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$, *para* $n \geqslant 1$.

(a) *Prove, por indução em* n, *que* $\sqrt{2} \leqslant a_n \leqslant 2$, *para todo* $n \geqslant 2$.

(b) *Use o item (a) para provar que* $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|a_{n+1} - a_n|$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Exercício 31. *Mostre que, para todo número inteiro positivo* n, *existe um número inteiro positivo* M *satisfazendo as condições abaixo:*

(i) M *possui* n *dígitos pertencentes ao conjunto* $\{1, 2\}$.

(ii) M *é divisível por* 2^n.

Exercício 32. *Sejam* $a \in \mathbb{R}, a > 0$ *e* a_n *uma sequência tal que*

$$\sqrt{a} \leqslant a_1 \leqslant \sqrt{a} + 1 \text{ e } a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \text{ para } n \geqslant 1.$$

(a) *Use a desigualdade das médias para provar que* $a_n \geqslant \sqrt{a}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

(b) *Mostre que* $a_n \leqslant \sqrt{a} + \dfrac{1}{2^{n-1}}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Exercício 33. *Dados* a *e* b *dois números reais positivos, use a desigualdade das médias para encontrar o valor mínimo ou máximo e o ponto em que ocorre para cada uma das funções* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *abaixo:*

(a) $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x^2}$.

(b) $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$.

(c) $f(x) = ax^3 + \dfrac{b}{x}$.

(d) $f(x) = 6x + \dfrac{24}{x^2}$.

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + a}$.

Exercício 34. *Prove a validade da fórmula abaixo, para todo $n \geqslant 1$:*

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \lfloor \log_2 i \rfloor = (n-2)2^n + 2\ .$$

Definição 6. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, definimos a média harmônica desses números por:*

$$MH(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} \right)^{-1} .$$

Exercício 35. *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, mostre que*

$$\left(\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} \right)^{-1} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\ .$$

A igualdade ocorre se, e só se, todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem iguais.

Definição 7. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, definimos a média quadrática desses números por:*

$$MQ(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}\ .$$

Exercício 36. *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, mostre que*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}\ .$$

A igualdade ocorre se, e só se, todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem iguais.

Definição 8. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, definimos a média contra-harmônica desses números por:*

$$MC(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\ .$$

Exercício 37. *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, mostre que*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\ .$$

A igualdade ocorre se, e só se, todos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forem iguais.

Exercício 38. Desigualdade de Young
Sejam x, y números reais positivos. Se a e b são números positivos satisfazendo a condição $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$, prove que $xy \leqslant \dfrac{1}{a}x^a + \dfrac{1}{b}y^b$.

Exercício 39. Desigualdade de Hölder
Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ números reais positivos e a, b números positivos tais que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. Prove que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{1/a} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{1/b} .$$

Exercício 40. Desigualdade de Minkowski
Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais positivos e $p > 1$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

Exercício 41. Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos
Mostre que, dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o equilátero.

Sugestão: Se a, b e c são os comprimentos dos lados e s é o semiperímetro ($2s = a + b + c$) do triângulo, então a área do triângulo é dada pela *fórmula de Heron* $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Exercício 42. Desigualdade Isoperimétrica para Paralelepípedos Retos Retângulos
Mostre que, dentre todos os paralelepípedos retos retângulos com área das faces fixada A, o de maior volume é o cubo.

Exercício 43. Desigualdade de Weitzenböck
Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo e S é a área desse triângulo, então

$$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2) .$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e só se, o triângulo é equilátero.

Exercício 44. *Sejam x, y e z números reais positivos.*

(a) *Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$.*

(b) *Prove que $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.*

(c) *Use o item (b) para mostrar que se a equação $t^3 - at^2 + bt - c = 0$, em que a, b e c são números positivos, possui três raízes reais, então $a^6 \geqslant 27b^3 \geqslant 729c^2$.*

Exercício 45. IMO 1966
Considere o triângulo ABC e sejam M, K e L pontos sobre os lados AB, BC e CA, respectivamente. Prove que a área de um dos triângulos MAL, KBM e LCK é menor ou igual a $1/4$ da área do triângulo ABC.

1.2 Miscelânea de Belos Problemas com Indução

1.2.1 A Sequência de Fibonacci

Exemplo 11. *Imagine que um prédio de quatro andares deva ser pintado usando-se uma cor para cada andar. Sabendo que as cores utilizadas podem ser verde e amarelo e que andares consecutivos não poderão ser pintados de amarelo, de quantas maneiras é possível fazer a pintura deste prédio? E se o prédio tiver n andares?*

Para um prédio de quatro andares temos 8 maneiras, listadas abaixo:

Tabela 1.1: Pintura do prédio de quatro andares

V	V	V	V	A	V	A	A
V	V	V	A	V	A	V	V
V	V	A	V	V	V	V	A
V	A	V	V	V	A	A	V

Seja a_n o número de maneiras de pintar um prédio de n andares. É fácil ver que $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$ e como vimos acima $a_4 = 8$. Vamos considerar um prédio de n andares e dividir as soluções dentre aquelas em que o último é pintado de verde e as que o último é pintado de amarelo. Se o último é pintado de verde, o penúltimo pode ser pintado de amarelo ou verde e o número de soluções é igual a a_{n-1}. Agora se o último é pintado de amarelo, então o penúltimo deve ser pintado necessariamente de verde e assim resta pinta um prédio de $n-2$, que pode ser feito de a_{n-2} modos. Portanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 2$ e $a_3 = 2$.

É possível achar uma forma explícita para a_n, resolvendo a equação de recorrência acima. Para maiores detalhes veja em [13] □

Definição 9. *A sequência de Fibonacci é definida por $F_0 = 0, F_1 = 1$ e*

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$*, para $n \geqslant 2$.*

Duas identidades que serão usadas para provar o resultado abaixo ficarão como exercício:

$$F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2} - 1 \text{ e } F_2 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Teorema 11. Teorema de Zeckendorf
Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos da sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores que 1.

Demonstração. Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução em n. Temos que $1 = F_2, 2 = F_3, 3 = F_4, 4 = 3+1 = F_4 + F_2, 5 = F_5, 6 = F_5 + F_2$ e, com isso, o resultado vale para todo $n \leqslant 6$. Supõe que o resultado vale até um certo k. Se $k+1$ é um termo da sequência de Fibonacci, então está provado. Caso contrário, existe j tal que $F_j < k+1 < F_{j+1}$. Logo $a = k+1-F_j$ é menor que F_{j-1}. De fato, se $a \geqslant F_{j-1}$, então $k+1 = a+F_j \geqslant F_{j-1}+F_j = F_{j+1}$, o que dá uma contradição. Assim, por hipótese de indução, segue que a é soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci, onde o maior deles é menor que F_{j-1}. Portanto $k+1$ pode ser escrito como soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci.

Agora provaremos a unicidade da representação. Supõe que a representação é única até um certo k e que $k+1 = F_{a_0}+F_{a_1}+\cdots+F_{a_r} = F_{b_0}+F_{b_1}+\cdots+F_{b_s}$, com $a_i+1 < a_{i+1}$ e $b_j+1 < b_{j+1}$. Então $F_{a_r} \leqslant F_{a_0}+F_{a_1}+\cdots+F_{a_r} = F_{b_0}+F_{b_1}+\cdots+F_{b_s} \leqslant F_{b_s}+F_{b_s-2}+\cdots+F_t = F_{b_s+1}-1$, onde $t=2$ se b_s é par e $t=3$ se b_s é ímpar. Logo $F_{a_r} < F_{b_s+1}$ e assim $a_r < b_s+1$, ou seja, $a_r \leqslant b_s$. De maneira análoga podemos mostrar que $b_s \leqslant a_r$ e, portanto $a_r = b_s$. Usando a hipótese de indução concluímos que $r-1 = s-1$ e que $a_i = b_j$, para $i, j \in \{0, 1\ldots, r-1\}$. Portanto está provada a unicidade. $\square$

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos de Fibonacci, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 120, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 10 cartelas abaixo e ele faz até 10 perguntas. O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante. Aqui há uma coisa que impressiona mais, pois se o número estiver numa determinada cartela, ele não estará na seguinte e, nesse caso, a quantidade de perguntas pode ser inferior a 10.

Ao final das perguntas o matemático revela o número que a pessoa pensou.

Cartões Mágicos de Fibonacci

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125
130	133	138	143	146	151
154	159	164	172	175	180
185	188	193	198	201	206

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122
126	127	134	135	139	140

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130
141	142	143	149	150	151

8	9	10	11	12	29
30	31	32	33	42	43
44	45	46	63	64	65
66	67	84	85	86	87
88	97	98	99	100	101
118	119	120	121	122	131
132	133	134	135	152	153

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139
140	141	142	143	157	158

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125
126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137
138	139	140	141	142	143

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200
201	202	203	204	205	206

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124
125	126	127	128	129	130

1.2.2 As Torres de Hanói

Esse jogo foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas, por volta do ano de 1883 e o seu nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, capital do Vietnã. Há várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo hindu, supostamente situado no centro do universo. Diz a lenda que Brama colocou três torres de diamante e em uma delas colocou com 64 discos de ouro de diâmetros diferentes. Esses discos foram empilhados de acordo com o diâmetro, do maior para o menor, de baixo para cima. A ordem era que os discos fossem fincados em outra haste com as seguintes regras: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior poderia ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronaria e o mundo acabaria.

Vamos considerar um jogo em uma base de madeira estão firmadas três hastes verticais, que vamos denominar de A, B e C, e em um certo número de discos de madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro, conforme figura abaixo. Denominamos a haste da esquerda de A, a central de B e a da direita de C.

Exemplo 12. *Inicialmente os discos estão todos enfiados na haste A, em ordem decrescente de tamanho, com o menor disco acima dos demais. O objetivo é mover todos os discos, de A para C, obedecendo às seguintes regras:*

Figura 1.1: Torres de Hanói

(1) Somente um disco pode ser movido de cada vez.

(2) Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Para resolver o problema será necessário usar a haste B. A questão é a seguinte:

Qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo?

Denotamos por T_n o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema com n discos. É claro que $T_1 = 1$, pois nesse caso podemos passar o único disco da haste A para a C com um único movimento. Agora consideremos $n \geqslant 2$. Para que o disco maior seja colocado na haste C, precisamos passar os demais discos para a haste B. A passagem dos $n-1$ discos menores para a haste B pode ser feita com T_{n-1} movimentos, depois passamos o disco maior de A para C e finalmente, com T_{n-1} movimentos passamos os $n-1$ discos menores de B para C. Logo $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$.

A equação de recorrência acima é quase uma progressão geométrica. Note que $T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1)$ e $T_1 + 1 = 2$. Seja $a_n = T_n + 1$ e assim $a_n = 2a_{n-1}, a_1 = 2$, isto é, a_n é uma progressão geométrica com primeiro termo 2 e razão 2. Logo $a_n = 2^n$ e portanto $T_n = 2^n - 1$. $\square$

1.2.3 Cobertura de tabuleiro de damas mutilado com L-triminós

Exemplo 13. *Seja n um número inteiro positivo. Todo tabuleiro de damas $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser ladrilhado por triminós em forma de "L", conforme figura abaixo.*

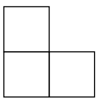


Figura 1.2: L-triminó

É fácil mostrar, por indução em n, que $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$ é divisível por 3, para todo inteiro positivo n (exercício da seção anterior). Com isso o problema tem chance de ser verdadeiro. Iremos mostrar a validade por indução em n.

Para $n = 1$ temos o tabuleiro $2^1 \times 2^1$ que pode ser mutilado de 4 maneiras e cujas 4 coberturas com um L-triminó são as seguintes:

Figura 1.3: Caso $n = 1$

Suponha que o resultado vale até um certo $k \geqslant 1$, ou seja, que o tabuleiro $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser coberto por L-triminós. Agora considere um tabuleiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com um quadrado removido, conforme a figura da esquerda abaixo. É fácil ver que esse tabuleiro pode ser dividido em 4 tabuleiros $2^k \times 2^k$. Com isso é só colocar um L-triminó no centro do tabuleiro, conforme a figura da direita abaixo.

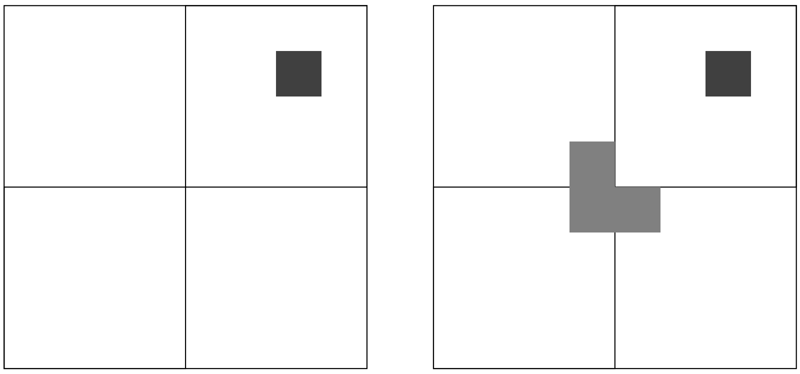


Figura 1.4: Passagem de Indução

Assim temos que cada um dos 4 tabuleiros $2^k \times 2^k$ teve um quadrado removido e assim segue o resultado por hipótese de indução. □

1.2.4 Pesagens de Moedas

Exemplo 14. *Seja $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$. Suponha que você possui m moedas, uma das quais é falsa e pesa menos do que uma verdadeira. Você tem uma balança de dois pratos (figura abaixo), mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em por algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada. Se $m = 3^n$, então n pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada.*

Figura 1.5: Balança de dois pratos

(Fonte: wikipedia.org/wiki/File:Scale_of_justice_2.svg)

Faça uma tabela com duas colunas: na primeira escreva valores de $m = 2, 3, 4, ...$ e na segunda coloque a quantidade mínima de pesagens para descobrir a moeda falsa. Veja qual o número mínimo de pesagens para os seguintes valores de $m : 3, 4, 9, 10, 27, 28$.

Para $n = 1 (m = 3^1)$ basta colocar uma moeda em cada prato e deixar uma fora. Caso a balança fique equilibrada, a falsa é aquela que ficou fora. Se a balança desequilibrar, a falsa é aquela do prato que ficou mais alto.

Supõe que o resultado vale para 3^k moedas, ou seja, é possível descobrir a falsa, que pesa menos, com k pesagens. Agora considere 3^{k+1} moedas, em que uma é falsa e pesa menos. Note que $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k = 3^k + 3^k + 3^k$. Nesse caso colocamos 3^k moedas no prato da esquerda, 3^k no prato da direita e deixamos as restantes 3^k de fora. Se a balança ficar equilibrada, a falsa está no grupo que ficou de fora da pesagem. Se a balança desequilibrar, a falsa está no prato que ficou mais alto. Em qualquer situação, ficamos com 3^k moedas em que uma é falsa e pesa menos. Por hipótese de indução podemos descobrir a moeda falsa com mais k pesagens. Portanto realizamos $k + 1$ pesagens para descobrir a moeda falsa e o resultado está provado. $\square$

1.2.5 O Problema de Josephus

Exemplo 15. O Problema de Josephus
Flavius Josephus foi um famoso historiador judeu do século primeiro. Durante a guerra entre judeus e romanos, ele foi encurralado pelos romanos em uma caverna, junto com um grupo de 40 soldados judeus. Conta a lenda que, preferindo a morte à captura pelos romanos, os soldados decidiram formar um círculo e, a partir de uma determinada pessoa, cada um que estivesse vivo matava o soldado à sua esquerda. Nada entusiasmado com a ideia de morrer, Josephus encontrou rapidamente a posição no círculo que o manteria vivo. Qual foi esta posição? Resolva o mesmo problema para um círculo com n pessoas.

Seja J_n a posição no círculo da pessoa que sobreviverá. Na tabela abaixo alguns valores de J_n.

Tabela 1.2: Problema de Josephus

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	$\cdots$

É fácil ver que na primeira volta todos aqueles que estão em posição par são eliminados. Vamos provar por indução em m que $J_{2^m} = 1$, para todo $m \geqslant 1$. O resultado é óbvio para $m = 1$. Agora supõe que vale para um certo $k \geqslant 1$. Considere um grupo com 2^{k+1} pessoas . Na primeira rodada são eliminados todos, exceto as pessoas com numeração ímpar: $1, 3, 5, \ldots, 2^{k+1} - 1$, ou seja, 2^k pessoas e o número 1 inicia. Por hipótese de indução segue que 1 é o vencedor.

Para o caso geral, vamos considerar o caso particular $n = 41$ para depois estender o resultado. Quando o número de participantes vivos for igual a uma potência de 2, o próximo jogador será o vencedor. Se n não for uma potência de 2, veja que quando reduzirmos o número de pessoas para a potência de 2 imediatamente inferior a n, o jogo se reduz ao que já provamos, ou seja, o primeiro participante, a partir deste momento, será o vencedor. Como $2^5 < 41 < 2^6$, segue que quando sobrarem 32 competidores, o jogador que está na vez ganha. Para tanto devem ser eliminados $41 - 32 = 9$ competidores e isso ocorrerá quando o número 18 for eliminado, assim o vencedor será o 19, ou seja, $J_{42} = 19$. Considere n tal que $2^k < n < 2^{k+1}$. Para que sobrem 2^k competidores precisamos eliminar $n - 2^k$ competidores e isso acontecerá quando for eliminado o competidor $2(n-2^k)$. Portanto o vencedor será $2(n - 2^k) + 1$, ou seja, $J_n = 2(n - 2^k) + 1$. Como essa fórmula vale também quando n é potência de 2, segue que $J_n = 2(n - 2^k) + 1$, onde $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Explicitamente $J_n = 2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right) + 1$. $\square$

1.2.6 Frações egípcias

Definição 10. *Uma fração unitária é uma fração da forma $1/n$, onde n é um inteiro positivo.*

Definição 11. *Uma fração egípcia é uma soma de frações unitárias distintas.*

Por exemplo, $11/12 = 1/2 + 1/4 + 1/6$ e $5/17 = 1/4 + 1/23 + 1/1564$ são frações egípcias.

Os antigos egípcios representavam frações como soma de frações unitárias e o famoso papiro de Rhind, datado de 1650 a.C., contém uma tabela de representação como frações egípcias de todas as frações da forma $2/n$ para n ímpar entre 5 e 101. A única fração para a qual os egípcios não usavam frações unitárias era $2/3$.

Definição 12. *Dado um número real x, definimos o piso ou a parte de inteira $\lfloor x \rfloor$ de x como sendo o único inteiro k tal que $k \leq x < k + 1$ e definimos o teto $\lceil x \rceil$ de x como o único inteiro k tal que $k - 1 < x \leq k$. Também definimos a parte fracionária de x como sendo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.*

Por exemplo, temos que $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$, $\lceil\sqrt{2}\rceil = 2$, $\lfloor 5\rfloor = \lceil 5\rceil = 5$, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ e $\lceil -\pi\rceil = -3$.

Note que $\{x\} \in [0, 1)$, para todo x real.

Exemplo 16. *Dada uma fração p/q, com p e q inteiros positivos tais que $0 < p < q$, como escrever essa fração como soma de frações unitárias distintas?*

Vamos mostrar como encontrar a representação da fração $5/7$ como soma de frações unitárias utilizando o *algoritmo voraz.* Primeiro calculamos $\lceil 7/5\rceil = 2$ e assim a maior fração unitária na representação de $5/7$ é $1/2$. Logo $5/7 = 1/2 + 3/14$. Agora $\lceil 14/3\rceil = 5$ e a fração seguinte é $1/5$ e como $5/7 - 1/2 - 1/5 = 1/70$ segue que a representação fica $5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$.

Proposição 12. *Todo número racional p/q, em que p e q são inteiros positivos tais que $0 < p < q$, pode ser escrito com uma soma de frações unitárias distintas.*

Demonstração. Vamos usar o método creditado a Fibonacci e redescoberto por Sylvester. Partimos da fração original e tomaremos a maior fração unitária menor ou igual a fração dada e seguiremos fazendo o mesmo com os restos, conforme fizemos acima.

Considere a fração $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos tais que $0 < p < q$. Vamos supor, por hipótese de indução que o resultado vale para todas as frações com numerador menor do que p. Agora considere a maior fração unitária menor ou igual a $\frac{p}{q}$ é $\frac{1}{k}$, onde $k = \lceil q/p\rceil$.

(i) Se $\frac{1}{k} = \frac{p}{q}$, acabou.

(ii) Se $\frac{1}{k} < \frac{p}{q} < \frac{1}{k-1}$ (e então $pk - p < q$), seja $\frac{p}{q} = \frac{1}{k} + \frac{p_1}{q_1}$.

Assim segue que $p_1 = pk - q = pq - p + p - q < q + p - q = p$.

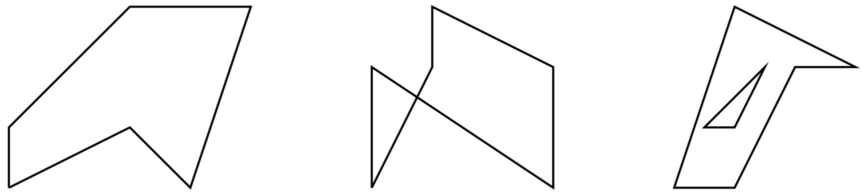
Por hipótese $\frac{p_1}{q_1}$ é soma de frações unitárias distintas menores que $\frac{1}{k}$.

Portanto segue o resultado. □

1.2.7 Teorema de Pick

Lembremos que um polígono é uma figura plana, fechada e limitada por um número finito de segmentos de reta que chamamos de lados.

Definição 13. *Denominamos polígono de Pick ou polígono simples, a um polígono que não possui lados ou vértices sobrepostos, isto é, os lados só se encontram ao pares e nos vértices, e o polígono não possui "buracos".*



Teorema 13. Pick
Seja P um polígono de Pick representado sobre um reticulado. Se todos os seus vértices estão sobre pontos do reticulado, então a área A_P do polígono pode ser escrita como

$$A_P = \frac{L_P}{2} + I_P - 1,$$

onde L_P e I_P são os números de pontos do reticulado sobre os lados e no interior do polígono, respectivamente.

Por exemplo, veja a seguinte figura:

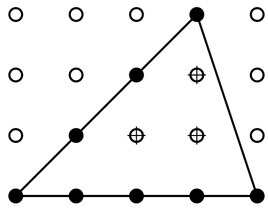


Figura 1.6: Triângulo de área 6.

Note que este triângulo T é tal que $I_T = 3$ e $L_T = 8$. Pelo teorema, $A_T = \frac{8}{2} + 3 - 1 = 6$, o que pode ser verificado pela fórmula da área do triângulo.

Veja agora a figura seguinte:

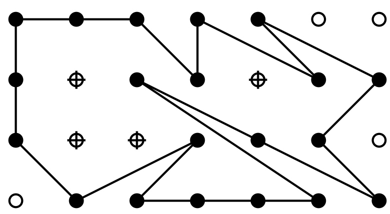


Figura 1.7: Polígono de Pick de área 13.

Este polígono de Pick tem 4 pontos no seu interior e 20 pontos sobre os lados. Pelo teorema, sua área será de $\frac{20}{2} + 4 - 1 = 13$, o que também pode ser verificado.

Demonstração. A prova do teorema segue os seguintes passos:

(a) Provaremos que o teorema funciona para retângulos posicionados horizontalmente.

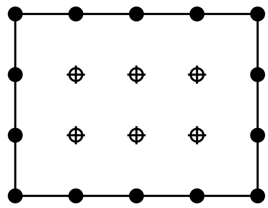


Figura 1.8: Retângulo posicionado horizontalmente.

A área do retângulo R é dada pelo comprimento da base multiplicado pela altura. Se a base mede b e a altura h, note que existem $2b + 2h = L_R$ coordenadas inteiras sobre os seus lados, assim como $(b-1) \times (h-1) = bh - b - h + 1 = I_R$ no seu interior. Colocando na fórmula do teorema, isto se torna

$$\frac{L_R}{2} + I_R - 1 = (b+h) + (bh - b - h + 1) - 1 = bh = A_R, \qquad (1.1)$$

o que mostra que estes retângulos respeitam o teorema.

(b) Vamos mostrar agora que o teorema funciona para triângulos retângulos cujos catetos estão posicionados verticalmente e horizontalmente. Lembremos que a área do triângulo é metade da área do retângulo em que ele fica inscrito. A figura a seguir exemplifica o que queremos dizer.

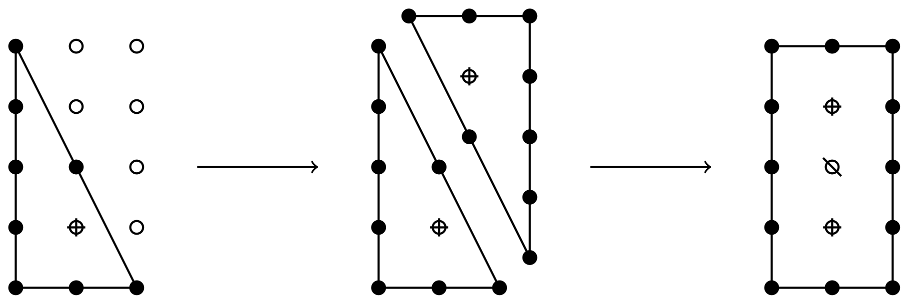


Figura 1.9: Triângulo posicionado verticalmente.

Seja T um triângulo posicionado verticalmente, qualquer, com todos os vértices sobre pontos do reticulado, e D_T o número de pontos do reticulado sobre a sua hipotenusa. Seja R o retângulo definido pelo triângulo. Usando a imagem anterior como exemplos, podemos notar que o número de pontos do reticulado sobre os lados do retângulo é dado por $L_R = 2L_T - 2D_T + 2$ e o número de pontos do reticulado no interior do retângulo é dado por $I_R = 2I_T + D_T - 2$ (atenção ao subtrair ou adicionar os pontos sobre a hipotenusa, pois eles aparecem uma vez em cada triângulo).

Então, pelo demonstrado em (a), a área do triângulo é dada por

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{2}A_R \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{L_R}{2} + I_R - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2L_T - 2D_T + 2}{2} + 2I_T + D_T - 3\right) \\ &= \frac{1}{2}(L_T - D_T + 1 + 2I_T + D_T - 3) \\ &= \frac{L_T}{2} + I_T - 1, \end{aligned} \tag{1.2}$$

como queríamos demonstrar.

(c) Usando os resultados de (a) e (b), vamos mostrar que o teorema funciona para triângulos quaisquer. Para isto, note que um triângulo qualquer, com vértices sobre pontos do reticulado, pode ser definido através de um retângulo e triângulos retângulos, que respeitam o teorema. Veja um exemplo na imagem abaixo:

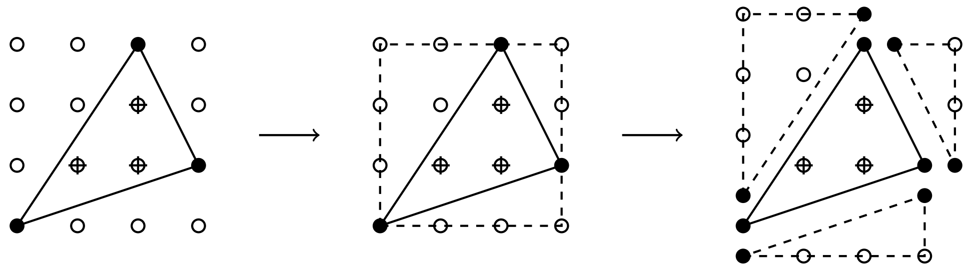


Figura 1.10: Triângulos quaisquer.

Assim, seja T um triângulo qualquer, e R, T_1, T_2 e T_3 o retângulo e os triângulos retângulos definidos por T. Então temos que

$$A_T = A_R - (A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3}). \tag{1.3}$$

Note agora que, por (a):

$$A_R = \frac{L_R}{2} + I_R - 1, \tag{1.4}$$

onde

$$L_R = L_{T_1} + L_{T_2} + L_{T_3} - L_T, \tag{1.5}$$

e

$$I_R = I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + L_T + I_T - 3. \tag{1.6}$$

Também, por (b):

$$A_{T_i} = \frac{L_{T_i}}{2} + I_{T_i} - 1, i \in \{1,2,3\}. \tag{1.7}$$

Substituindo as igualdades (4), (5), (6) e (7) em (3), vem que

$$\begin{aligned} A_T &= A_R - (A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3}) \\ &= \frac{L_T}{2} + I_T - 1, \end{aligned} \tag{1.8}$$

como queríamos demonstrar.

(d) Agora, no passo final, mostraremos por indução no número de lados que qualquer polígono de Pick respeita o teorema.

Para isto vamos usar o fato de que todo polígono de Pick de $n \geqslant 4$ lados pode ser dividido em dois outros polígonos de Pick, cada um com menos de n lados, através de um corte que liga dois vértices. As duas partes ficam com um lado em comum.

Por exemplo:

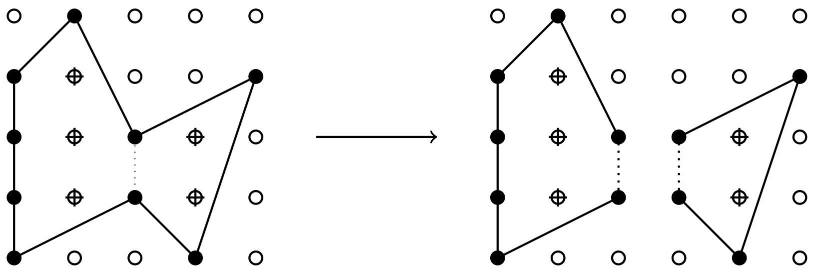


Figura 1.11: Passagem de indução.

Indução:

Os triângulos são todos os polígonos de Pick com $n = 3$ lados, e vimos em (c) que todos os triângulos respeitam o teorema de Pick.

Suponha que o teorema de Pick seja verdadeiro para todos os polígonos de Pick que tenham até $n = k \geqslant 3$ lados. Para os polígonos de Pick com $k+1$ lados, faça um corte entre dois vértices do polígono e separe-o em dois pedaços com menos de $k+1$ lados. Por hipótese, estas duas partes respeitam o teorema de Pick.

Chamaremos de P_1 e P_2 as duas partes do polígono P original. Assim sendo, temos que

$$A_P = A_{P_1} + A_{P_2}. \tag{1.9}$$

Chamaremos de K o número de pontos do reticulado sobre o lado comum de P_1 e P_2.

Note que

$$A_{P_i} = \frac{L_{P_i}}{2} + I_{P_i} - 1, i \in \{1, 2\}, \tag{1.10}$$

onde

$$L_{P_1} + L_{P_2} = L_P + 2K - 2, \tag{1.11}$$

e

$$I_{P_1} + I_{P_2} = I_P - K + 2, \tag{1.12}$$

Substituindo 1.10, 1.11 e 1.12 em 1.9,

$$\begin{aligned} A_P = A_{P_1} + A_{P_2} &= \frac{1}{2}(L_{P_1} + L_{P_2}) + (I_{P_1} + I_{P_2}) - 2 \\ &= \frac{1}{2}(L_P + 2K - 2) + (I_P - K + 2) - 2 = \frac{L_P}{2} + I_P - 1. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Assim, mostramos por indução forte que o teorema de Pick funciona para todos os polígonos de Pick. □

E o que acontece se tivermos um polígono com buracos?

Teorema 14. *Seja um polígono de Pick qualquer com vértices sobre os pontos de um reticulado. Se este polígono contiver n buracos que não se interceptam então sua área e definida por*

$$A = \frac{L}{2} + I + n - 1,$$

onde L e I representam o número de pontos sobre as fronteiras e no interior do polígono, respectivamente.

Por exemplo:

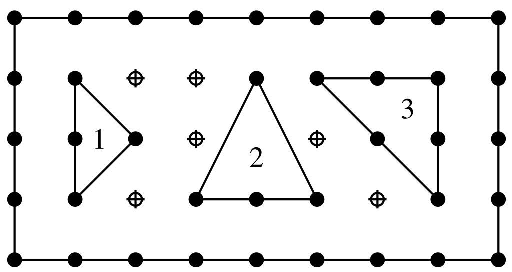


Figura 1.12: Polígono de Pick com três buracos.

Veja que $L = 38$, $I = 6$ e $n = 3$. Pelo teorema esta área vale $\frac{38}{2} + 6 + 3 - 1 = 27$, o que pode ser verificado.

Demonstração. Chame de L_0 o número de pontos da fronteira externa do polígono, L_i o número de pontos nos lados do i-ésimo buraco, I_0 e I_i o análogo para os interiores, e A_0 e A_i o análogo para as áreas. A_0 fica sendo, assim, a área total dentro da fronteira externa do polígono.

É natural que

$$A = A_0 - (A_1 + \cdots + A_n). \tag{1.14}$$

e, pelo teorema de Pick, que

$$A_i = \frac{L_i}{2} + I_i - 1, i \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{1.15}$$

Note agora que

$$L_0 = L - (L_1 + \ldots + L_n), \tag{1.16}$$

e que

$$I_0 = (I + \ldots + I_n) + (L_1 + \ldots + L_n). \tag{1.17}$$

Substituindo 1.15, 1.16 e 1.17 em 1.14 vem que

$$\begin{aligned} A &= \frac{L_0}{2} + I_0 - 1 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i}{2} + I_i - 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(L - \sum_{i=1}^{n} L_i\right) + I + \sum_{i=1}^{n}(L_i + I_i) - 1 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i}{2} + I_i - 1\right)\right) \\ &= \frac{L}{2} + I + n - 1. \end{aligned} \tag{1.18}$$

□

Teorema 15. *Seja um polígono de Pick qualquer com vértices sobre os pontos de um reticulado. Se este polígono contiver $n \geqslant 0$ buracos (polígonos de Pick), então sua área é definida por*

$$A = \frac{L}{2} + I + n - 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} K_i + \frac{K}{2},$$

onde L e I representam os pontos do reticulado sobre a fronteira e no interior do polígono, respectivamente, K_i é o número de pontos compartilhados na fronteira do i-ésimo buraco, K_0 é o número de pontos compartilhados na fronteira externa do polígono e K é o número de pontos do reticulado que são compartilhados por dois ou mais polígonos.

Por exemplo:

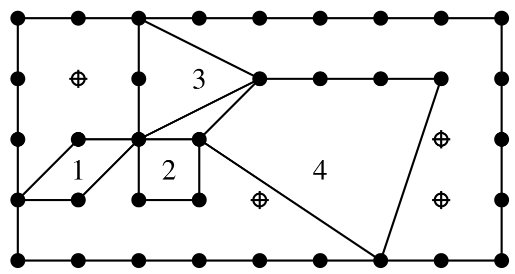


Figura 1.13: Polígono de Pick com quatro buracos.

Assim, $L = 35$, $I = 4$, $n = 4$, $K_0 = 3$, $K_1 = 2$, $K_2 = 2$, $K_3 = 3$, $K_4 = 3$ e $K = 6$. Pelo teorema este polígono com 4 buracos tem uma área de

$$\frac{35}{2} + 4 + 4 - 1 - \frac{1}{2}(3 + 2 + 2 + 3 + 3) + \frac{6}{2} = 21,$$

o que pode ser verificado.

Demonstração. Vamos chamar de A a área do polígono, $A_1, \ldots A_n$ as áreas dos buracos e

$$A_0 = A + A_1 + \ldots + A_n, \tag{1.19}$$

a área dentro da fronteira externa do polígono.

Ainda, chamaremos de K_i o número de pontos da fronteira do i-ésimo buraco que são compartilhados com outras fronteiras, K_0 os pontos da fronteira externa do polígono que são compartilhados com outros polígonos e K o número total de pontos da fronteira do polígono que são compartilhados.

Como todo buraco é um polígono de Pick,

$$A_i = \frac{L_i}{2} + I_i - 1, i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.20}$$

onde L_i e I_i são, respectivamente, os pontos sobre os lados e no interior do i-ésimo buraco.

Note que

$$A_0 = \frac{L_0}{2} + I_0 - 1, \tag{1.21}$$

onde L_0 representa os pontos sobre a fronteira externa do polígono, isto é,

$$L_0 = L - \left(\sum_{i=1}^{n} (L_i - K_i) + K - K_0 \right), \tag{1.22}$$

(mostre que a expressão entre parênteses representa os pontos da fronteira que estão dentro do polígono) e I_0 representa os pontos que estão dentro da fronteira externa, isto é,

$$I_0 = I + \left(\sum_{i=1}^{n}(L_i - K_i) + K - K_0\right) + (I_1 + \ldots + I_n). \tag{1.23}$$

Por 1.14 vem que

$$A = A_0 - (A_1 + \ldots + A_n). \tag{1.24}$$

Substituindo as identidades 1.15 a 1.18 em 1.19 no dá

$$\begin{aligned} A &= \frac{L_0}{2} + I_0 - 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i}{2} + I_i - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(L - \left(\sum_{i=1}^{n}(L_i - K_i) + K - K_0\right)\right) + I + \left(\sum_{i=1}^{n}(L_i - K_i) + K - K_0\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} I_i - 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i}{2} + I_i - 1\right) \\ &= \frac{L}{2} + I + n - 1 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} K_i - K\right). \end{aligned} \tag{1.25}$$

□

1.2.8 Jogos de subtração com palitos

Agora veremos alguns jogos envolvendo subtração de palitos. Um dos mais conhecidos é o NIM que foi o primeiro jogo atacado matematicamente no início do século XX. Começamos com alguns exemplos.

Exemplo 17. *Nesse jogo há dois jogadores, digamos E e D, e $n \geqslant 1$ palitos numa mesa. Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 palitos. O jogador E começa e eles jogam alternadamente. Ganha quem retirar o último palito.*

Pode ser provado que nesse tipo de jogo imparcial, seguindo as hipóteses do início da proposta possui, se jogado de maneira ótima, resultado dependente apenas de quem começa a jogar. Isso nos permite denominar de **G** uma posição que é vitoriosa para o primeiro jogador e de **P** uma posição ganhadora para o segundo competidor. Além disso, épossível ver que de uma configuração **P** só podemos ir para uma posição **G** após a primeira jogada e de uma posição **G** sempre existe estratégia que vai para posição **P**.

Na tabela abaixo descrevemos as posições vencedoras desse jogo marcando as posições **G** e **P** em função da quantidade de palitos:

Nesse caso é fácil verificar que se a quantidade de palitos não é múltiplo de 4, ou seja, se $n = 4q + r$, com $r \in \{1, 2, 3\}$, então E tem estratégia vencedora que é retirar r palitos na primeira jogada e depois ele retira $4 - t$, onde t é a quantidade retirada por D na jogada anterior. □

Tabela 1.3:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
G	G	G	P	G	G	G	P	G	G	G	P	$\cdots$

Observação. *Em alguns casos é considerado perdedor o jogador que retirar o último palito, denominada versão misère, que não será tratada nesse texto.*

Exemplo 18. NIM – versão clássica
Agora temos k pilhas de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ palitos em cada uma delas e dois jogadores E e D. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, aquele que estiver na sua vez pode retirar quantos palitos (pelo menos um) de apenas uma pilha. Ganha quem retirar o último palito.

Para esse jogo define-se a Soma Nim e o Teorema de Bouton (1901) dê a estratégia vencedora para o jogo:

Definição 14. *Sejam n um inteiro positivo e duas n-uplas de números inteiros $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$. Definimos a soma nim como sendo $(a_1\, a_2\, a_3\, \cdots\, a_n)_2 \oplus (b_1\, b_2\, b_3\, \cdots\, b_n)_2 = (c_1\, c_2\, c_3\, \cdots\, c_n)_2$, onde somamos coordenada a coordenada módulo 2: $c_i = a_i + b_i (mod\ 2)$.*

Por exemplo, $(26)_{10} \oplus (14)_{10} = (11010)_2 \oplus (01110)_2 = (10100)_2 = (20)_{10}$.

Teorema 16. Teorema de Bouton – 1901
Um jogo que tem k pilhas de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ é posição perdedora se, e só se, $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k = 0$.

A ideia da demonstração consiste nas seguintes observações que em conjunto provam o teorema: A posição terminal, em que todas pilhas estão vazias, satisfaz soma NIM zero. Além disso de uma configuração com soma NIM nula, $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0$, sempre será entregue uma posição com soma NIM diferente de zero, $b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_k \neq 0$. Por último, de uma posição com soma NIM não nula sempre existe uma estratégia que torna a soma NIM nula.

Para maiores detalhes veja Part I de [7].

Exemplo 19. Fibonacci NIM
Novamente há dois jogadores, E e D, e n ($n \geqslant 2$) palitos numa mesa. O jogador E começa e deve retirar de 1 até $n-1$ palitos. Em seguida, o jogador D deve retirar de 1 até o dobro da quantidade de palitos retirada por E. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, deve ser retirado de 1 até o dobro da quantidade de palitos retirada na jogada anterior. Ganha quem retirar o último palito.

Faremos uma tabela para ver quem tem estratégia vencedora para alguns valores de n.

Tabela 1.4: Fibonacci NIM

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
D	D	E	D	E	E	D	E	E	E	E	D	$\cdots$

Vamos supor que inicialmente temos 101 palitos. A representação de Zeckendorf desse número é dada por $101 = 89 + 8 + 3 + 1$. Nesse caso, o jogador E tem estratégia vencedora, bastando tirar 1 palito. Assim sobram 100 palitos, ou seja, $89 + 8 + 3$ e o jogador D poderá tirar 1 ou 2 palitos e, independente da jogada de D, E pode deixar $89 + 8$ palitos. Veremos que E tem estratégia vencedora se, e só se, a quantidade de palitos não é um termo da sequência de Fibonacci e começa o jogo retirando o menor número na representação de Zeckendorf.

O exemplo acima apareceu numa situação em que há pedras no lugar de palitos assim abordaremos a versão abaixo que é equivalente.

Exemplo 20. OBM
Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leqslant k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leqslant m \leqslant 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.
Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

Solução: **Valentino Amadeus Sichinel**

Afirmamos que Arnaldo possui estratégia vencedora se, e somente se, N não pertence à sequência de Fibonacci. Se $N = F_n$ é um termo da sequência de Fibonacci, então Bernaldo possui estratégia vencedora.

Sejam a_n e b_n o número de pedras restantes na pilha após a n-ésima jogada de Arnaldo e o número de pedras restantes na pilha após a n-ésima jogada de Bernaldo, respectivamente. Por fins de simplicidade na escrita, façamos $b_0 = N$.

Além disso, seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n = F_{m_{1,n}} + F_{m_{2,n}} + \cdots + F_{m_{k_n,n}}$, $F_{m_{1,n}} > F_{m_{2,n}} > \cdots > F_{m_{k_n,n}}$, a expansão em base Fibonacci, de acordo com o Teorema de Zeckendorf, do número b_n.

Se N não é termo da sequência de Fibonacci, então a estratégia de Arnaldo consiste em retirar $F_{m_{k_n,n}}$ pedras da pilha após a n-ésima jogada de Bernaldo. Afirmamos que essa estratégia leva, sempre, à vitória. De fato,

(i) A estratégia sempre pode ser repetida, ou seja, se em um dado momento

Arnaldo retirou $F_{m_{k_n,n}}$ pedras da pilha, então em sua próxima jogada ele poderá retirar $F_{m_{k_{n+1},n+1}}$ pedras da pilha.

Prova: Veja que $a_{n+1} = F_{m_{1,n}} + F_{m_{2,n}} + \cdots + F_{m_{k_n-1,n}}$. Seja k a quantidade de pedras que Bernaldo tirou da pilha em sua $(n+1)$-ésima jogada. Temos $k < F_{m_{k_n-1,n}}$, já que $F_{m_{k_n-1,n}} \geqslant F_{(m_{k_n,n})+2} = F_{m_{k_n,n}} + F_{(m_{k_n,n})+1} > 2F_{m_{k_n,n}}$, pois, pelo Teorema de Zeckendorf, os termos da sequência somados na expansão de b_n são de índices não consecutivos). Assim, os primeiros $k_n - 2$ termos das expansão de b_{n+1} em base Fibonacci são exatamente $F_{m_{1,n}}, F_{m_{2,n}}, \cdots, F_{(m_{k_n-3,n})}$ e $F_{(m_{k_n-2,n})}$, já que a expansão de $(F_{m_{k_n-1,n}} - k)$ em base Fibonacci tem como maior termo um número menor que $F_{m_{k_n-1,n}}$, que é menor que $F_{m_{k_n-2},n-1}$. Basta mostrarmos, então, que o menor termo da expansão em base Fibonacci de $(F_{m_{k_n-1,n}} - k)$ é menor que ou igual a $2k$. Seja, então, $F_{m_{k_n-1,n}} - k = F_{l_1} + F_{l_2} + \cdots + F_{l_t}$ a expansão de $F_{m_{k_n-1,n}} - k$ em base Fibonacci. Temos $k = F_{m_{k_n-1,n}} - F_{l_1} - (F_{l_2} + F_{l_3} + \cdots + F_{l_t}) \geqslant F_{l_1+1} - F_{l_1} - (F_{l_2} + F_{l_3} + \cdots + F_{l_t}) = F_{l_1-1} - F_{l_2} - (F_{l_3} + \cdots + F_{l_t}) \geqslant F_{l_2+1} - F_{l_2} - (F_{l_3} + \cdots F_{l_t}) = F_{l_2-1} - F_{l_3} - (F_{l_4} + \cdots + F_{l_t}) \geqslant \cdots \geqslant F_{l_t-1}$. Como $F_{l_t} = F_{l_t-1} + F_{l_t-2} \leqslant 2F_{l_t-1}$, segue o que queríamos.

(ii) Se Arnaldo seguir a estratégia, Arnaldo vencerá.

Prova: Em cada jogada, cada um dos jogadores retira no mínimo uma pedra da pilha. Como a quantidade de pedras na pilha é finita, em algum momento todas as pedras terão sido retiradas e, portanto, sempre há um vencedor. Observemos então que, se Arnaldo seguir a estratégia, Bernaldo nunca poderá vencer. De fato, se $b_n = F_m$ para alguns m e n, então Arnaldo vence, pois, pelo que mostramos acima, Arnaldo sempre pode retirar uma quantidade de pedras igual ao menor número da expansão de b_n em base Fibonacci, seja qual for o natural n. Além disso, se $k_n \geqslant 2$, então Bernaldo deve retirar um número de pedras menor que $F_{m_{k_n-1,n}}$ em sua $(n+1)$-ésima jogada, deixando, portanto, um número de pedras maior que 0 (veja que mostramos esse fato na demonstração do item (i). Assim, Bernaldo nunca vence e, como sempre há um vencedor, este deve ser Arnaldo.

Está concluída a demonstração de que, se N não é um número de Fibonacci, então Arnaldo possui estratégia vencedora. Resta considerarmos, então, o caso em que $N = F_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Ora, neste caso, Arnaldo não pode seguir a estratégia descrita no caso anterior, já que não pode retirar N pedras da pilha em sua primeira jogada. Sendo k a quantidade de pedras que Arnaldo retira em sua primeira jogada, Bernaldo terá de retirar um número entre 1 e $2k$, inclusive, de pedras da pilha. Pelo que mostramos no item (i) do caso anterior, Bernaldo pode fazê-lo de modo a retirar uma quantidade igual ao menor termo da expansão em base Fibonacci do número $N - k$, qualquer que seja o valor de $k < N$. Assim, Bernaldo pode seguir a estratégia descrita no caso anterior e, portanto, pode vencer a partida. $\square$

1.2.9 Exercícios

Definição 15. *Dados a um número real positivo e n um inteiro não negativo, definimos a torre de potências de ordem n de a como sendo*

$$a \uparrow\uparrow n = \begin{cases} 1, & se\ n = 0, \\ a^{a\uparrow\uparrow(n-1)}, & se\ n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Para $n \geqslant 1$, segue que $a \uparrow\uparrow n = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n}$.

Exercício 46. *Considere as sequências $x_n = 2 \uparrow\uparrow n$ e $y_n = 2017 \uparrow\uparrow n$. Prove que $x_{n+3} > y_n^2$, para todo $n \geqslant 2$. Em consequência, $x_{n+3} > y_n$, para todo $n \geqslant 1$.*

Exercício 47. *Uma escada tem 5 degraus. De quantas maneiras podemos chegar ao topo, subindo um ou dois degraus de cada vez? E se a escada tiver n degraus?*

Exercício 48. *Prove a validade das identidades abaixo, para todo $n \geqslant 1$:*

(a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

(b) $F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2} - 1$.

(c) $F_2 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

(d) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

(e) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

(f) $F_1F_2 + F_3F_4 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = \dfrac{4F_{2n+1}^2 - F_{2n+2}^2 + n - 3}{5}$.

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercício 49. Fórmula de Binet

Sejam $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Mostre, por indução em n, que $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, para todo $n \geqslant 0$.

Exercício 50. *Prove que:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i F_i = -F_n.$$

Exercício 51. *Prove o resultado abaixo:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}F_i}{n+1-i}\binom{n}{i} = \begin{cases} \dfrac{2F_{n+1}}{n+1}, & se\ n\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Definição 16. *A expansão de Cantor de um número inteiro positivo n é uma soma da forma*

$$n = a_m \cdot m! + a_{m-1} \cdot (m-1)! + \cdots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!,$$

onde cada a_j é um inteiro com $0 \leqslant a_j \leqslant j$ e $a_m \neq 0$.

Exercício 52.

(a) Prove, por indução em m, que $\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} j \cdot j! = m! - 1,$ *para todo $m \geqslant 2$.*

(b) Mostre que todo número inteiro positivo tem uma única expansão de Cantor.

Exercício 53. *Mostre que todo número racional positivo tem expansão única na forma*

$\dfrac{a_1}{1!} + \dfrac{a_2}{2!} + \cdots + \dfrac{a_k}{k!},$ *onde* $0 \leqslant a_1, 0 \leqslant a_2 < 2, 0 \leqslant a_3 < 3, \ldots, 0 < a_k < k$.

Exercício 54. *Considere o mesmo problema das Torres de Hanói com uma terceira regra: um disco só pode ser movido para uma haste adjacente, ou seja, se o disco estiver na haste A só pode ser movido para a haste B, da haste B pode ser movido para A ou C, e da haste C só pode ir para a B. Conjecture uma fórmula em função do número de discos n e prove a mesma por indução ou usando a mesma estratégia usada no texto.*

Exercício 55. The Reve's Puzzle*: Considere o problema das Torres de Hanói com 4 hastes: A, B, C e D. Inicialmente há n discos de diâmetros diferentes, fincados inicialmente na haste A, nas mesmas condições do problema original. O objetivo, seguindo as duas regras acima, é passá-las para a haste D. Nesse caso as hastes B e C funcionam como intermediárias. Descubra o número mínimo de movimentos necessários para o resolver o problema para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5. Consegues conjecturar uma fórmula para n discos?*

Observação. *Até o momento não se conhece o número mínimo de movimentos para resolver o problema com n discos. Há uma conjectura, formulada em 1941, de que o número mínimo de movimentos necessários é igual ao número de movimentos usados por um algoritmo criado por Frame e Stewart (Conjectura de Frame-Stewart).*

Exercício 56. *Uma Torre de Hanói dupla contém $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada um dos tamanhos. As regras continuam as mesmas: mover um disco de cada vez e não é permitido colocar um disco sobre outro menor.*

(a) Quantos movimentos são necessários para transferir os $2n$ discos da torre A para a C, supondo que discos de mesmo tamanho sejam idênticos? Conjecture uma fórmula para o número mínimo de movimentos e prove-a.

(b) *Suponha agora que discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes e o objetivo é mudá-los da haste A para a C, mantendo a ordem de cores em todas as jogadas. Conjecture uma fórmula para o número mínimo de movimento e prove-a.*

Exercício 57. *Uma Torre de Hanói dupla contém* $3n$ *discos de* n *tamanhos diferentes, dois de cada um dos tamanhos. As regras continuam as mesmas: mover um disco de cada vez e não é permitido colocar um disco sobre outro menor.*

(a) *Quantos movimentos são necessários para transferir os* $3n$ *discos da torre A para a C, supondo que discos de mesmo tamanho sejam idênticos? Conjecture uma fórmula para o número mínimo de movimentos e prove-a.*

(b) *Suponha agora que discos de mesmo tamanho são pintados com cores diferentes e o objetivo é mudá-los da haste A para a C, mantendo a ordem de cores em todas as jogadas. Conjecture uma fórmula para o número mínimo de movimento e prove-a.*

Exercício 58. *Seja* n *um número ímpar, maior que 5 e não divisível por 3. Mostre que o tabuleiro de damas* $n \times n$ *com um quadrado removido pode ser ladrilhado com triminós.*

Exercício 59. *Mostre que um tabuleiro de damas* 5×5 *com um quadrado do canto removido pode ser ladrilhado por triminós.*

Exercício 60. *Encontre um tabuleiro de damas* 5×5 *com um quadrado removido que não pode ser ladrilhado com triminós. Demonstre que, nesse caso, o ladrilhamento por triminós é impossível.*

Exercício 61. *Mostre que um tabuleiro de damas tridimensional* $2^n \times 2^n \times 2^n$ *(*$n \geqslant 1$*), em que falta um cubo* $1 \times 1 \times 1$*, pode ser preenchido com cubos* $2 \times 2 \times 2$ *cada um com um cubo* $1 \times 1 \times 1$ *removido.*

Exercício 62. *Suponha que você possua 12 moedas, todas iguais exceto uma que é falsa e tem peso diferente de uma verdadeira (não sabemos se a falsa pesa mais ou menos que uma verdadeira). Você tem uma balança de dois pratos mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em por algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada.*

(a) *Mostre que 3 pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada e descobrir se é mais leve ou mais pesada.*

(b) *Consegues resolver o mesmo problema com 13 moedas? E com 14 moedas?*

Exercício 63. *Suponha que temos* m *moedas, todas iguais exceto uma que tem peso ligeiramente diferente das demais (não se sabe se maior ou menor), e uma balança de dois pratos.*

(a) *Mostre que se* $m \leqslant \dfrac{3^n - 3}{2}$*, então é possível determinar com* n *pesagens qual é a moeda diferente, e se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.*

(b) *Mostre que se* $m = \dfrac{3^n - 1}{2}$*, então é possível determinar com* n *pesagens qual é a moeda diferente, mas nem sempre é possível dizer se ela é mais pesada ou mais leve que as outras.*

(c) *Mostre que se* $m > \dfrac{3^n - 1}{2}$*, então nem sempre é possível determinar qual é a moeda diferente com apenas* n *pesagens.*

Definição 17. *Para cada* $n \geqslant 1$*, definimos a sequência de frações de Farey de ordem* n *como sendo o conjunto*

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \frac{p}{q} : 0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n,\ mdc(p,q) = 1 \right\}.$$

Por exemplo $\mathcal{F}_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \mathcal{F}_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \mathcal{F}_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$,

$$\mathcal{F}_4 = \left\{ \tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1} \right\} \text{ e } \mathcal{F}_5 = \left\{ \tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1} \right\}$$

Exercício 64. *Prove que:*

(a) *se* $n \geqslant 2$*, então* $\mathcal{F}_n$ *tem um número ímpar de elementos.*

(b) *se* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *são dois termos consecutivos de* $\mathcal{F}_n$*, então* $bc - ad = 1$.

(c) *se* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ *e* $\frac{a_3}{b_3}$ *são três termos consecutivos de* $\mathcal{F}_n$*, então* $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}$.

Exercício 65. *Mostre que todo número racional tem infinitas representações como soma de frações unitárias distintas.*

Exercício 66. *Mostre que qualquer fração* p/q *com* p *e* q *inteiros positivos pode ser representada por uma fração egípcia, isto é,* p/q *é a soma de infinitas frações unitárias distintas.*

Exercício 67. *Para cada* $n \geqslant 3$*, existem* n *frações unitárias distintas cuja soma é igual a 1.*

Exercício 68. *Nesse jogo há dois jogadores, digamos E e D, e* $n \geqslant 1$ *palitos numa mesa. O jogador E começa e eles jogam alternadamente. Ganha quem retirar o último palito. Para cada regra abaixo diga quem tem estratégia vencedora e qual a estratégia.*

(a) *Uma jogada consiste em retirar* 1 *ou* 2 *palitos.*

(b) *Uma jogada consiste em retirar* $1, 3$ *ou* 4 *palitos.*

(c) *Fixa* $\ell \geqslant 1$ *e uma jogada consiste em retirar de 1 a* ℓ *palitos.*

(d) *Uma jogada consiste em retirar pelos menos um e até a metade dos palitos presentes na mesa, quando for a sua vez.*

Exercício 69. *Temos 2 pilhas de palitos, uma com 7 e outra com 15 e dois jogadores E e D. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, aquele que estiver na sua vez pode retirar quantos palitos (pelo menos um) de apenas uma pilha ou a mesma quantidade em ambas as pilhas. Ganha quem retirar o último palito. Tente resolver o mesmo problema no caso em que as quantidades de palitos em cada pilha sejam m e n, para dois inteiros positivos m e n.*

Exercício 70. NIM binário
Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leqslant k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leqslant m \leqslant k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e a quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.
Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

Para resolver esse problema siga o roteiro abaixo.

(a) *Estude o caso em que N é ímpar e verifique que Arnaldo tem estratégia vencedora.*

(b) *Considere o caso em que N deixa resto 2 na divisão por 4 e verifique que Arnaldo tem estratégia vencedora.*

(c) *Estude o caso em que N é múltiplo de 4, mas não é potência de 2*
($N = 12, 20, 24, 28, \ldots$) e verifique que Arnaldo tem estratégia vencedora.

(d) *No caso em que N é potência de 2, mostre que Bernaldo tem estratégia vencedora.*

Exercício 71. *Numa biblioteca há dez estantes com muitos livros em cada uma delas. Além disso, dispomos de uma balança eletrônica (como as que existem em farmácias, mas que pesa até 30 toneladas e tem precisão de 10 gramas). Resolva cada uma das situações abaixo:*

(a) *Sabemos que, em nove delas, cada livro pesa 1 kg e que, em uma delas, cada livro pesa 1,01 kg. Como descobrir, com uma pesagem apenas, qual a estante dos livros de 1,01 kg e, em consequência, quais são as estantes com os livros de 1kg?*

(b) *Em algumas estantes, cada livro pesa 1 kg e nas outras, cada livro pesa 1,01 kg, podendo inclusive haver apenas livros de um dos tipos. Como descobrir, com uma pesagem apenas, quais as estantes dos livros de 1kg?*

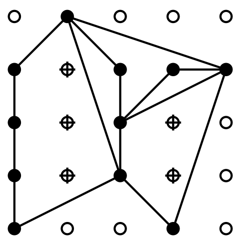
(c) *Em algumas estantes, cada livro pesa 1 kg, em outras 1,01 kg e nas restantes cada livro pesa 1,02 kg, podendo inclusive haver apenas livros de um dos tipos. Como descobrir, com uma pesagem, quais as estantes dos livros de 1kg, de 1,01 kg e de 1,02 kg?*

Exercício 72. *Prove que se um polígono for formado pela união de n polígonos de Pick, $P_1, \dots, P_n$, então*

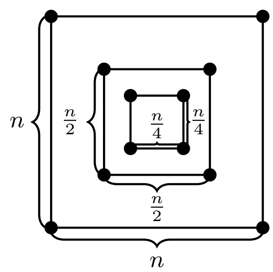
$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i + \sum_{i=1}^{n} I_i - n.$$

Exercício 73. *Calcule a área dos seguintes Polígonos através das equações de Pick:*

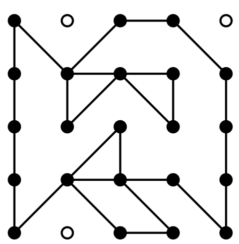
(a)



(b) *Seja n um inteiro positivo, múltiplo de 4. Nesse caso temos um quadrado Q_1 de lado n do qual extraímos um quadrado Q_2 de lado $n/2$ e adicionamos um quadrado Q_3 de lado $n/4$ contido em Q_2, conforme a figura abaixo.*



(c) *Fixa n um inteiro positivo e suponha que a distância horizontal e vertical de um ponto vizinho ao outro seja igual a n:*



Capítulo 2

Contagem

"Sempre que puder, conte."

– Francis Galton

Nesse capítulo abordamos alguns aspectos básicos e bastante conhecidos da contagem. Além disso, também veremos uma estratégia interessante para demonstrar certos resultados, a contagem dupla, onde fazemos uma contagem de duas maneiras diferentes.

2.1 Conceitos Básicos

2.1.1 Princípios Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 21. *Numa pastelaria são vendidos 9 tipos de pastéis salgados e 4 tipos de pastéis doces. Daniel pretende comer um pastel. Quantas são as escolhas possíveis?*

Daniel tem $9 + 4 = 13$ opções de escolha. $\square$

Esse é um exemplo que envolve o princípio aditivo ou simplesmente a operação de adiçao:

Definição 18. *Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*

Usaremos a notação $\#A$ para representar o número de elementos (cardinalidade) do conjunto A e assim o princípio aditivo pode ser generalizado:

Definição 19. *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos dois a dois disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$), então*

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i \,.$$

Exemplo 22. *Guilherme irá à mesma pastelaria citada acima e quer comer um pastel salgado e um doce. Quantos pedidos diferentes ele pode fazer?*

Sejam $\{S_1, \ldots, S_9\}$ o conjunto dos nove pastéis salgados e $\{D_1, \ldots, D_4\}$ o dos quatro pastéis doces.

As escolhas possíveis são $S_1D_1, S_1D_2, S_1D_3, S_1D_4, S_2D_1, S_2D_2, \ldots, S_9D_4$ que dá um total de $9 \times 4 = 36$ escolhas possíveis. □

O exemplo acima está relacionado com o Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio Multiplicativo:

Definição 20. *Suponha que você tenha que tomar n decisões sucessivas $d_1, d_2, ..., d_n$ e que a decisão d_i pode ser tomada de x_i maneiras. Então o número de maneiras de se tomarem as decisões sucessivas $d_1, d_2, ..., d_n$ é igual a $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$.*

Exemplo 23. *Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.*

Vamos começar com um exemplo e considerar o conjunto $A = \{a, b, c\}$.
Os subconjuntos de A são: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Note que cada elemento do conjunto A pode aparecer ou não no subconjunto. Quando escolhemos um subconjunto de A Assim há 2 possibilidades para o elemento a (pertencer ou não pertencer), duas para b e duas para c. E isso dá $2 \times 2 \times 2 = 8$ subconjuntos.

Agora suponha que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Cada elemento de A pode pertencer ou não a um determinado subconjunto e, como A possui n elementos, temos que A possui $2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^n$ subconjuntos. □

2.1.2 Permutações Simples, com Repetição e Circulares

Exemplo 24. *De quantas maneiras diferentes 8 alunos podem se sentar numa sala com 8 cadeiras?*

O primeiro aluno tem 8 opções, o segundo tem 7, o terceiro tem 6, o quarto tem 5, o quinto tem 4, o sexto tem 3, o sétimo tem 2 e para o oitavo resta 1 opção. Logo há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ maneiras dos 8 alunos sentarem nas 8 cadeiras. □

Definição 21. *O número de modos de ordenar n objetos distintos em fila (permutações simples de n objetos) é igual a*

$$P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Além disso, definimos $P_0 = 0! = 1$.

Definição 22. *Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.*

Anagrama: do grego ana = "voltar"ou "repetir"+ graphein = "escrever".

Um exemplo conhecido é o nome da personagem Iracema, anagrama de América, no romance de José de Alencar.

Exemplo 25. *Quantos são os anagramas da palavra FOLHA? Desses quantos começam com vogal?*

Como as 5 letras são diferentes, um anagrama da palavra FOLHA corresponde a colocação dessas cinco letras em fila, ou seja, temos $5! = 120$ anagramas.

Os anagramas que iniciam com vogal são da forma O_ _ _ _ ou A_ _ _ _ . Em cada um dos casos devemos calcular a quantidade de filas com as letras restantes, ou seja, temos $4! = 24$ anagramas. Logo 48 anagramas da palavra FOLHA começam com vogal. □

Exemplo 26. *Quantos são os anagramas da palavra CAVALO?*

Essa palavra tem duas letras A e as demais são todas diferentes. Vamos supor que as letras A são A_1 e A_2 e assim todas as letras são diferentes. Logo teríamos $6! = 720$ anagramas. Mas, quaisquer duas palavras obtidas pela permutação de A_1 e A_2 são, verdade, a mesma palavra. Portanto temos $720/2 = 360$ anagramas. □

Exemplo 27. *Quantos são os anagramas da palavra BACANA?*

Nesse caso temos três letras A e as demais diferentes. Usando o mesmo raciocínio acima segue que a resposta é $6!/3! = 720/6 = 120$. □

Exemplo 28. *Quantos são os anagramas da palavra BANANA?*

Agora temos três letras A, duas letras N e uma letra B. Logo essa palavra tem $6!/(3!2!) = 720/12 = 60$ anagramas. □

Definição 23. *O número de modos que podemos colocar n objetos em fila , onde n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a $a_2, \ldots, n_r$ são iguais a a_r é igual a*

$$P_n^{n_1,n_2,..,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\ .$$

Exemplo 29. *Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?*

Antes des responder a essa questão, devemos lembrar que na nossa abordagem não é considerada a acentuação, ou seja, A e Á são consideradas letras iguais.

Assim temos $10!/(2!3!2!1!1!1!) = 151200$ anagramas. □

Exemplo 30. *De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?*

Num primeiro momento podemos imaginar que é suficiente ordenar as 5 crianças e assim teríamos $5! = 120$ maneiras. Mas as rodas $abcde$ e $eabcd$ são iguais, pois na rota importa apenas a posição relativa entre as crianças. Assim cada roda pode ser girada de cinco maneiras e a resposta correta é $5!/5 = 4! = 24$. Na figura abaixo temos duas soluções que são iguais por rotação. □

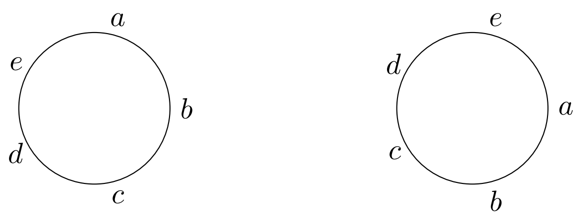


Figura 2.1: Cinco Crianças numa roda de ciranda.

Definição 24. *O número de permutações circulares de n objetos distintos, ou seja, a quantidade de maneiras que podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação é igual a*

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

2.1.3 Combinações Simples

Exemplo 31. *Um clube com 10 pessoas irá escolher uma diretoria composta por três membros: um presidente, um tesoureiro e um secretário. De quantos modos diferentes pode ser constituída essa diretoria?*

Nesse caso temos 10 opções de escolha do presidente, depois restam 9 opções para o tesoureiro e finalmente temos 8 alternativas de escolha do secretário e isso dá um total de $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ modos diferentes de escolher a diretoria. □

Exemplo 32. *Um clube com 10 pessoas irá escolher uma diretoria composta por um colegiado de três pessoas. De quantos modos diferentes pode ser constituído esse colegiado?*

Agora temos 10 opções para escolha de um dos membros, 9 para o segundoo e mais 8 para o terceiro. Mas, por exemplo, o colegiado formado por Antônio, Bernardo e Carlos pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes. Assim a quantidade de maneiras de escolher esse colegiado é igual a $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \dfrac{10!}{3!7!} = 60$. □

Definição 25. *O número de combinações simples de n tomados k a k (**número binomial**), ou seja, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto de n elementos é igual a*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para } 0 \leqslant k \leqslant n\,.$$

Observação. *Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. É fácil ver que a cada subconjunto B de A, com k elementos, $0 \leqslant k \leqslant n$, corresponde um subconjunto, o complementar de B em relação a A, com $n-k$ elementos.*

Portanto segue que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, *para todo* $0 \leqslant k \leqslant n$.

2.1.4 Combinações Completas

Exemplo 33. *Encontre o número de soluções inteiras não negativas da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$.

Vamos representar as soluções como quadras de números inteiros não negativos $(x_1, x_2, x_3, x_4), x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geqslant 0$. Uma estratégia que podemos usar para contar o número de soluções é representar cada uma delas num diagrama de quadras e ruas, contando todos os caminhos que vão do ponto O até o ponto A, sendo permitido apenas dois movimentos: subir ou deslocar para a direita. Veja na figura abaixo a representação das soluções $(1, 3, 2, 0)$ e $(2, 1, 1, 2)$.

Note que em qualquer solução temos que subir 6 quadras e fazer 3 deslocamentos para a direita. Isso corresponde ao número de anagramas da "palavra" $SSSSSSDDD$. Portanto o número de soluções é igual a $\frac{9!}{6!3!} = 84$.

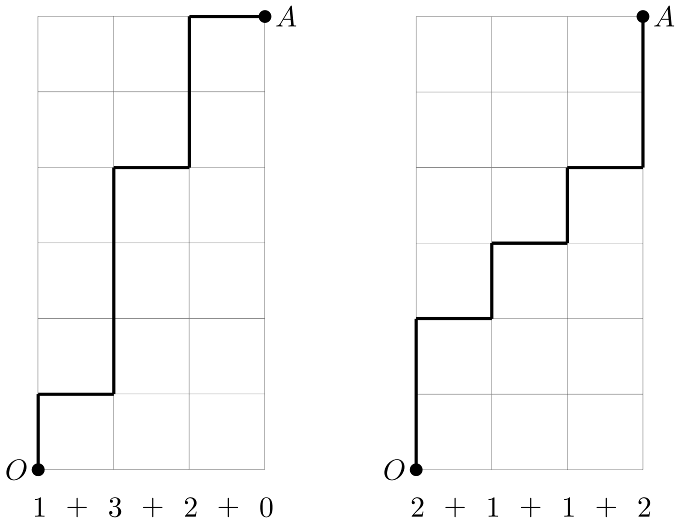


Figura 2.2: Combinações Completas

Teorema 17. Combinações Completas
Sejam r e m números inteiros positivos. O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$ é igual a $C^m_{r+m-1} = C^{r-1}_{r+m-1}$.

Demonstração. Nesse caso precisamos fazer um percurso num diagrama de quadras e ruas de O até A, em que subimos r quadras e nos deslocamos $m - 1$ vezes para a direita, que é equivalente a contar a quantidade de anagramas da palavra $\underbrace{S \ldots S}_{r}\underbrace{D \ldots D}_{m-1}$ e isso é igual a C^m_{r+m-1}. $\square$

Exemplo 34. *De quantas maneiras podemos escolher 3 bolas de sorvete numa lancheria que oferece 17 sabores diferentes?*

Nesse caso precisamos encontrar o de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 17$. Como vimos acima a quantidade de escolhas possíveis é igual a $C^3_{3+17-1} = \dfrac{19!}{3!16!} = 969$. $\square$

Em alguns casos precisamos encontrar o número de solução inteiras positivas de uma equação da forma $y_1 + y_2 + \dots y_r = n$, onde $n \geqslant r \geqslant 1$. Nesse caso podemos reescrever a equação na seguinte forma $(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \cdots + (y_r - 1) = n - r$. Agora trocando $y_i - 1$ por x_i e $n - r$ por m, o problema se resume a encontrarmos o número soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$. Assim temos o seguinte resultado:

Corolário 18. *Sejam r e n números inteiros positivos, com $n \geqslant r$. O número de soluções inteiras positivas da equação $y_1+y_2+\cdots+y_r = n$ é igual a $C^{n-r}_{r+n-r-1} = C^{n-r}_{n-1} = C^{r-1}_{n-1}$.*

2.1.5 Exercícios

Exercício 74. *Oito homens e oito mulheres são candidatos para formar uma comissão com 5 pessoas.*

(a) Quantas são as possibilidades de formar tal comissão se dela devem participar exatamente 2 homens?

(b) Quantas são as possibilidades de formar tal comissão se dela devem participar pelo menos 2 homens?

Exercício 75. *De quantos modos podemos arrumar em fila 6 livros diferentes da Matemática, 4 livros diferentes de Física e 3 livros diferentes de Química, de modo que os livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?*

Exercício 76. *Quantos são os anagramas da palavra ITAQUAQUECETUBA? Desses quantos começam por vogal?*

Exercício 77. *De quantos modos podemos dividir 7 pessoas em um grupo de 4 pessoas e outro de 3 pessoas?*

Exercício 78. *De quantas maneiras podemos dividir 8 alunos em dois grupos de 4 alunos cada?*

Exercício 79. *Um número é dito peroba se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números perobas de cinco dígitos existem?*

Exercício 80. *Quantos são os anagramas da palavra PERIGOSA em que as quatro vogais aparecem em ordem alfabética? (As quatro vogais não precisam ficar em posições consecutivas.)*

Exercício 81. *Quantas são soluções inteiras positivas da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ *que têm exatamente duas variáveis iguais a* 1*?*

Exercício 82. *Uma loja vende bombons de 7 sabores: avelã, chocolate branco, chocolate preto, coco, menta, morango e nozes. Eles são vendidos em caixas com 12 unidades.*

(a) Supondo que seja possível o cliente escolher o sabor de cada uma das 12 unidades, quantas são as escolhas possíveis para uma caixa?

(b) Se um cliente quiser colocar na caixa pelo menos um bombom de cada sabor, quantas são as escolhas possíveis?

(c) Se um cliente quiser comprar uma caixa com pelo menos três e no máximo cinco bombons de avelã, quantas são as escolhas possíveis?

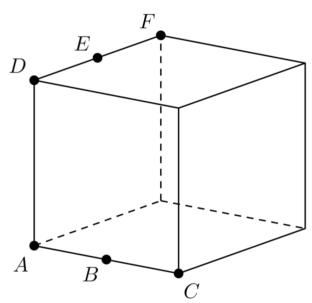
(Não é necessário que haja todos os tipos nas caixas)

Exercício 83. *No campeonato interplanetário de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um resultado é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Lanoicanretni não sofreu nenhuma derrota e tem 16 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou.*

Quantas sequências ordenadas de resultados o Lanoicanretni poderia ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades são, por exemplo, (V, E, E, V, E, V, V, E) e (E, V, V, V, V, V).

Exercício 84. Profmat

Considere os pontos A, B, C, D, E *e* F *de um cubo distribuídos como na figura abaixo.*



Determine a probabilidade de,

(a) escolhidos ao acaso 3 pontos distintos dentre os 6 dados, eles determinarem um único plano.

(b) escolhidos ao acaso 4 pontos distintos dentre os 6 dados, eles serem coplanares.

Exercício 85. *De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os nove algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de três algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?*

$$\_\,\_\,\_ > \_\,\_\,\_ > \_\,\_\,\_ \,.$$

Exercício 86. Profmat
Considere o conjunto de todos os números naturais com quatro algarismos tais que os algarismos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente decrescente.

(a) Quantos elementos possui tal conjunto?

(b) Se escrevermos tais números em ordem crescente, que número ocupa a 109^a *posição?*

Exercício 87. Profmat

(a) Escrevendo todos os anagramas da palavra PROFMAT e distribuindo-os como se fosse num dicionário (ordem alfabética), teremos como primeira "palavra"AFMOPRT, como segunda AFMOPTR, e assim por diante. Que palavra ocupará a posição 2015 nessa lista?

(b) Considere a palavra HOMOMORFISMO. Quantos anagramas podem ser escritos de modo que duas letras O nunca fiquem juntas?

Exercício 88. Profmat
Uma escola pretende formar uma comissão de 6 pessoas para organizar uma festa junina. Sabe-se que há 8 professores e 20 alunos que são candidatos a participar da comissão.

(a) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor.

(b) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor e dois alunos.

(c) Um aluno resolveu o item (b) acima da seguinte maneira:

"Devemos primeiramente selecionar um professor dentre os oito (C_8^1). Escolhido um professor, devemos, em seguida, escolher dois alunos dentre os vinte (C_{20}^2). Finalmente, escolhidos um professor e dois alunos, devemos escolher 3 pessoas quaisquer das 25 que restaram para formar a comissão de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos (C_{25}^3). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos é igual a $C_8^1 \times C_{20}^2 \times C_{25}^3$."

A solução proposta por este aluno está correta? Caso não esteja, identifique e explique o erro deste aluno.

2.2 O Binômio de Newton e Contagem Dupla

Definição 26. *Uma demonstração combinatória de uma identidade é aquela que usa argumentos de contagem para demonstrar que os dois lados de uma identidade fazem a contagem dos mesmos objetos, mas de maneiras diferentes.*

Exemplo 35. *(***Identidade de Pascal ou Relação de Stifel***)*
Se k e n são inteiros positivos tais que $k \leqslant n$, então

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Solução: Vamos provar esse resultado de duas maneiras.

(a) Aplicando a definição de número binomial ao segundo membro da igualdade acima segue que:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$$

$$\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{k(n-k+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

(b) Suponha que de um grupo de $n+1$ pessoas tenham que ser formada uma comissão com k pessoas. Por definição de número binomial segue que o lado esquerdo da igualdade é uma solução possível para o problema. Por outro lado, fixemos uma pessoa, digamos P. Vamos considerar as comissões que contém P e as comissões que não contém P. O número de elementos do primeiro conjunto é igual a $\binom{n}{k-1}$, pois como P já faz parte, resta escolher $k-1$ entre as demais n. Já, o número de comissões sem P é igual a $\binom{n}{k}$. Portanto segue o resultado. □

Teorema 19. O Binômio de Newton

Se a e b são números reais e n é um número inteiro positivo, então:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i .$$

Demonstração. Novamente daremos duas provas, uma usando indução em n e outra através de combinatória (contagem dupla).

(a) Para $n = 1$ temos que $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1$.

Agora vamos supor que o resultado vale até um certo $k \geqslant 1$.

Para $n = k+1$ temos que $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i =$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1} + b^{k+1} =$$

Faremos uma mudança de índices nas dois últimos somatórios: no primeiro trocamos i por j e no segundo $i+1$ por j e assim segue que:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^{k+1-j}b^j + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k+1-j}b^j + b^{k+1} =$$

$$a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right]a^{k+1-j}b^j + b^{k+1}$$

Usando a relação de Stifel e como $\displaystyle\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$ temos que

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}b^j + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} =$$

$$\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}b^j\,.$$

(b) Agora uma demonstração combinatória.

Temos que $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. Assim segue que os termos desse produto são da forma $a^{n-i}b^i$ para $0 \leqslant i \leqslant n$.
Para contar a quantidade de vezes que o termo $a^{n-i}b^i$ aparece na soma, temos que escolher $n-i$ vezes o a a partir de n parcelas e os outros i termos no produto ficam iguais a b. Portanto o coeficiente de $a^{n-i}b^i$ é $\binom{n}{n-i}$, que é igual a $\binom{n}{i}$. $\square$

Proposição 20. *Considere uma tabela $\ell \times c$ com zeros e uns, sendo C_j a soma dos números na coluna j, para $j \in \{1, \ldots, c\}$. Suponha que exista t tal que, para cada par de linhas, existam exatamente t colunas que tenham um em ambas as linhas. Então*

$$t\binom{\ell}{2} = \sum_{j=1}^{c}\binom{C_j}{2}.$$

Demonstração. Basta contar pares de uns na mesma coluna. Seja A o conjunto de tais pares. Lembre que $\#A$ denota a quantidade de elementos do conjunto A.

(i) **Por linhas:** Cada par de linhas tem exatamente t pares de uns na mesma coluna. Como há $\binom{\ell}{2}$ pares de linhas, segue que $\#A = \binom{\ell}{2} \cdot t$.

(i) **Por colunas:** Na coluna j há C_j uns e, portanto, $\binom{C_j}{2}$ pares de uns na mesma coluna. Somando sobre as colunas obtemos $\#A = \sum_{j=1}^{c} \binom{C_j}{2}$.

Igualando os resultados para $\#A$ segue a proposição. □

A contagem dupla pode ser usada para provar a existência de algo e a estratégia é provar por contradição.

Exemplo 36. IMC
Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 *participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.*

Solução: Suponha que o resultado é falso, ou seja, que para cada par de estudantes existe um problema que nenhum deles resolveu. Vamos contar problemas não resolvidos por pares de estudantes.

Considere a tabela com seis linhas, uma para cada problema, e 200 coluna, uma para cada estudante. Colocamos 1 na linha i e coluna j se, e só se, o aluno j não resolveu o problema i.

Tabela 2.1:

	1	2	3	...	200
Problema 1	1	0	0	...	0
Problema 2	1	0	0	...	0
Problema 3	0	1	1	...	0
Problema 4	1	1	1	...	1
Problema 5	1	0	1	...	0
Problema 6	0	0	0	...	1

Os problemas não resolvidos por pares de estudantes são pares de uns na mesma linha. Seja A o conjunto dos pares de uns na mesma linha. Façamos dois cálculos:

(i) **Por linhas:** Como pelo menos 120 estudantes fizeram cada problema, no máximo $200 - 120 = 80$ não fizeram e assim cada linha tem, no máximo, $\binom{80}{2}$ pares. Logo $\#A \leqslant 6 \cdot \binom{80}{2} = 6 \cdot 40 \cdot 79 < 240 \cdot 80 = 19200$.

(i) **Por colunas:** Como cada par de estudantes não resolveu pelo menos um problema, temos que $\#A \geqslant \binom{200}{2} = 199 \cdot 100 = 19900$.

Mas os dois cálculos acima conduzem a uma contradição. Portanto existem dois estudantes que, juntos, resolveram todos os problemas. □

2.2.1 Exercícios

Exercício 89. OBM
A bola de futebol que surgiu na Copa do Mundo de 1970 *é feita com* 32 *peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas sã as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?*

Exercício 90. OBM
Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

Exercício 91. OBM
No triminó marciano, as peças têm 3 *números cada (diferente do dominó da Terra, onde cada peça tem apenas* 2 *números). Os números no triminó marciano também variam de* 0 *a* 6*, e para cada escolha de* 3 *números (não necessariamente distintos) existe uma e somente uma peça que contém esses* 3 *números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?*

Exercício 92. OBM 1992
Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo o empate, cada jogador ganhou $1/2$ *ponto; caso contrário, o vencedor ganhou* 1 *ponto e o perdedor* 0 *pontos. Participaram homens e mulheres e cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres. Mostre que o número total de participantes é um quadrado perfeito.*

Exercício 93. *Prove a identidade abaixo usando contagem dupla e depois com o Binômio de Newton*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n\ .$$

Exercício 94. *Prove a identidade abaixo de duas maneiras diferentes: uma usando contagem dupla e outra com o Binômio de Newton.*

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Exercício 95. *Prove a identidade abaixo de duas maneiras diferentes: uma usando contagem dupla e outra com o Binômio de Newton.*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercício 96. *Prove a identidade abaixo de duas maneiras diferentes: uma usando contagem dupla e outra com o Binômio de Newton.*

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Exercício 97. *Prove a identidade abaixo de duas maneiras diferentes: uma usando contagem dupla e outra com o Binômio de Newton.*

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Exercício 98. Identidade de Lagrange
Se n é um inteiro não negativo, prove a identidade abaixo de duas maneiras diferentes.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Basta mostrar o resultado abaixo e usar a Relação de Stifel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}.$$

Exercício 99. Identidade de Euler ou Convolução de Vandermonde
Prove de duas maneiras diferentes a Identidade abaixo.
Se m, n e p são inteiros não negativos tais que $m \geqslant p$ e $n \geqslant p$ então:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}.$$

Exercício 100. Identidade de Fermat
Forneça um argumento combinatório para estabelecer a identidade:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}.$$

Exercício 101. *Encontre uma prova combinatória para estabelecer a identidade:*

$$\binom{n}{i}2^{n-i} = \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}, \ i \leqslant n.$$

Exercício 102. *Prove a identidade através de uma demonstração combinatória*

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n+1}{k}^2 = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

Exercício 103. *Definimos por D_n o número de permutações de $I_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}$ sem pontos fixos (um elemento k é um ponto fixo quando ele ocupa a posição k na permutação. Usando o princípio da inclusão-exclusão podemos mostrar que*

$$D_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) .$$

A partir das informações acima, prove que:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-k} .$$

Exercício 104. IMO
Vinte e uma garotas e vinte e um rapazes participaram de uma competição matemática. Sabe-se que:

(i) cada estudante resolveu no máximo seis problemas.

(ii) para cada par com uma garota e um rapaz, existe um problema que ambos resolveram.

Prove que existe um problema que foi resolvido por três garotas e três rapazes.

Exercício 105. *(***Olimpíada Chinesa – 1994***)*
Prove a identidade utilizando um raciocínio combinatório

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n} .$$

Capítulo 3

O Princípio das Gavetas de Dirichlet

"É preciso colocar os pensamentos no lugar dos cálculos."
– Gustav Peter Lejeune Dirichlet

O presente capítulo trata de um princípio bastante simples, mas extremamente útil para resolver uma diversidade de problemas de Matemática em que o objetivo é provar a existência de alguma função, de um ponto ou outro objeto.

3.1 O Princípio das Gavetas de Dirichlet - PGD

Exemplo 37. *Num grupo de 13 pessoas há pelo menos duas que nasceram no mesmo mês.*

De fato, pois se não houvesse duas ou mais pessoas nascidas no mesmo mês, teríamos no máximo 12 pessoas. □

O enunciado do resultado principal desse capítulo em sua versão mais simples é o seguinte:

Proposição 21. O Princípio das Gavetas de Dirichlet – PGD
Se $n+1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta conterá dois ou mais objetos.

Demonstração. Este resultado é óbvio, pois se nenhuma gaveta tivesse dois ou mais objetos, teríamos no máximo n objetos. □

Observação. *Esse princípio também é chamado de Princípio da Casa dos Pombos e diz que se $n+1$ pombos habitarão n casas, teremos que ter pelo menos dois pombos em alguma casa.*

Agora veremos vários problemas em que será aplicado o PGD e neles sempre estará presente uma ideia bastante comum em Matemática: a existência. É muito frequente provarmos que determinado objeto matemático (número, ponto ou função) existe sem que saibamos exibi-lo concretamente. O problema a seguir retrata essa questão.

Exemplo 38. *Em Porto Alegre há pelo menos duas mulheres com a mesma quantidade de fios de cabelo na cabeça.*

Observações científicas mostram que uma pessoa tem, no máximo, 500 mil fios de cabelo na cabeça, assim temos as gavetas $0, 1, 2, \ldots 500000$. Como em Porto Alegre tem mais de 500001 mulheres (esses são os objetos!), segue o resultado. $\square$

Exemplo 39. *Se marcarmos* 13 *pontos no interior de um retângulo* 3×4*, mostre que existem dois pontos tais que sua distância é menor ou igual a* $\sqrt{2}$*.*

Na figura abaixo vemos o retângulo dividido em 12 quadrados de lado 1.

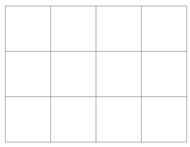


Figura 3.1: Retângulo 3×4

Pelo PGD há pelo menos dois pontos, digamos A e B, num mesmo quadrado. A distância máxima num quadrado de lado 1 é igual a diagonal que nesse caso mede $\sqrt{2}$ e assim segue o resultado. $\square$

Há ainda outra maneira de escrever o enunciado acima do PGD.

Proposição 22. *Se colocarmos* k *objetos em* m *gavetas* ($k > m$)*, então em pelo menos uma gaveta haverá ao menos*

$$\left\lfloor \frac{k-1}{m} \right\rfloor + 1 \text{ objetos.}$$

Demonstração. Se cada gaveta tivesse no máximo $\lfloor (k-1)/m \rfloor$ objetos, então teríamos no máximo

$$m \left\lfloor \frac{k-1}{m} \right\rfloor \leqslant m \cdot \frac{k-1}{m} = m - 1 < m \text{ objetos, o que dá uma contradição.}$$

$\square$

Agora veremos três problemas bastante conhecidos.

Exemplo 40. *Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então dois desses números são primos entre si.*

Considere os n pares de números: 1 e $2, 3$ e $4, \ldots, 2n-1$ e $2n$. Como são escolhidos mais do que n números, pelo PGD, há pelo menos dois pertencentes ao mesmo par. Como dois números do mesmo par são consecutivos, eles são primos entre si. □

Exemplo 41. *Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.*

Dado m um inteiro positivo, vimos que uma consequência do TFA nos diz que ele pode ser escrito de modo único na forma $m = 2^k b$, onde $k \geqslant 0$ e b é ímpar. Denominamos b a parte ímpar de m.

No conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ só podem existir n possíveis partes ímpares diferentes: $1, 3, \ldots, 2n-1$. Se escolhermos mais do que n números nesse conjunto segue, pelo PGD, que existem dois números $r, s \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ que têm a mesma parte ímpar, ou seja, $r = 2^k b$ e $s = 2^t b$. O maior desses números será múltiplo do menor. □

Exemplo 42. *Seja $a \neq 0$ um algarismo no sistema decimal. Todo número natural n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e a.*

Consideramos os $n+1$ números $a, aa, aaa, aaaa, ..., \underbrace{aa...aa}_{n+1}$ (esses são os objetos!). Sabemos que os possíveis restos na divisão por n são $0, 1, 2, \ldots, n-1$ (essas são as gavetas!). Pelo PGD, segue que pelo menos dois dos $n+1$ números acima devem ter o mesmo resto na divisão por n, digamos que $M = aa\ldots aa$ (p algarismos) e $N = aa\ldots aa$ (q algarismos), com $p > q$. então $M - N$ é um número formado apenas por ZEROS e a. □

Uma generalização do PGD é dado pela

Proposição 23. *Se $mn+1$ objetos serão colocados em m gavetas, então haverá pelo menos um gaveta com pelo menos $n+1$ objetos.*

Demonstração. De fato, se nenhuma gaveta tivesse mais de n objetos então teríamos no máximo mn objetos, o que dá uma contradição.

□

Um dos problemas favoritos de Erdös, que aparece num artigo de Erdös e Szekeres sobre problemas de Ramsey é o resultado abaixo.

Proposição 24. *Toda sequência $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ de $mn+1$ números reais distintos possui uma subsequência crescente de $m+1$ termos ou uma subsequência decrescente $n+1$ termos.*

Demonstração. Para cada a_i, seja t_i o número de termos da maior subsequência crescente começando em a_i. Se $t_i \geqslant m+1$, para algum i, então temos uma subsequência crescente de tamanho $m+1$. Agora supõe que $t_i \leqslant m$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, mn+1\}$. Considere a função $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}\} \rightarrow \{1, \ldots, m\}, f(a_i) = t_i$. Logo temos $mn+1$ objetos para m gavetas e pela proposição anterior existe algum $s \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(a_i) = s$ para $n+1$ números a_i. Sejam $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}$ $(j_1 < j_2 < \ldots < j_{n+1})$ esses números. Agora considere dois números consecutivos a_{j_k}, a_{jk+1}. Se $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, então teríamos um sequência crescente de comprimento s começando em $a_{j_{k+1}}$ e, consequentemente, uma sequência crescente de tamanho $s+1$ começando em a_{j_k}, o que dá uma contradição pois $f(a_{j_k}) = s$. Portanto $a_{j_1} > a_{j_2} > \ldots > a_{j_{n+1}}$ que é uma subsequência com $n+1$ termos. □

Definição 27. *Dados dois inteiros não nulos a e b, definimos o máximo divisor comum de a e b como sendo o maior inteiro d pelo qual ambos a e b são divisíveis.*

Teorema 25. Bèzout
Sejam a e b dois números inteiros não nulos e d o máximo divisor comum de a e b. Então existem dois números inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

Demonstração. Podemos dividir a equação acima por d e ficamos com $rx + sy = 1$, onde $r = a/d$ e $s = b/d$. Se obtivermos uma solução para essa equação, basta multiplicá-la por d e teremos uma solução para a igualdade original. Temos que o máximo divisor comum de r e s é 1. Considere o conjunto $A = \{r, 2r, \ldots, sr\}$. Iremos mostrar que há um elemento no conjunto A que deixa resto 1 na divisão por s. Vamos supor que nenhum dos números do conjunto A deixe resto 1 na divisão por s. Assim os restos possíveis na divisão de um elemento por A (esse é o conjunto dos objetos!) são $0, 2, \ldots, s-1$ (essas são as gavetas!). Pelo PGD temos que existem dois elementos do conjunto A, digamos kr e ℓr, tais que $k, \ell \in \{0, 2, \ldots, s-1\}$ e $k < \ell$. Assim temos que $(\ell - k)r$ é divisível por s. Como r e s não tem divisores comuns segue que $\ell r - k$ é divisível por s, mas isso dá uma contradição, pois $0 < \ell - k < b$. Logo existe um elemento no conjunto A, digamos xr que deixa resto 1 na divisão por s, ou seja, $xr = sy + 1$ para algum número inteiro y. Portanto $rx + s(-y) = 1$ e isso prova o resultado. □

Proposição 26. *Suponha que vocês tem n gavetas e seja m um inteiro positivo. Se tivermos p_1 objetos na primeira gaveta, p_2 objetos na segunda e assim por diante e se na n-ésima gaveta tiver p_n objetos e além disso $\dfrac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n} \geqslant m+1$, então em pelo menos uma gaveta haverá $m+1$ ou mais objetos.*

Demonstração. De fato, se $p_i \leqslant m$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, então
$\dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \leqslant \dfrac{m + \cdots + m}{n} = \dfrac{nm}{n} = m$, mas isso dá uma contradição.
□

Exemplo 43. *São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de azul e vermelho. No disco A há 100 setores azuis e 100 vermelhos, mas não sabem em que ordem. No setor não sabemos quantos são azuis e nem quantos são vermelhos. Colocamos o disco A sobre o B, de modo que os setores de A fiquem exatamente sobre os setores de B. Então é possível, girando o disco A, obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de A tenham a mesma cor que os correspondentes de B.*

Coloquemos o disco A sobre B e seja a_1 a quantidade de setores sobrepostos que têm cores iguais. Gire A de um setor, ou seja, $360/200°$ deixando B fixo e seja a_2 o número de setores sobrepostos com cores coincidentes. Faça esse processo e obtenha $a_3, a_4, \ldots, a_{200}$. Assim a quantidade de coincidência após 200 giros é igual a $a_1 + a_2 + \cdots + a_{200}$ e esse valor é igual a 100×200. De fato, se fixarmos um setor do disco B, digamos que seja azul, haverá 100 posições em que a cor dele coincidirá com algum de A. Logo a quantidade de coincidências é igual a 100 vezes o número de setores de B e assim

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{200}}{200} = 100 > 99\ .$$

Se a média aritmética dos a_i é maior que 99, então pelo menos um deles deverá ser maior ou igual a 100. Portanto em algum momento o número de coincidências é maior ou igual a 100. $\square$

Exemplo 44. *Fixa n um número inteiro positivo e considere o conjunto $\{0,1\}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \{0,1\}\}$ das sequências binárias de comprimento n. Seja S o subconjunto de $\{0,1\}^n$ com a seguinte propriedade: para quaisquer elementos distintos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ temos que x e y tem pelo menos três coordenadas diferentes. Então S tem, no máximo, $\dfrac{2^n}{n+1}$ elementos.*

A distância de Hamming $d(x, y)$ entre duas sequências $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ é dada pela quantidade de coordenadas em que x e y são diferentes, ou seja, $d(x, y) = \#\{i : x_i \neq y_i; i = 1, \ldots, n\}$.

Dado um elemento $x \in \{0,1\}^n$, definimos a bola unitária centrada em x como sendo $B(x) = \{z \in \{0,1\}^n : d(x, z) \leqslant 1\}$. Em outras palavras, $B(x)$ é o subconjunto de $\{0,1\}$ formador por todas as sequências que diferem de x em, no máximo, uma coordenada. $B(x)$ tem $n+1$ elementos: x e todas as n sequências que diferem de x em uma coordenada. Além disso, $d(x, y) \geqslant 3$ é equivalente a $B(x) \cap B(y) = \emptyset$. Com isso, as bolas $B(x)$, com $x \in S$, são disjuntas e assim $\cup_{x \in S} B(x) = \#S \cdot (n+1)$. Como $\{0,1\}$ tem 2^n elementos segue que $\#S \cdot (n+1) \leqslant 2^n$, ou seja, $\#S \leqslant \dfrac{2^n}{n+1}$. $\square$

Proposição 27. *Seja α um número real qualquer e N um inteiro positivo. Dentre os números $\alpha, 2\alpha, \ldots, (N+1)\alpha$ existe um tal que sua diferença com certo número inteiro é menor ou igual a $1/N$.*

Demonstração. Considere os números $a_i = i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor$ para $i \in \{1, \ldots, N+1\}$. Assim segue que $0 \leqslant a_i < 1$, para todo $1 \leqslant i \leqslant N+1$.

Se definirmos $I_i = \left[\dfrac{i-1}{N}, \ \dfrac{i}{N}\right)$, temos que $[0,1) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ e, pelo PGD,

segue que existem $1 \leqslant k < \ell \leqslant N+1$ tais que $a_k, a_\ell \in I_j$ para algum $1 \leqslant j \leqslant N$.

Portanto $1 \leqslant \ell - k \leqslant N$, $\lfloor \ell\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$ e $(\ell - k)\alpha - (\lfloor \ell\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor) \leqslant 1/N$ e isso prova o resultado. □

Se α for irracional, é fácil mostrar que a última desigualdade acima é estrita. Além disso, temos o resultado abaixo.

Proposição 28. *Um número real α é irracional se, e somente se, existem duas sequências de números inteiros $p_1, p_2, \ldots$ e $q_1, q_2, \ldots$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} q_n\alpha - p_n = 0 \text{ e } q_n\alpha - p_n \neq 0, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Demonstração. Supõe que α é irracional. Para cada inteiro positivo n, pela Proposição acima, existem inteiros positivos p_n e q_n, com $1 \leqslant q_n \leqslant n$ tais que $|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{n}$.

Assim segue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n\alpha - p_n = 0$ e $q_n\alpha - p_n \neq 0$, para todo n, pois α é irracional.

Reciprocamente, supõe que $q_n\alpha - p_n \neq 0$, para todo n e $\lim_{n\to\infty} q_n\alpha - p_n = 0$. Se α é racional, digamos $\alpha = a/b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$. Como $q_n\alpha - p_n \neq 0$ segue que

$$|q_n\alpha - p_n| = \left|\frac{q_n a - p_n b}{b}\right| \geqslant \frac{1}{b}\ .$$

Mas isso contradiz o fato de que $\lim_{n\to\infty} q_n\alpha - p_n = 0$. □

Corolário 29. *Se α é um número irracional e n é um inteiro positivo, então existe um número racional $\dfrac{p}{q}$ tal que $1 \leqslant q \leqslant n$ e $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{nq}$.*

Corolário 30. *$\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração. Se n é inteiro positivo e como $(\sqrt{2})^2 = 2$ segue, pelo binômio de Newton, que $(\sqrt{2}-1)^n = q_n\sqrt{2} - p_n$, com p_n, q_n inteiros.
Mas $|\sqrt{2}-1| < 1$ implica que $\lim_{n\to+\infty} q_n\sqrt{2} - p_n = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0$.
Além disso, como $\sqrt{2} - 1 \neq 0$ temos que $q_n\sqrt{2} - p_n = (\sqrt{2}-1)^n \neq 0$ e portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

□

Teorema 31. Dirichlet
Um número real α é irracional se, e somente se, é infinito o conjunto dos números racionais p/q tais que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\ .\ (\star)$$

Demonstração. Se α é racional, digamos $\alpha = \dfrac{a}{b}$, com b inteiro positivo, considere o conjunto A formados pelos racionais p/q que satisfazem $(\star)$. Assim segue que

$$\frac{1}{b|q|} \leqslant \frac{|aq - pb|}{|bq|} = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\ .$$

Logo $|q| < b$ e portanto o conjunto A é finito.

Agora vamos supor que α é irracional. Dado n inteiro positivo, pelo Corolário acima, existe um número racional p/q tal que

$$1 \leqslant q \leqslant n \text{ e } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{nq}\ .$$

Logo $1/nq \leqslant 1/q^2$ e com isso temos $(\star)$ para o racional p/q.

Falta mostrar que o conjunto dos números da forma p/q satisfazendo $(\star)$ é infinito.Vamos supor que $p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots, p_m/q_m$ são números racionais satisfazendo $(\star)$. Como α é irracional, segue que os números $a_k = \left|\alpha - \dfrac{p_k}{q_k}\right|$, para $k \in \{1, \ldots, m\}$, são todos positivos. Seja a o menor valor entre todos os a_k. Então existe n inteiro positivo tal que $1/n < a$.

Pelo corolário acima existe um número racional p/q, com com $1 \leqslant q \leqslant n$, tal que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{nq} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Portanto obtivemos mais um número que satisfaz $(\star)$, pois $1/nq \leqslant 1/q^2$, e seguindo o mesmo raciocínio verificamos que o conjunto de tais números irracionais é infinito.

$\square$

Agora vamos brincar um pouco de imaginação.

Você está olhando um jogo de futebol e aí surge a seguinte questão:

Qual é a probabilidade de que pelo menos dois dos 22 jogadores em campo façam aniversário no mesmo dia (dia e mês)? (*)

* É muito provável que você nunca tenha pensado nisso durante uma partida de futebol...

Para o problema abaixo vamos supor que tenhamos 365 possíveis datas de aniversário, excluindo a possibilidade de alguém aniversariar no dia 29 de fevereiro.

Exemplo 45. Princípio Probabilístico das Gavetas de Dirichlet ou Problema dos Aniversários
Em um grupo de N pessoas, a probabilidade de que haja pelo menos duas que façam aniversário no mesmo dia é igual a

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (366 - N)}{365^N}.$$

Nesse caso é mais fácil calcular a probabilidade de, num grupo de N pessoas, não haver duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia.
O número de possibilidades para os aniversários das N pessoas é igual a 365^N. O número de casos favoráveis a que todos façam aniversário em datas distintas é $365 \times 364 \times \cdots \times (366 - N)$. Logo a probabilidade de **não** haver coincidência de aniversários entre duas pessoas é igual a

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (366 - N)}{365^N}.$$

Portanto a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia é igual a

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (366 - N)}{365^N}. \qquad \square$$

Observação. *Veja na tabela abaixo alguns valores, onde N é quantidade de pessoas e P é a probabilidade (aproximada com duas casas após a vírgula) de haver pelo menos duas que fazem aniversário no mesmo dia.*

Tabela 3.1: Problema dos Aniversários

N	5	10	15	20	23	25	30	40	45	50
P	0,03	0,12	0,25	0,41	0,51	0,57	0,71	0,89	0,94	0,97

3.1.1 Exercícios

Exercício 106. *Mostre que $(a - b)(a - c)(b - c)$ é par, para quaisquer a, b e c inteiros.*

Exercício 107. *Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros, mostre que o produto*

$$\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \text{ é divisível por } n!$$

Exercício 108. *Os pontos de uma reta são coloridos com 12 cores. Prove que existem dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.*

Exercício 109. *Os números naturais de* 1 *a* 10 *estão divididos em três grupos. Mostre que o produto dos números de um dos grupos tem que ser maior que* 153*.*

Exercício 110. *Sabendo que* 21 *alunos colheram* 200 *laranjas, prove que pelo menos dois deles colheram a mesma quantidade de laranjas.*

Exercício 111. *Considere* n *números inteiros* $a_1, \ldots, a_n$*, não necessariamente distintos. Mostre que existe um conjunto de números consecutivos* $a_{k+1}, \ldots, a_\ell$ *tais que a soma* $\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ *é múltiplo de* n*.*

Exercício 112. OBM 2008
Vamos chamar de garboso o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$*. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.*

Exercício 113. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ *elementos distintos do conjunto* $\{1, 2, \ldots, 106\}$*. Mostre que o conjunto* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ *possui dois subconjuntos não vazios e disjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.*

Exercício 114. *Sejam* $A = \{n \in \mathbb{N} : mdc(n, 10) = 1\}, b = a_1a_2 \ldots a_k$ *um número com* k *algarismos e se* $n \in \mathbb{N}$*,* $M(n)$ *é o conjunto dos múltiplos de* n*. Agora considere o conjunto* $B = \{b, bb, bbb, bbbb, \ldots\}$*, onde* $bb \ldots b$ *é a justaposição dos blocos* $b = a_1a_2 \ldots a_k$*.*
Se $n \in A$*, prove que* $M(n) \cap B$ *é infinito.*

Exercício 115. *Mostre que se escolhermos mais do que* n *números do conjunto* $\{1, 2, \ldots, 3n\}$*, então dois desses números, digamos* x *e* y*, são tais que* $xy + 1$ *ou* $4xy + 1$ *é um quadrado perfeito.*

Sugestão: Basta mostrar que se escolhermos mais do que n números no conjunto, teremos dois desses números, x e y, são tais que $|x - y| \leqslant 2$.

Exercício 116. *De* 1^o *de janeiro até 31 de outubro de 2015, uma pequena livraria de Rio Grande, que abre todos os dias, vendeu no mínimo um livro por dia e um total de 463 livros. Mostre que existiu um período de dias consecutivos em que foram vendidos exatamente 144 livros.*

Exercício 117. *Dados CINCO números reais arbitrários, mostre que existem dois deles, digamos* x *e* y*, tais que* $0 \leqslant \dfrac{x - y}{1 + xy} \leqslant 1$*.*

Exercício 118. *Guilherme teve os olhos vendados e com uma caneta fez 50 pontos numa cartolina quadrada com lado igual a 70 cm. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.*

Exercício 119. *Dadas 6 pessoas numa festa, prove que existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente. Suponha que a relação de conhecer é simétrica.*

Exercício 120. *Prove que se marcarmos 9 pontos em um cubo de aresta 2, haverá pelo menos dois deles cuja distância é menor ou igual a $\sqrt{3}$.*

Exercício 121. OBM 2012
Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ que não contêm dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

Exercício 122. *Prove que se escolhermos $n + 1$ números distintos no conjunto $\{1, \ldots, 2n - 1\}$, então existem pelo menos dois deles cuja soma é igual a $2n$.*

Exercício 123. *Numa festa com n pessoas há pelo menos duas que têm o mesmo número de conhecidos na festa. Suponha que a relação de conhecer é simétrica.*

Exercício 124. PROFMAT

(a) Considere um conjunto formado por 11 números inteiros positivos diferentes, menores do que 21. Prove que podemos escolher dois desses números tais que um divide o outro.

(b) Exiba um conjunto com 10 números inteiros positivos, menores do que 21, tais que nenhum deles é múltiplo de outro.

Exercício 125. *Prove que dados cinco pontos distintos sobre a esfera, existe um hemisfério fechado que contém pelo menos quatro pontos.*

Exercício 126. *Sejam A e B matrizes 2×2 com entradas inteiras tais que $A, A + B, A + 2B, A + 3B$ e $A + 4B$ são matrizes invertíveis cujas inversas têm entradas inteiras. Mostre que a matriz $A + 5B$ é invertível e que sua inversa tem entradas inteiras.*

Exercício 127.

(a) Mostre que entre nove números que não possuem divisores maiores que cinco, existem dois cujo produto é um quadrado.

(b) **IMO1985** *Dado um conjunto M com 1985 inteiros positivos distintos, nenhum dos quais tem divisores primos maiores do que 23, mostre que há 4 elementos em M cujo produto é uma quarta potência. Tente resolver o problema trocando 1985 por 1537.*

Exercício 128. *Prove que de qualquer conjunto com $2^{n+1} - 1$ números inteiros positivos sempre é possível escolher 2^n elementos tais que a soma destes é divisível por 2^n.*

Exercício 129. Identidade de Proizvolov
Suponha que o conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ foi dividido em dois subconjuntos com n elementos cada e os elementos do primeiro conjunto foram ordenados em ordem

crescente e os do segundo em ordem decrescente: $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ *e* $B = \{b_1 > b_2 > \ldots > b_n\}$. *Mostre que*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2 \ .$$

Exercício 130. *Seja* $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{2n}\}$ *um conjunto formado por números reais distintos. Se* $C = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$, *com* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n, b_1 > b >_2 > \ldots > b_n, c_1 < c_2 < \ldots < c_{2n}$, *então a soma abaixo independe da decomposição do conjunto* C *em dois conjuntos de* n *elementos.*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \ .$$

Exercício 131. *(IMO 2001) Sejam* $n_1, n_2, ..., n_m$ *inteiros com* m *ímpar. Denotemos por* $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *uma permutação dos inteiros* $1, 2, ..., m$, *e definamos* $f(x) = x_1 n_1 + \cdots + x_m n_m$. *Demonstre que existem duas permutações* a *e* b *tais que* $f(a) - f(b)$ *é divisível por* $m!$.

Exercício 132. *Os pontos de um plano são pintados usando três cores. Prove que existe um triângulo isósceles monocromático (os vértices têm a mesma cor).*

Exercício 133. *O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.*

Exercício 134. *O plano é pintado usando três cores (vermelho, preto e azul). Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.*

Observação. *Esse problema é impossível para* 7 *ou mais cores e está em aberto para* $4, 5$ *ou* 6 *cores.*

Exercício 135. *O plano é totalmente pintado usando duas cores (azul e vermelho). Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.*

Exercício 136. *Mostre que um triângulo equilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos equiláteros menores.*

Exercício 137. *Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras de modo que entre eles não haja três colineares. Prove que pelo menos um dos triângulos formado por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.*

Observação. *O problema acima continua válido se trocarmos* 37 *por* 19, *mas nesse caso a prova fica bem mais difícil, pois é necessário estudar vários casos.*

Exercício 138. *Em um grupo de* 29 *hobbits existem alguns deles que falam a verdade e os outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos eles se sentaram ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.*

(a) *Prove que pelo menos* 10 *hobbits falavam a verdade.*

(b) *É possível que exatamente* 10 *deles falem a verdade?*

Exercício 139. *Prove que existem* 1000 *números consecutivos entre os quais há exatamente* 20 *números primos.*

Exercício 140. 17 *estudantes conversam entre si aos pares. Cada um dos 17 estudantes conversa com todos os outros alunos. Todos falaram sobre três temas diferentes. Cada par de alunos falaram sobre um tópico. Prove que existem três estudantes que falaram sobre o mesmo tema entre si.*

Problema equivalente:

Em um grafo de 17 vértices todas as arestas são traçadas e pintadas de uma de três cores. Prove que existe um triângulo com as três arestas da mesma cor.

Exercício 141. IMO

Mostre que existem infinitos múltiplos de 1991 da forma $19999\ldots99991$.

Exercício 142. *Em um torneio de xadrez há* $2n+3$ *participantes. Cada par de participantes joga exatamente uma partida entre si. Os jogos são arranjados de modo que não haja dois jogos simultâneos e cada participante, após jogar uma partida, fica livre durante as próximas* n *partidas. Prove que um dos participantes que jogou na primeira partida também vai jogar a última partida.*

Exercício 143. *O plano é totalmente pintado de três cores: azul, preto e vermelho. Mostre que existe um triângulo retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.*

Exercício 144.

Prove que $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$ *é um número irracional.*

Exercício 145. *Se* p_j *o* j*-ésimo número primo, mostre que a soma abaixo é um número irracional.*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p_j}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$

Exercício 146. *Nove vértices de um icoságono (polígono de vinte lados) regular são pintados de vermelho. Prove que podemos encontrar três deles formando um triângulo isósceles.*

Exercício 147. *Seja* m *um inteiro positivo e* $\mathcal{G}$ *um polígono regular de* $2m+1$ *lados inscrito no círculo unitário. Mostre que existe uma constante* A*, que independe de* m*, com a seguinte propriedade: Para qualquer ponto* p *no interior de* $\mathcal{G}$*, existem dois vértices distintos* v_1 *e* v_2 *de* $\mathcal{G}$ *tais que*

$$||p - v_1| - |p - v_2|| < \frac{1}{m} - \frac{A}{m^3},$$

onde $|s - t|$ *denota a distância entre os pontos* s *e* t.

Exercício 148. Putnam 2000
Sejam a_j, b_j, c_j números inteiros, para $1 \leqslant j \leqslant N$. Supõe que para cada j, pelo menos um dos números a_j, b_j, c_j é ímpar. Mostre que existem inteiros r, s, t tais que $ra_j + sb_j + tc_j$ é ímpar para pelo menos $4N/7$ valores de j.

Exercício 149. IMO 2007
Numa competição de matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um clique se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um clique). O tamanho de um clique é o número de seus elementos. Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.
Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

Exercício 150. *Cada ponto do perímetro de um triângulo equilátero é pintado de uma de duas cores: azul e vermelho. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.*

Exercício 151. *Prove que para todo inteiro $n \geqslant 2$ existe um inteiro m tal que $k^3 - k + m$ não é divisível por n para todos os inteiros k.*

Exercício 152. *Cada ponto de coordenadas inteiras do plano é pintado de uma de três cores, digamos azul, preta e vermelha. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo isósceles com os três vértices da mesma cor.*

Exercício 153. OBM 2000
Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76). Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

Exercício 154. *Cada ponto do plano é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.*

Exercício 155. *Cada ponto de coordenadas inteiras do plano é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.*

Exercício 156. 100 *pessoas de* 50 *países, duas de cada país, estão sentadas em círculo ao redor de uma mesa.*
Prove que é possível dividir as 100 pessoas em dois grupos com 50 pessoas, de modo que não haja pessoas de mesmo país nem três pessoas consecutivas do círculo no mesmo grupo.

Capítulo 4

Dicas, Respostas e Soluções

"O professor de matemática tem uma grande oportunidade em mãos. Se preenche seu tempo apenas ensinando algoritmos, perde a oportunidade pois mata o interesse dos alunos e bloqueia seu desenvolvimento intelectual. Se, por outro lado, provoca-lhes a curiosidade através de problemas proporcionais a seu conhecimento e os acompanha com questões estimulantes, estará lhes oferecendo o desejo e os meios para o desenvolvimento de um pensamento independente."

– George Pólya

4.1 Princípio de Indução Matemática

4.1.1 Indução – Primeiros Passos

1. BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1 = 1^2$.
HI: Supõe que o resultado vale para um certo $k \geqslant 1 : 1 + 3 + \cdots (2k-1) = k^2$.
PI: Para $k+1$: $1+3+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1] =^{HI} k^2+2k+1 = (k+1)^2$.

2. BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$.
HI: Supõe que o resultado vale para um certo $k \geqslant 1 : 1 + 2^1 + \cdots 2^k = 2^{k+1} - 1$.
PI: Para $k + 1$ temos que $1 + 2^1 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} =^{HI} 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+1+1} - 1$ e assim segue o resultado.

3. BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $2^{2\cdot 1} - 1 = 4^1 - 1 = 3$ é divisível por 3.
HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : 4^k - 1 = 3\ell$, com ℓ inteiro. Assim $4^k = 3\ell + 1$.
PI: Para $k + 1$ temos que $4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 =^{HI} 4(3\ell + 1) - 1 = 3(4\ell + 1)$ e assim segue o resultado.

4. (a) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1 \cdot (1 + 1) = 2$ é divisível por 2.
HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : k(k + 1) = 2\ell$, para algum ℓ inteiro.

PI: Para $k+1$ temos que $(k+1)(k+2) = k(k+1)+2(k+1) =^{HI} 2\ell+2(k+1) = 2(\ell+k+1)$ e assim segue o resultado.
(b) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1^3 - 1 = 0$ é divisível por 6.
HI: Supõe que vale para um certo $k \geqslant 1 : k^3 - k = 6\ell$, para algum ℓ inteiro.
PI: Para $k+1$ temos que $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k(k+1) =^{HI+(a)} 6\ell + 3 \cdot 2t = 6(\ell + t)$.

5. Foi provado que $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \geqslant 1$ e assim basta provar que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$.

HI: Supõe que o resultado vale para $k \geqslant 1 : 1^3 + \cdots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$.

PI: Para $k+1$: $1^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 =^{HI} \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$

$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}.$$

6. BI: Para $n = 1$: Como $a_1 = 1$ é claro que $a_1^3 = a_1^2$.
Veremos que vale também para $n = 2$: $1 + a_2^3 = (1 + a_2)^2 = 1 + 2a_2 + a_2^2 \Leftrightarrow a_2^3 - a_2^2 - 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 \in \{-1, 0, 2\}$. Como a_2 é positivo segue que $a_2 = 2$.

HI: Suponha que $a_i = i$ vale até um certo $k \geqslant 2$.

PI: Para $k+1$ temos que $(a_1 + \cdots + a_k)^2 + a_{k+1}^3 =^{HI} a_1^3 + \ldots + a_k^3 + a_{k+1}^3 =$

$$(a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2 = (a_1 + \cdots + a_k)^2 + 2a_{k+1}(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1}^3 - 2a_{k+1}(a_1 + \cdots + a_k) - a_{k+1}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{k+1}^3 - 2a_{k+1}(1+2+\cdots+k) - a_{k+1}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{k+1}^3 - a_{k+1}^2 - 2a_{k+1}\tfrac{k(k+1)}{2} = 0.$$

Logo $a_{k+1} \in \{-k, 0, k+1\}$. Como a_{k+1} é positivo, então $a_{k+1} = k+1$.

7. (a) Essa parte é facilmente provada pelos cálculos abaixo:

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) = x^{k+1} + \frac{x^k}{x} + \frac{x}{x^k} + \frac{1}{x^k \cdot x} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} =$$

$$x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\ .$$

(b) Para $n = 1$ o resultado é óbvio.

Agora supõe que $x^j + \dfrac{1}{x^j}$ é inteiro para $j \in \{1, 2, \ldots, k-1, k\}$.

Como $x^k + \dfrac{1}{x^k}, x + \dfrac{1}{x}$ e $x^{k-1} + \dfrac{1}{x^{k-1}}$ são inteiros é claro que

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

também é inteiro e assim segue o resultado para $k + 1$.

8. (a) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $10^1 - 1 = 9$ é divisível por 9.
HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : 10^k - 1 = 9\ell$, com ℓ inteiro. Assim $10^k = 9\ell + 1$.
PI: Para $k+1$ temos que $10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 =^{HI} 10(9\ell+1) - 1 = 9(10\ell+1)$ e assim segue o resultado.

(b) Como $a - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0) = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_2 \cdot (10^2 - 1) + a_1 \cdot (10^1 - 1)$, e usando o fato de que $10^k - 1$ é múltiplo de 9, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $a = (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0) + 9q$. Desta igualdade seguem os critérios de divisibilidade por 3 e por 9.

9. (a) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $10^{2 \cdot 1} - 1 = 100 - 1 = 99 = 11 \cdot 9$ é divisível por 11.
HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : 10^{2k} - 1 = 11\ell$, com ℓ inteiro. Assim $10^{2k} = 11\ell + 1$.
PI: Para $k + 1$ temos que $10^{2(k+1)} - 1 = 10^2 \cdot 10^{2k} - 1 =^{HI} 100(11\ell + 1) - 1 = 11(100\ell + 9)$ e assim segue o resultado.

(b) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $10^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 11$ é divisível por 11.
HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : 10^{2k-1} + 1 = 11\ell$, com ℓ inteiro. Assim $10^{2k-1} = 11\ell - 1$.
PI: Para $k+1$ temos que $10^{2(k+1)-1} + 1 = 10^2 \cdot 10^{2k-1} + 1 =^{HI} 100(11\ell - 1) + 1 = 11(100\ell - 9)$ e assim segue o resultado.

(c) Foi provado acima que se k é ímpar, então $10^k + 1$ é divisível por 11 e, se k é par, então $10^k - 1$ é divisível por 11. Logo temos que
$a - [(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)] = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^5 + \cdots) - [(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)] = [a_1(10 + 1) + a_3(10^3 + 1) + a_5(10^5 + 1) + \cdots] + [a_2(10^2 - 1) + a_4(10^4 - 1) + \cdots] = 11q$.
Então $a = [(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)] + 11q$ e assim segue o resultado.

10. (a) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1000^{2 \cdot 1} - 1 = (1000 + 1)(1000 - 1)$ é divisível por 1001.

HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : 1000^{2k} - 1 = 1001\ell$, com ℓ inteiro. Assim $1000^{2k} = 1001\ell + 1$.
PI: Para $k+1$ temos que $1000^{2(k+1)} - 1 = 1000^2 \cdot 10^{2k} - 1 =^{HI} 1000^2(1001\ell + 1) - 1 = 1001(1000^2\ell + 999)$ e assim segue o resultado.

(b) BI: Para $n = 1$ é claro que vale, pois $1000^{2\cdot 1-1} + 1 = 1001$ é divisível por 11.
HI: Supõe que vale para $k \geqslant 1 : 1000^{2k-1} + 1 = 1001\ell$, com ℓ inteiro. Assim $1000^{2k-1} = 1001\ell - 1$.
PI: Para $k+1$ temos que $1000^{2(k+1)-1}+1 = 1000^2\cdot 10^{2k-1}+1 =^{HI} 1000^2(1001\ell - 1) + 1 = 11(1000^2\ell - 999)$ e assim segue o resultado.

(c) Pelos itens (a) e (b) temos que se k é ímpar, então $10^k + 1$ é divisível por $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; se k é par, então $10^k - 1$ é divisível por $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Assim segue que $a - [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots]$
$= (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^5 + \cdots)-$
$- [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots] = (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - a_2a_1a_0) + (a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_5a_4a_3) + (a_8 \cdot 10^8 + a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 - a_8a_7a_6) + (a_{11} \cdot 10^{11} + a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + a_{11}a_{10}a_9) + \cdots$
$= 0 + a_5a_4a_3(10^3 + 1) + a_8a_7a_6(10^6 - 1) + a_{11}a_{10}a_9(10^9 + 1) + \cdots$.
Então $a = [(a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots)] + 1001q$ e assim segue o resultado.

11. Vamos provar dois resultados usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, que serão utilizadas na passagem de indução.
Para $t \geqslant 1$, pela desigualdade das médias temos que $\sqrt{t(t+1)} \leqslant \dfrac{t + (t+1)}{2}$ e assim

(a) $2\sqrt{k} + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant 2\sqrt{k+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)} + 1 \leqslant 2(k+1) \Leftrightarrow$

$2\sqrt{k(k+1)} \leqslant 2k + 1 \Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)} \leqslant \dfrac{k + (k+1)}{2}$

A validade da última desigualdade implica na validade das demais.

(b) $2(\sqrt{k+1} - 1) + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant 2(\sqrt{k+2} - 1) \Leftrightarrow$

$2\sqrt{k+1} + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant 2\sqrt{k+2} \Leftrightarrow 2\sqrt{k+2} \leqslant \dfrac{2(k+1)+1}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{k+2}\sqrt{k+1} \leqslant 2k + 3 \Leftrightarrow \sqrt{(k+2)(k+1)} \leqslant \dfrac{(k+2) + (k+1)}{2}$

A validade da última desigualdade implica na validade das demais.

Com essas informações é fácil provar o resultado por indução.

12. BI: Para $n = 3$ vale o resultado, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180° = (3-2)180°$.

HI: Supõe que a soma dos ângulos interno de um polígono convexo de k lados, com $k \geqslant 3$, seja igual a $(k-2)180°$.
PI: Para $k+1$ podemos decompor o polígono em dois: um de k lados e um triângulo, conforme figura abaixo.

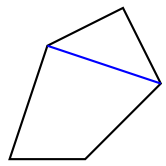


Figura 4.1: Passagem de indução

Portanto a soma dos ângulos internos de um polígono de $k+1$ lados será igual $(k-2)180° + 180° = (k+1-2)180°$.

13. Note que ao adicionarmos um novo vértice a um polígono convexo de k lados, então temos $k-1$ diagonais a mais.

14. Um polígono convexo não pode ter mais de três ângulos agudos, pois a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a $360°$.
Para $n = 4$ basta considerar o quadrilátero da figura abaixo, que pode ser representado no plano cartesiano com vértices $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,1)$ e $(2,0)$.

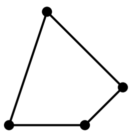


Figura 4.2: Quadrilátero com três ângulos agudos

Agora supõe que o resultado vale para um polígono de k lados. Para fazer a passagem de indução, precisamos fazer um corte (veja figura abaixo) em um dos ângulos não agudos. Com isso a quantidade de ângulos (e lados) do polígono aumenta uma unidade e ficam mantidos os três ângulos agudos.

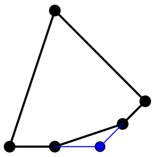


Figura 4.3: Passagem de indução

15. (a) Se ele acertar todas as perguntas, ele fará $1+2+2^2+\cdots+2^{20} = 2^{21}-1 = 2097151$ pontos.
(b) Nesse caso basta escrever a pontuação como soma de potências de 2 (representação binária).
Como $571113 = 1+2^3+2^5+2^6+2^7+2^9+2^{10}+2^{12}+2^{13}+2^{15}+2^{19}$, segue que ele acertou as questões $1, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16$ e 20.

16. (a) Calculemos alguns termos pela definição: $a_2 = a_1 + r = a + r, a_3 = a_2 + r = a + r + r = a + 2r, a_4 = a_3 + r = a + 2r + r = a + 3r$.
A partir destes cálculos conjecturamos que $a_n = a + (n-1)r$, para todo $n \geqslant 1$.
Vamos provar esta conjectura por indução em n.
Para $n = 1$ é claramente válida, pois $a_1 = a = a + (1-1)r$.
Supõe que o resultado é válido para um certo $k \geqslant 1$, ou seja, $a_k = a + (k-1)r$.
Para $k+1$ segue que $a_{k+1} = a_{k+1-1} + r = a_k + r = a + (k-1)r + r = a + (k-1+1)r = a + kr$ e portanto está provada a conjectura.
(b) Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ e usando o resultado acima podemos escrever a soma
$S_n = a+[a+r]+[a+2r]+\cdots+[a+(n-3)r]+[a+(n-2)r]+[a+(n-1)r]$, que também pode ser escrita alterando-se a ordem dos elementos da seguinte forma
$S_n = [a+(n-1)]+[a+(n-2)r]+[a+(n-3)r]+\cdots+[a+2r]+[a+r]+a$.
Somando os termos equivalentes nessas duas somas obtemos
$2S_n = [2a+(n-1)r]+[2a+(n-1)r]+[2a+(n-1)r]+\cdots+[2a+(n-1)r]+[2a+(n-1)r]+[2a+(n-1)r]$.
Logo $2S_n = n[2a+(n-1)r]$ e assim $S_n = \dfrac{n[2a+(n-1)r]}{2}$.
Vamos provar este resultado por indução em n.
Para $n = 1$ é fácil ver que $S_1 = a_1 = a = \dfrac{1 \cdot [2a+(1-1)r]}{2}$.
Agora supõe que o resultado vale para k.
Para $k+1$: $S_{k+1} = a_1+\cdots+a_k+a_{k+1} = \dfrac{n[2a+(k-1)r]}{2}+[a+(k+1-1)r] = \dfrac{2ka+k(k-1)r+2a+2kr}{2} = \dfrac{2a(k+1)+k(k+1)}{2} = \dfrac{(k+1)[2a+(k+1-1)r}{2}$
e portanto está provada a conjetura.
(c) Pelo item (a) temos que $a_n = a+(n-1)r$ e pelo item (c) $S_n = \dfrac{n[2a+(n-1)r]}{2}$.
Logo segue que $S_n = \dfrac{n[a+a+(n-1)r]}{2} = \dfrac{n[a+a_n]}{2}$.

17. Veja que $\dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Assim, substituindo alguns valores iniciais para $n \geqslant 2$, podemos conjecturar que $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k-1)k} = 1 - \dfrac{1}{n}$.
Para a indução, use que $\sum_{i=2}^{k+1} \dfrac{1}{(i-1)i} = \sum_{i=2}^{k} \dfrac{1}{(i-1)i} + \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

18. Seja $P(n)$ a proposição:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Para $n = 1$ temos que o resultado vale trivialmente.
Supõe que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{k}{a_1 \cdot a_{k+1}}.$$

Resta provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$.
De fato, pela hipótese de indução, temos que

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} =$$
$$\frac{k}{a_1 \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{k \cdot a_{k+2} + a_1}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} =_*$$

Como a_n é uma progressão aritmética (PA), podemos trocar a_{k+2} por $a_1 + (k+1)r$ e depois $a_1 + kr$ por a_{k+1}, onde r é a razão da PA. Assim, segue que

$$* = \frac{k[a_1 + (k+1)r] + a_1}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{(k+1)(a_1 + kr)}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{(k+1) \cdot a_{k+1}}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{k+1}{a_1 \cdot a_{k+2}}.$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.

19. Primeiro mostre a validade das identidades

$$\frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{r}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{r},$$

onde r é a razão da PA. Depois faça indução em n.

20. (a) Calculemos alguns termos pela definição: $a_2 = a_1 \cdot q = aq, a_3 = a_2 \cdot q = aq \cdot q = aq^2, a_4 = a_3 \cdot q = aq^2 \cdot q = aq^3$. A partir destes cálculos, conjecturamos que $a_n = aq^{n-1}$, para todo $n \geqslant 1$.
Vamos provar esta conjectura por indução em n.
Para $n = 1$ é claramente válida, pois $a_1 = a = aq^0 = aq^{1-1}$.
Supõe que o resultado é válido para um certo $k \geqslant 1$, ou seja, $a_k = aq^{k-1}$.
Para $k+1$ segue que $a_{k+1} = a_{k+1-1} \cdot q = a_k \cdot q = aq^{k-1} \cdot q = aq^k$ e portanto está provada a conjectura.

(b) Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e usando o resultado acima podemos reescrever a soma $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$.

Multiplique ambos os lados por q e assim $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots aq^{n-1} + aq^n$.
Logo $S_n - qS_n = a - aq^n$, ou seja, $(1-q)S_n = q(1-q^n)$ e podemos conjecturar

que $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, para todo $n \geqslant 1$, que será provado por indução em n.
Para $n = 1$ é fácil ver que $S_1 = a_1 = a = \dfrac{a(1-q)}{1-q}$.
Agora supõe que o resultado vale para um certo $n = k$.
Para $k+1$ temos que $S_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \dfrac{a(1-q^k)}{1-q} + aq^k = \dfrac{a - aq^k + aq^k - aq^{k+1}}{1-q} = \dfrac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$ e portanto está provada a conjectura.
(c) Pelo item (a) temos que $a_n = aq^{n-1}$ e pelo item (b) $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.
Portanto $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a - aq^{n-1}q}{1-q} = \dfrac{a - a_n q}{1-q}$.

21. (a) Calcule as primeira potências e conjecture que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^n = 5^{n-1}. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, para todo $n \geqslant 1$. A indução é simples e usa que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^2 = 5. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) Conjecture e depois prove que $\begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para $n \geqslant 1$.

(c) Use as identidades $\cos(a+b) = \cos\ a \cos\ b - \text{sen}\ a \text{sen}\ b$ e $\text{sen}(a+b) = \cos\ a \text{sen}\ b + \text{sen}\ a \cos\ b$., depois conjecture e prove que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos\ n\theta & -\text{sen}\ n\theta \\ \text{sen}\ n\theta & \cos\ n\theta \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

22. Lembre que $i^2 = -1$ e use as identidades $\cos(a+b) = \cos\ a \cos\ b - \text{sen}\ a \text{sen}\ b$ e $\text{sen}(a+b) = \cos\ a\ \text{sen}\ b + \text{sen}\ a \cos\ b$.

Para quem estiver habituado com números complexos, a identidade de Euler $e^{i\theta} = \ cos\ \theta + i\ sen\ \theta$ facilita a prova.

23. (a) $P_2 = \dfrac{3}{4}$, $P_3 = \dfrac{2}{3}$, $P_4 = \dfrac{5}{8}$, $P_5 = \dfrac{3}{5}$.

(b) Afirmação: $P_{2n} = \dfrac{2n+1}{4n}$ e $P_{2n+1} = \dfrac{n+1}{2n+1}$, para todo $n \geqslant 1$. Note que os elementos em (a) respeitam a afirmação. Para a passagem de indução podemos fazer ao pares, ou supondo duas condições:

(i) Supõe que P_k respeita a afirmação para algum k par: Então $k = 2t$ e

$$P_{k+1} = P_{2t+1} = P_{2t}\left(1 - \frac{1}{(2t+1)^2}\right) = \left(\frac{2t+1}{4t}\right).\left(1 - \frac{1}{(2t+1)^2}\right) =$$
$$= \frac{2t+1}{4t} - \frac{1}{4t.(2t+1)} = \frac{4t^2+4t}{4t.(2t+1)} = \frac{t+1}{2t+1}.$$

(ii) Supõe que P_k respeita a afirmação para algum k ímpar. Vamos usar $k =$

$2(t-1)+1$, para facilitar nos algebrismos. Para $k+1=2t$ temos

$$P_{2t} = P_{2t-1}\left(1-\frac{1}{(2t)^2}\right) = \left(\frac{(t-1)+1}{2(t-1)+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(2t)^2}\right) = \frac{2t+1}{4t}.$$

Portanto vale o resultado.

24. (a) Para $n=0$ temos que $H_{2^0} = H_1 = 1 = 1+\frac{0}{2}$.

Suponha agora que o resultado é verdadeiro para $k \geqslant 0$, ou seja, $H_{2^k} \geqslant 1+\frac{k}{2}$.

Para $k+1$ temos que $H_{2^{k+1}} = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{2^k}\frac{1}{j} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{j} \geqslant 1+\frac{k}{2}+\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{j} \geqslant$

$1+\frac{k}{2}+\left(2^{k+1}-2^k\right)\frac{1}{2^{k+1}} = 1+\frac{k}{2}+1-\frac{1}{2} = 1+\frac{k+1}{2}$ e assim segue o resultado.

(b) Para a PI prove e use que $\frac{H_{n+1}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{H_{n+1}}{(n+1).n} = \frac{H_{n+2}}{n+1}+\frac{1}{n+2}$.

(c) Para $n=2$ temos que $2+H_1 = 2+1 = 3 = 2\cdot\frac{3}{2} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2H_2$.

Supõe que o resultado vale até um certo $k \geqslant 2$, ou seja, $k+H_1+\cdots+H_{k-1} = kH_k$.

Para $k+1$: $(k+1)+H_1+\cdots+H_{k-1}+H_{(k+1)-1} = (k+H_1+\cdots+H_{k-1})+H_k+1 =$ $kH_k+H_k+1 = (k+1)H_k+1 = (k+1)\left(H_k+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)H_{k+1}$

e assim segue o resultado.

25. (a) Seja $P(n)$ a proposição: $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para todo $n \geqslant 1$.

Para $n=1$ temos que $a_1 = 2 > \frac{8}{5}$.

Além disso, para $n=2$, temos que $a_2 = 3 = \frac{75}{25} > \frac{64}{25} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$.

Supõe que $P(n)$ é verdadeira até $n=k$, ou seja, $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para $n=1,\ldots,k$.

Devemos provar que $P(n)$ continua válida para $n=k+1$.

De fato, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} > \left(\frac{8}{5}\right)^k + \left(\frac{8}{5}\right)^{k-1} = \left(\frac{8}{5}\right)^k\left(1+\frac{5}{8}\right) =$

$\left(\frac{8}{5}\right)^k\cdot\frac{13}{8} > \left(\frac{8}{5}\right)^k\cdot\frac{8}{5} = \left(\frac{8}{5}\right)^{k+1}$ e assim $P(k+1)$ é verdadeira.

(b) Agora seja $Q(n)$ a proposição: $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para todo $n \geqslant 4$.

Para $n=4$ temos que $a_4 = 8 < \frac{83521}{10000} = \left(\frac{17}{10}\right)^4$.

De modo análogo, para $n = 5$ temos que $a_5 = 13 < \frac{1419857}{100000} = \left(\frac{17}{10}\right)^5$.

Supõe que $Q(n)$ é verdadeira até $n = k$, ou seja, $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para $n = 4, \ldots, k$.

Devemos provar que $Q(n)$ continua válida para $n = k + 1$.

De fato, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{17}{10}\right)^k + \left(\frac{17}{10}\right)^{k-1} = \left(\frac{17}{10}\right)^k \left(1 + \frac{10}{17}\right) =$

$\left(\frac{17}{10}\right)^k \cdot \frac{27}{17} < \left(\frac{17}{10}\right)^k \cdot \frac{17}{10} = \left(\frac{17}{10}\right)^{k+1}$ e assim $Q(k+1)$ é verdadeira.

26. Note que $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$.

Então $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{n^n \cdot (n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2n+1}} =$

$$\frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[\frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right]^n.$$

Como $\dfrac{-1}{(n+1)^2} \geqslant -1$ segue, pela desigualdade de Bernoulli, que

$$\frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right]^n \geqslant \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[1 + \frac{-n}{(n+1)^2}\right].$$

Assim segue que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \dfrac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[1 + \dfrac{-n}{(n+1)^2}\right] = \dfrac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \dfrac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} =$

$\dfrac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$. Portanto $a_{n+1} > a_n$.

27. (a) Note que para $m = 1$ é óbvio.
Supõe que o resultado vale para um número ímpar k. Para $k+2$ note que $x^{k+2}+1 = x^2(x^m + 1) - (x+1).(x-1)$ também é divisível por $(x - 1)$, já que $(x^m + 1)$ o é por hipótese.

Assim, a afirmação é verdadeira.

(b) Seja n um natural maior ou igual a 3 e não potência de 2. Então $n = 2^m \cdot t$ para algum $t > 1$ ímpar e $m \geqslant 0$. Então segue que $2^n + 1 = 2^{2^m t} + 1 = (2^{2^m})^t + 1 =^{(a)} (2^{2^m} + 1)\ell$, para algum inteiro positivo ℓ, pois $t > 1$.

28. (a) Para $= 1$ é óbvio, com $a_1 = 2$ e $b_1 = 1$.
Supõe a validade para algum $k \geqslant 1$. Para $k + 1$ temos que $(2 + \sqrt{3})^{k+1} = (a_k + b_k\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2a_k + 3b_k) + \sqrt{3}(2b_k + a_k)$, com $b_{k+1} = 2b_k + a_k$ e $a_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ inteiros.

(b) Prove, por indução e usando o item (a), que $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$, para todo $n \geqslant 1$.
Daí vemos que

$(a_n + b_n\sqrt{3})(c_n + d_n\sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow c_n + d_n\sqrt{3} = \dfrac{1}{a_n + b_n\sqrt{3}} = \dfrac{a_n - b_n\sqrt{3}}{a_n^2 - 3b_n^2} = a_n - b_n\sqrt{3}$. Logo $c_n = a_n$ e $d_n = -b_n$ são inteiros.

(c) Pelo item (b) temos que se $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, com a_n e b_n inteiros, então $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ e assim $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a_n$.
Logo $(1+\sqrt{3})^{2n} + (1-\sqrt{3})^{2n} = [(1+\sqrt{3})^2]^n + [(1-\sqrt{3})^2]^n = [2(2+\sqrt{3})]^n + [2(2-\sqrt{3})]^n = 2^n[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] = 2^n(2a_n) = 2^{n+1}a_n$ que é divisível por 2^{n+1}.

(d) Pelo item (c) $(1+\sqrt{3})^{2n} + (1-\sqrt{3})^{2n}$ é inteiro e como $0 < (1-\sqrt{3})^{2n} < 1$, para todo $n \geqslant 1$, segue que $\lceil (1+\sqrt{3})^{2n} \rceil = (1+\sqrt{3})^{2n} + (1-\sqrt{3})^{2n}$.

29. (a) Para a passagem de indução: $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} > \sqrt{a + a_{n-1}} = a_n$.

(b) Prove e use que $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = \sqrt{a + \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$, para todo $a \geqslant 0$.

30. (a) Note que $a_n \geqslant 1$ para todo n, logo, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{1} = 2$, para todo n, ou seja, $a_n \leqslant 2$ para todo n, já que $a_1 = 1$.
Veja agora que, sendo $a_k \leqslant 2$, para todo k, então

$$a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \sqrt{2},$$

para todo k, isto é, $\sqrt{2} < a_n \leqslant 2$, para todo $n \geqslant 2$.

(b) Note que $|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left| \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \right| = \dfrac{1}{|a_n a_{n+1}|}\, |a_n - a_{n+1}| <^{(a)}$ $\dfrac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$ para todo $n \geqslant 2$. Para $n = 1$ vale inclusive a igualdade.

31. Para $n = 1$: 2 é divisível por 2^1.
Supõe que M_k tem k algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2\}$ e que é divisível por 2^k, ou seja, $M_k = 2^k \cdot t$, com $t \in \mathbb{N}$.
Se t é par, ou seja, $t = 2m$, então toma $M_{k+1} = 2 \cdot 10^k + M_k = 2 \cdot 2^k \cdot 5^k + 2^k \cdot 2m = 2^{k+1}(5^k + m)$.
Se t é ímpar, ou seja, $t = 2m+1$, então toma $M_{k+1} = 10^k + M_k = 2^k \cdot 5^k + 2^k(2m+1) = 2^k(5^k + 1 + 2m) = 2^k(2\ell + 2m) = 2^{k+1}(\ell + m)$.
Na prova acima foi usado que $5^k + 1$ é par para todo $k \in \mathbb{N}$.

32. (a) Pela desigualdade temos que $a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{a}{a_k}\right) \geqslant \sqrt{a_k \dfrac{a}{a_k}} = \sqrt{a}$.

(b) Pelo item (a) segue que $\dfrac{a}{a_k} \leqslant \sqrt{a}$, para todo $k \geqslant 1$. Assim na PI temos que

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{a}{a_k}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a} + \frac{1}{2^k}.$$

33. (a) Veja que $f(x) = \dfrac{ax^4+b}{x^2}$ e que $ax^4 + b \geqslant 2\sqrt{ax^4b} = 2x^2\sqrt{ab}$.

Assim segue que $f(x) \geqslant \dfrac{2x^2\sqrt{ab}}{x^2} = 2\sqrt{ab}$ para todo número real positivo x, com igualdade se, e só se, $ax^4 = b$, ou seja, $x = \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$.

(b) Note que $ax^3 + b = ax^3 + \dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{2} \geqslant 3x\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{4}}$ e é igual se, e só se, $x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{2a}}$.

(c) Note que $ax^4 + b = ax^4 + \dfrac{b}{3} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{b}{3} \geqslant 4x\sqrt[4]{\dfrac{ab^3}{27}}$. A igualdade ocorre se, e só se, $x = \sqrt[4]{\dfrac{b}{3a}}$.

(d) Note que $6x^3 + 24 = 3x^3 + 3x^3 + 24 \geqslant 3\sqrt[3]{x^6 \cdot 9 \cdot 24} = 18x^2$. A igualdade ocorre se, e só se, $x = 2$.

(e) Note que $x^3 + a = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^3}{2} + a \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{x^3}{2}\dfrac{x^3}{2}a} = x^2\sqrt[3]{\dfrac{a}{4}}$.
Logo $\dfrac{x^2}{x^3+a} \leqslant \sqrt[3]{\dfrac{4}{a}}$ e a igualdade ocorre se, e só se, $x = \sqrt[3]{2a}$.

34. Segue a passagem de indução:

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} \lfloor \log_2 i \rfloor = \sum_{i=1}^{2^k-1} \lfloor \log_2 i \rfloor + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \lfloor \log_2 i \rfloor = (k-2)2^k + 2 + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \lfloor \log_2 i \rfloor =$$

$$(k-2)2^k + 2 + (2^{k+1} - 2^k)k = (k-2)2^k + 2 + 2^k k = (2k-2)2^k + 2 =$$

$$(k-1)2^{k+1} + 2 = [(k+1) - 2]2^{k+1} + 2.$$

35. Use a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números

$\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ e depois inverta os dois membros da desigualdade.

36. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz tomando $a_i = 1$ para todo i e $b_i = x_i$.

37. Segue do exercício anterior, é só fazer umas manipulações algébricas.

38. Basta aplicar a desigualdade das médias com pesos:

$$xy = (x^a)^{1/a}(y^b)^{1/b} \leqslant \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b.$$

39. Vamos supor inicialmente que $\sum_{i=1}^n x_i^a = \sum_{i=1}^n y_i^b = 1$.

Pela desigualdade de Young temos que $x_i y_i \leqslant \dfrac{1}{a} x_i^a + \dfrac{1}{b} y_i^b$ e assim

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \frac{1}{a}\sum_{i=1}^n x_i^a + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^n y_i^b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Agora definimos $A = \sum_{i=1}^n x_i^a$ e $B = \sum_{i=1}^n y_i^b$.

Além disso, fazendo $x_i' = \dfrac{x_i}{A^{1/a}}$ e $y_i' = \dfrac{y_i}{B^{1/b}}$ vemos que

$$\sum_{i=1}^n (x_i')^a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^a}{A} = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n (y_i')^b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^b}{B} = 1,$$

podemos deduzir que

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^n x_i' y_i' = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{A^{1/a} B^{1/b}} = \frac{1}{A^{1/a} B^{1/b}} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Portanto $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant A^{1/a} B^{1/b}$ e está provado o resultado.

Note que a desigualdade de Cauchy-Schwarz é um caso particular da desigualdade de Hölder, tomando $n = 2$.

40. Note que $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ e assim

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{p-1}. \quad (\clubsuit)$$

Seja q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e assim aplicando a desigualdade de Hölder em cada termo da soma da direita acima temos que

$$\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

Substituindo esses resultado em ($\clubsuit$) e como $q(p-1) = p$ vemos que

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q}$$

Dividindo ambos os membros da inequação por $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q}$ e usando o fato de que $1 - 1/q = 1/p$, segue o resultado.

41. Se a, b e c são os comprimentos dos lados e s é o semiperímetro ($2s = a+b+c$) do triângulo, então a área do triângulo é dada pela *fórmula de Heron* $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Usando a desigualdade das médias para três termos temos que

$$A = \sqrt{s}\,[(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2} \leqslant \sqrt{s}\left[\left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3\right]^{1/2} =$$

$$\sqrt{s}\left[\left(\frac{3s-(a+b+c)}{3}\right)^3\right]^{1/2} = \sqrt{s}\left[\left(\frac{s}{3}\right)^3\right]^{1/2} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

Logo $A \leqslant \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ e a igualdade vale se, e só se, $s-a = s-b = s-c$, ou seja, $a = b = c$.

Portanto de todos os triângulos com perímetro fixo, o de maior área é o equilátero, que é igual a $A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, onde ℓ é o comprimento do lado.

42. Sejam a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo reto retângulo. Nesse caso, $A = 2(ab+ac+bc)$ e o volume é igual a $V = abc$. Usando a desigualdades das médias aritmética e geométrica para três fatores segue que

$$V^2 = ab \cdot ac \cdot bc \leqslant \left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^3 = \left(\frac{A}{6}\right)^3.$$

Portanto o valor máximo possível para o volume é $V = \left(\dfrac{A}{6}\right)^{3/2}$ que é atingido quando $ab = ac = bc$, ou seja, no caso em que $a = b = c$.

43. Consideremos o triângulo ABC em que $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.
A fórmula da área do triângulo usando o seno é dada por $S = \dfrac{ab \operatorname{sen} \widehat{C}}{2}$ e pela lei dos cossenos temos que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.
Logo a desigualdade acima é equivalente a $ab\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\widehat{C} + \cos\widehat{C}\right) \leqslant a^2 + b^2$.
Por outro lado, $\sqrt{3}\operatorname{sen}\widehat{C} + \cos\widehat{C} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\widehat{C} + \dfrac{1}{2}\cos\widehat{C}\right) = 2\cos\left(\widehat{C} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
Pela desigualdade das médias temos que $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ e como $cos\left(\widehat{C} - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$, basta multiplicar essas duas desigualdades que segue o resultado.
A igualdade vale se, e só se, $a = b$. Mas trocando a por c e $\widehat{C}$ por $\widehat{A}$ é fácil ver que a igualdade vale se, e só se, $c = b$ e assim a igualdade vale apenas quando o triângulo é equilátero.

44. (a) Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, segue que

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2}+\sqrt{y^2z^2}+\sqrt{z^2x^2} = xy+yz+zx\,.$$

(b) Usando o item (a) temos que

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \geqslant xy+yz+zx+2xy+2yz+2zx = 3xy+3yz+3zx\,.$$

Dividindo por 9 vemos que $\dfrac{(x+y+z)^2}{9} \geqslant \dfrac{3xy+3yz+3zx}{9}$.

Extraindo a raiz concluímos que $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$.

Agora, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e a geométrica,

segue que $\dfrac{xy+yz+zx}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyyzzx} = \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

Extraindo a raiz quadrada obtemos que $\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

(c) As raízes da equação são todas positivas. De fato, 0 não é solução pois

$0^3 - a\cdot 0^2 + b\cdot 0 - c = -c < 0$ e se $t_0 < 0$, então $t_0^3 - at_0^2 + bt_0 - c < 0$.

Sejam x, y e z as soluções da equação. Logo $a = x+y+z, b = xy+yz+zx$ e $c = xyz$.
Pelo item (b) segue que $\dfrac{a}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{b}{3}} \geqslant \sqrt[3]{c}$. Elevando essas inequações à sexta potência e depois multiplicando por 729 temos que $a^6 \geqslant 27b^3 \geqslant 729c^2$.

45. Sejam $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}, x = \overline{BK}, y = \overline{CL}$ e $z = \overline{AM}$.
Vamos supor que nenhum dos triângulos MAL, KBM e LCK tem área menor ou igual a $1/4$ da área do triângulo ABC. Assim temos que:

$$\frac{z(b-y)\,\text{sen}\widehat{A}}{2} > \frac{bc\,\text{sen}\widehat{A}}{8},\ \frac{x(c-z)\,\text{sen}\widehat{B}}{2} > \frac{ac\,\text{sen}\widehat{B}}{8},\ \frac{y(a-x)\,\text{sen}\widehat{C}}{2} > \frac{ab\,\text{sen}\widehat{C}}{8}.$$

Eliminando os senos e multiplicando por 2, segue que

$$z(b-y) > \frac{bc}{4},\ x(c-z) > \frac{ac}{4} \text{ e } y(a-x) > \frac{ab}{4}.$$

Multiplicando as três inequações acima obtemos

$$xyz(a-x)(b-y)(c-z) > \frac{a^2b^2c^2}{64}.$$

Por outro, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos que

$$x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4}, y(b-y) \leqslant \frac{b^2}{4} \text{ e } z(c-z) \leqslant \frac{c^2}{4}.$$

Agora, multiplicando essas três inequações, vemos que

$$xyz(a-x)(b-y)(c-z) \leqslant \frac{a^2b^2c^2}{64}, \text{ o que dá uma contradição.}$$

4.1.2 Miscelânea de Belos Problemas com Indução

46. Observe que $y_n > 22$ para todo $n \geqslant 1$.
Para $n = 2$ temos que $x_{2+3} = x_5 = 2^{65536} = (2^{11})^{5500} \cdot 2^{10036} > 2048^{5500} > 2017^{4034} = y_2^2$.
Supõe que $x_{k+3} > y_k^2$ vale para um certo $k \geqslant 2$. Além disso, $\log_{2015} y_{k+1}^2 = 2y_k$.

Agora
$$\log_{2015} x_{k+4} = \frac{\log_2 x_{k+4}}{\log_2 2015} = \frac{x_{k+3}}{\log_2 2015} > \frac{x_{n+3}}{11} >^{HI} \frac{y_k^2}{11} > 2y_k = \log_{2015} y_{k+1}^2 .$$

Portanto $x_{k+4} > y_{k+1}^2$ e assim vale o resultado.
Como $x_4 = 65536 > 2017 = y_1$ e $y_n^2 > y_n$, segue que $x_{n+3} > y_n$, para todo $n \geqslant 1$.

47. Considere a_n o número de maneiras de subir uma escada de n degraus. É fácil ver que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Seja $n \geqslant 3$. Para se chegar no degrau n é possível vir do andar $n-1$ ou do $n-2$. Com isso é fácil ver que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geqslant 3$. Logo $a_3 = 3, a_4 = 5$ e $a_5 = 8$. É fácil ver que $a_n = F_{n+1}$.

48. (a), (b) e (c) ficam a cargo do leitor.
(d) Na passagem de indução
$F_1^2 + \cdots + F_k^2 + F_{k+1}^2 =^{HI} F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1}F_{k+2}$.

(e) Sejam $a = F_{k-1}, b = F_k, c = F_{k+1}$ e $d = F_{k+2}$ na indução.
A hipótese é $ca - b^2 = (-1)^k$. Na passagem de indução temos que
$db - c^2 = (b+c)b - c^2 = b^2 - c(c-b) = b^2 - ca = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$.

(f) Sejam $a = F_{2k+1}, b = F_{2k+2}, c = F_{2k+3}$ e $d = F_{2k+4}$.
Note que $c = a + b$ e $d = a + 2b$. Pelo item (e) segue que $1 = ac - b^2$.
É possível provar que $4a^2 - b^2 + 5ab = 4c^2 - d^2 + 1$ e essa identidade é a chave da passagem de indução. De fato,
$4c^2 - d^2 + 1 = 4(a+b)^2 - (a+2b)^2 + 1 = 4a^2 + 8ab + 4b^2 - a^2 - 4ab - 4b^2 + ac - b^2 =$

$4a^2+4ab-b^2+ac-a^2 = a^2+4ab-b^2+a(c-a) = 4a^2+4ab-b^2+ab = 4a^2-b^2+5ab.$

(g) Na passagem de indução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} =_{HI} \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1}+F_k & F_{k+1} \\ F_k+F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}.$$

49. Verifique que $\alpha+1=\alpha^2$ e $\beta+1=\beta^2$.

Para $n=0$ e $n=1$ temos que $\dfrac{\alpha^0-\beta^0}{\alpha-\beta}=0=F_0$ e $\dfrac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta}=1=F_1$.

Supõe que o resultado vale para todo $j\in\{0,\dots k\}$, onde $k\geqslant 1$. Então

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^k+\alpha^{k-1}-(\beta^k+\beta^{k-1})}{\alpha-\beta}=$$

$$\frac{\alpha^{k-1}(\alpha+1)-(\beta^{k-1})(\beta+1)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k-1}\alpha^2-\beta^{k-1}\beta^2}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}.$$

50. Usaremos que $1-\alpha=\beta$ e $1-\beta=\alpha$ e uma versão do binômio de Newton:

$$(1-x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-x)^i.$$

Usando a fórmula de Binet e a forma binomial acima segue que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^iF_i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\left[\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha-\beta}\right]=$$

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\alpha^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\beta^i\right]=$$

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i\right]=$$

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left[(1-\alpha)^n-(1-\beta)^n\right]=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\beta^n-\alpha^n\right]=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\alpha-\beta}=-F_n.$$

51. Observe que se i é inteiro, então

$$(-1)^{-i}=(-1)^i \quad \text{e} \quad \frac{1}{n+1-i}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i}.$$

Agora note que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}F_i}{n+1-i}\binom{n}{i}=\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^iF_i\binom{n+1}{i}=$

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i F_i\binom{n+1}{i} - (-1)^{n+1}F_{n+1}\right] =$$

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}\right] + \frac{F_{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left[-F_{n+1}+(-1)^n F_{n+1}\right] =$$

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{n+1}F_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2F_{n+1}}{n+1}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

52. (a) BI: Para $m = 2$ temos que $1 \cdot 1! = 2! - 1$ é verdade.
HI: Supõe que o resultado vale para um certo $k \leqslant 2 : \sum_{j=1}^{k-1} j \cdot j! = k! - 1$.
PI: Para $k+1$ temos que

$$\sum_{j+1}^{k+1-1} j \cdot j! = \sum_{j+1}^{k-1} j \cdot j! + k \cdot k! =^{HI} k! - 1 + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

(b) Primeiro vamos mostrar a existência da representação. Dado um inteiro positivo n, existe um único inteiro positivo m tal que $m! \leqslant n < (m+1)!$.
Pelo algoritmo da divisão temos que existe um inteiro a_m tal que $n = a_m \cdot m! + r_m$, onde $1 \leqslant a_m \leqslant m-1$ e $0 \leqslant r_m < m!$.
Depois encontramos um inteiro positivo a_{m-1} tal que $r_m = a_{m-1} \cdot (m-1)! + r_{m-1}$, onde $0 \leqslant a_{m-1} \leqslant m-1$ e $0 \leqslant r_{m-1} < (m-1)!$.
Aplicando mais $m-2$ vezes o algoritmo da divisão, obtemos $r_i = a_{i-1} \cdot (i-1)! + r_{i-1}$, onde $0 \leqslant a_{i-1} \leqslant i-1$ e $0 \leqslant r_{i-1} < (i-1)!$ para $i = m+1, m, m-1, \dots, 2$, com $r_{m+1} = n$. Na última etapa, temos $r_2 = a_1 \cdot 1! + 0$, onde $r_2 \in \{0,1\}$ e $r_2 = a_1$.

Agora vamos prova a unicidade. Supõe que um certo inteiro positivo n tenha duas representações distintas.
$n = a_m \cdot m! + a_{m-1} \cdot (m-1)! + \cdots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1! =$
$b_m \cdot m! + b_{m-1} \cdot (m-1)! + \cdots + b_2 \cdot 2! + b_1 \cdot 1!$.

Então $(a_m - b_m) \cdot m! + (a_{m-1} - b_{m-1}) \cdot (m-1)! + \cdots + (a_2 - b_2) \cdot 2! + (a_1 - b_1) \cdot 1! = 0$.
Seja j o menor índice tal que $a_j - b_j \neq 0$. Logo temos que

$$(b_j - a_j)j! = \sum_{i=j+1}^{m}(a_i - b_i)\cdot i!, \text{ e assim } b_j - a_j = \sum_{i=j+1}^{m}(a_i - b_i)\frac{i!}{j!} = t(j+1)$$

para algum inteiro t. Mas como $0 \leqslant a_j \leqslant j$ e $0 \leqslant b_j \leqslant j$ segue que $-j \leqslant b_j - a_j \leqslant j$. Como foi visto acima $b_j - a_j$ é múltiplo de $j+1$, o que implica $b_j - a_j = 0$, mas isso dá uma contradição.

53. Seja x um número racional positivo. Podemos escolher $a_1 = \lfloor x \rfloor$ e assim $\dfrac{p}{q} = x - a_1 \in [0,1)$. Agora escolhe $a_2 = 0$ se $\dfrac{p}{q} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ e $a_2 = 1$ se

$\frac{p}{q} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Seja I_2 o intervalo ao qual $\frac{p}{q}$ pertence na escolha de a_2.

Assim segue que $\frac{a_2}{2!} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{a_2+1}{2!}$. Agora divide I_2 em três intervalos (fechados à esquerda e abertos à direita) de mesmo comprimento e escolhe $a_3 \in \{0,1,2\}$ conforme $\frac{p}{q}$ pertence ao primeiro, segundo ou terceiro intervalo.

Em outras palavras, a_3 é o maior elemento de $\{0,1,2\}$ tal que $\frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3+1}{3!}$.
Agora supõe que escolhemos $a_k \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ para um certo $k \geqslant 2$ tal que

$$\alpha_k = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \ldots + \frac{a_k}{k!} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} + \frac{a_k+1}{k!}$$

Por construção temos que $\alpha_q \leqslant \frac{p}{q} < \alpha_q + \frac{1}{q!}$ e $q!\alpha_q$ é inteiro.

Então $0 \leqslant p(q-1)! - \alpha_q \cdot q! < 1$ e assim $\frac{p}{q} = \alpha_q$.
Logo conseguimos uma representação de x conforme o enunciado.
Agora vamos provar a unicidade da representação. Supõe que um número racional x tenha duas representações distintas

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i!}, a_1 \geqslant 0, b_1 \geqslant 0 \text{ e } a_j, b_j \in \{0,1,\ldots,j-1\}, \text{ se } j \geqslant 2.$$

Seja k o maior inteiro com a propriedade $a_k \neq b_k$. Então segue que

$$\frac{a_k - b_k}{k!} + \frac{a_{k-1} - b_{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + \frac{a_2 - b_2}{2!} + a_1 - b_1 = 0.$$

Multiplicando essa equação por k e isolando $a_k - b_k$ temos que $a_k - b_k = k\ell$, com ℓ inteiro.
Mas como $a_k, b_k \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ segue que $a_k - b_k \in \{-k+1,\ldots,k-1\}$ e portanto $a_k - b_k = 0$, o que dá uma contradição. Assim concluímos que a representação é única.

54. Se T_n é o número mínimo de movimentos para resolver o problema com n discos, então é possível mostrar que $T_1 = 2$ e $T_{n+1} = 3T_n + 2$, para $n \geqslant 1$. Resolvendo essa equação de recorrência obtemos $T_n = 3^n - 1$.

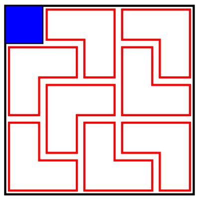
55. Se T_n é o número mínimo de movimentos pra resolver o problema com n discos e 4 hastes, então $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 5, T_4 = 9$ e $T_5 = 13$.

56. (a) $T_n = 2^{n+1} - 2$, para $n \geqslant 1$. (b) $T_n = 2^{n+2} - 5$, para $n \geqslant 1$.

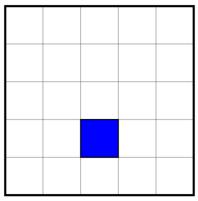
57. (a) $T_n = 3(2^n - 1)$, para $n \geqslant 1$. (b) $T_n = 8^n - 1$, para $n \geqslant 1$.

58. Veja www.cut-the-knot.org/Curriculum/Games/TrominoPuzzleN.shtml#proof

59. Veja a solução no caso em que é retirado o quadrado superior esquerdo. Os outros três casos têm soluções semelhantes por rotação dessa.



60. Note que a seguinte disposição abaixo, em que o quadrado removido está em azul, impede o preenchimento com triminós. Comece preenchendo o canto inferior esquerdo. Isso pode ser feito de quatro maneiras. Veja que em todos os casos a solução é impossível.



61. Vamos chamar de tijolo um cubo $2\times2\times2$ que teve um cubo $1\times1\times1$ removido.
BI: Para $n = 1$ vale pois o sólido a ser recoberto coincide com um tijolo.
HI: Suponha verdadeiro para um certo $k \geqslant 1$.
PI: Agora vamos considerara um cubo $2^{k+1} \times 2^{k+1} \times 2^{k+1}$ com um cubo $1 \times 1 \times 1$ removido. Divida este objeto em oito usando planos paralelos às suas faces e passando pelo centro. O cubo removido está em um desses octantes. Agora posicione um tijolo no centro do objeto de modo que os sete cubos $1 \times 1 \times 1$ cubram os sete octantes em que não foi removido o cubo. Com isso temos oitos cubos $2^k \times 2^k \times 2^k$ em cada um faltando um cubo $1 \times 1 \times 1$ e esses octantes podem ser preenchidos por hipótese de indução.

62. (a) Veja a solução em
www.obm.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2011/balanca-leve.pdf
(b) Veja o link do exercício abaixo.

63. Revista Eureka 6, pag 42 a 45:
http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka6.pdf

64. (a) F_2 tem 3 elementos, como visto acima. Supõe que F_k tem um número ímpar de elementos para um certo $k \geqslant 2$. Se $\frac{p}{q} \in F_{k+1} \backslash F_k$, então $1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q} \in F_{k+1} \backslash F_k$. Assim sendo, $F_{k+1} \backslash F_k$ tem um número par de elementos, logo, $F_{k+1} = F_k \cup (F_{k+1} \backslash F_k)$ tem um número ímpar mais um número par de elementos, logo, um número ímpar.
Para os itens (b) e (c) consulte http://www.personal.psu.edu/rcv4/568c08.pdf

65. Veja, por exemplo, $5/6 = 1/2 + 1/3 = 1/2 + 1/4 + 1/12 = 1/2 + 1/4 + 1/13 + 1/156$. Para provar o resultado usa a proposição acima e a identidade $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$.

66. Use o fato de que a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e assim basta tomar o somatório das frações unitárias até um resultado menor do que $\frac{p}{q}$, mas que deixe resto menor do que 1. Daí basta usar o exercício anterior.

67. Para $n = 3$ temos que $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$.

Supõe, por hipótese de indução, que o resultado vale para um certo $k \geqslant 3$, ou seja,

que existem k inteiros positivos tais que $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ e

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\,.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $\dfrac{1}{2}$ segue que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k}\,.$$

Somando $\dfrac{1}{2}$ a ambos os membros dessa igualdade temos que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k}\,.$$

Como $2 < 2a_1 < 2a_2 < \cdots < 2a_k$ segue o resultado.

Na passagem de indução poderíamos trocar $\dfrac{1}{a_k}$ por $\dfrac{1}{a_k+1} + \dfrac{1}{a_k(a_k+1)}$.

68. (a) Se o número de palitos não é múltiplo de 3 então o jogador que começa tem estratégia vencedora, bastando tirar o resto da divisão de n por 3. Caso o número de palitos for múltiplo de 3, então o segundo jogador tem estratégia vencedora. Basta retirar $3 - r$ palitos onde r é a quantidade retirada pelo primeiro jogador.

(b) Se o número de palitos for da forma $7k$ ou $7k+2$, o segundo jogador tem estratégia vencedora. Nos demais casos, o primeiro jogador tem estratégia vencedora. Sugerimos ao leitor que pratique o jogo para se convencer de que isso está correto.

(c) Se o número de palitos não é múltiplo de $\ell + 1$ então o jogador que começa tem estratégia vencedora, bastando tirar o resto da divisão de n por $\ell + 1$. Caso o número de palitos for múltiplo de $\ell + 1$, então o segundo jogador tem estratégia vencedora. Basta retirar $\ell + 1 - r$ palitos onde r é a quantidade retirada pelo primeiro jogador.

(d) Se $n = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$, com $k \geqslant 1$, o segundo jogador tem estratégia vencedora. Nos demais casos, quem começa ganha.

69. Podemos considerar pares da forma (m, n) com $1 \leqslant m \leqslant n$, que indicam a quantidade de palitos em cada uma das pilhas.
Algumas posições perdedoras: $(1, 2)$, $(3, 5)$ e $(4, 7)$.
São posições vencedoras:
(m, m): o jogador pode retirar todos os palitos e vence).
$(m, m+1)$ com $m \geqslant 2$: o jogador pode retirar $m - 1$ palitos de cada pilha e deixa $(1, 2)$ para o outro.
$(m, m+2)$ com $m \geqslant 4$: o jogador pode retirar $m - 3$ palitos de cada pilha e deixa $(3, 5)$ para o outro.
$(1, n)$ com $n \geqslant 3$: o jogador pode retirar $n - 2$ palitos da pilha da direita.
$(2, n)$ com $n \geqslant 3$: o jogador retira $n - 1$ palitos da pilha da direita.
$(3, n)$ com $n \geqslant 6$: o jogador retira $n - 5$ palitos da ilha da direita.
$(4, n)$ com $n \geqslant 8$: o jogador retira $n - 7$ palitos da ilha da direita.
Para resolver o problema $(7, 15)$ basta retirar 11 palitos na pilha da direita.

70. (a) Se N é ímpar a estratégia vencedora de Arnaldo é retirar 1 palito.

(b) Se N é um número que deixa resto 2 na divisão por 4, então Arnaldo tem estratégia vencedora e começa retirando um palito na primeira jogada e depois basta que ele retire sempre a mesma quantidade que Bernardo tiver retirado na jogada anterior, ou seja, Arnaldo *copia* as jogadas de Bernaldo.

(c) Nesse caso, Arnaldo deve fazer a representação binária da quantidade de palitos e retirar a menor potência de 2 nessa representação. Na verdade essa também é a estratégia inicial em (a) e (b). Por exemplo, se a quantidade inicial for 40 palitos temos que $40 = 32 + 8$ e assim Arnaldo começa retirando oito palitos.

71. (a) Nesse caso basta retirar, para pesagem, $n-1$ livros da estante n para $1 \leqslant 10$. Os pesos possíveis serão $45; 45,01; \ldots; 45,09$, ou seja, $45,0k$, com $0 \leqslant k \leqslant 9$. Se o peso for igual a $45,0\ell$ a estante dos livros mais pesados será a $\ell + 1$.

(b) Basta retirar, para pesagem, 2^{n-1} livros da estante n. Assim os possíveis pesos serão $1023 + k \cdot 0,01$, com $0 \leqslant k \leqslant 1023$. Feita a pesagem, digamos que deu $1023 + \ell \cdot 0,01$, escreva ℓ como soma de potências distintas de 2: $1, 2, 2^2, \ldots, 2^9$. Se a potência 2^j estiver nessa soma , então a estante $j + 1$ tem livros de $1,01$ kg.

(c) Basta retirar, para pesagem, 3^{n-1} livros da estante n. Assim os possíveis pesos serão $29524 + 29524 \cdot 0,01$, com $0 \leqslant k \leqslant 29524$. Feita a pesagem, digamos que deu $29524 + \ell \cdot 0,01$, escreva ℓ na base 3 ($\ell = \sum_{i=0}^{9} a_i \cdot 3^i$, onde $a_i \in \{0, 1, 2\}$). Para cada $j \in \{0, 1, \ldots\}$, a_j indica que os livros da estante $j + 1$ pesam $1,0a_j$ kg.

72. Basta calcular as áreas de cada polígono de Pick separadamente e somá-las. Para cada um dos n polígonos, temos que $A_{P_k} = \dfrac{1}{2}L_k + I_k - 1$ e então:

$$A = A_{P_1} + \cdots + A_{P_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}L_i + I_i - 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i + \sum_{i=1}^{n} I_i - n.$$

73. (a) Este polígono é a união de três polígonos de Pick. Pelo exercício anterior:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} L_i + \sum_{i=1}^{3} I_i - 3 = \frac{1}{2}(6+5+4) + (3+0+2) - 3 = 7,5 + 5 - 3 = 9,5.$$

(b) Como n é múltiplo de 4, faça $n = 4m$, com m inteiro. Um quadrado de lado m com vértices em pontos de um reticulado terá $(m-1)(m-1) = m^2 - 2m + 1$ pontos no seu interior e $4m$ pontos na sua fronteira.
Logo $A_{Q_3} = \dfrac{1}{2}4m + (m^2 - 2m + 1) - 1 = m^2$.
Analogamente para Q_2, como seu lado vale $2m$, serão $8m$ pontos em sua fronteira e $(2m-1)(2m-1) = 4m^2 - 4m + 1$ pontos no seu interior.
Assim segue que $A_{Q_2} = \dfrac{1}{2}8m + (4m^2 - 4m + 1) - 1 = 4m^2$.
Para Q_1, o mesmo processo nos dará $A_{Q_1} = \dfrac{1}{2}16m + (16m^2 - 8m + 1) - 1 = 16m^2$.
Por fim, $A = A_{Q_1} - A_{Q_2} + A_{Q_3} = 16m^2 - 4m^2 + m^2 = 13m^2 = \frac{13}{16}n^2$.

(c) Temos duas formas de usar o teorema de Pick aqui. A forma difícil é calcular a quantidade de pontos do polígono para um n qualquer e usar o teorema de Pick com buracos e interseções. A forma fácil, e é essa que usaremos, é calcular a área para $n = 1$ e utilizar a relação entre o aumento de escala e o aumento de área, ou seja, se o lado aumentar em uma escala de n, então a área aumenta em uma escala de n^2.

Então, para $n = 1$, vamos calcular a área envolta pela fronteira externa e subtrair os três buracos internos. Note que, ignorando os três buracos, temos 17 pontos sobre a fronteira e 5 pontos no interior. Pelo teorema de Pick, a área dentro da fronteira é $A_F = \dfrac{17}{2} + 5 - 1 = 12,5$. Note agora que os três buracos são iguais.

Escolha um deles e, calculando sua área, 3 pontos na fronteira e nenhum no interior nos dará $A_T = \frac{3}{2} + 0 - 1 = 0,5$. Assim, $A = A_F - 3A_T = 12,5 - 3 \times 0,5 = 11$. Então a área para uma distância n será igual a $11n^2$.

4.2 Contagem

4.2.1 Conceitos Básicos

74. (a) A comissão deve ser formada por dois homens e três mulheres e essa escolha pode ser feita de $C_8^2 \cdot C_8^3 = 1568$ maneiras.

(b) Temos 4 possibilidades: dois homens e três mulheres ($C_8^2 \cdot C_8^3 = 1568$), três homens e duas mulheres ($C_8^3 \cdot C_8^2 = 1568$), quatro homens e uma mulher ($C_8^4 \cdot C_8^1 = 560$), cinco homens e nenhuma mulher ($C_8^5 = 56$). Somando esses números temos 3752 possibilidades.
Outra maneira seria calcular todas as comissões e subtrair as comissões formadas só por mulheres e aquelas que têm exatamente um homem e assim o cálculo ficaria: $C_{16}^5 - C_8^5 - c_8^1 \cdot C_8^4 = 4368 - 56 - 560 = 3752$.

75. Podemos escolher a ordem das matérias de 3! maneiras, os livros de Matemática podem ser ordenados de 6! modos, os de Física de 4! maneiras e os de Química de 3! modos. Com isso o número de maneiras que os livros podem ser arrumados é $6!4!3!3! = 622080$.

76. Com essa palavra podemos formar $\frac{15!}{1!2!3!2!3!2!1!1!} = \frac{15!}{288}$ anagramas, dos quais $\frac{14!}{2!3!2!3!2!1!1!} = \frac{14!}{288}$ começam com I, $\frac{14!}{1!2!2!2!3!2!1!1!} = \frac{14!}{96}$ com A, $\frac{14!}{1!2!3!2!2!2!1!1!} = \frac{14!}{96}$ com U e $\frac{14!}{1!2!3!2!3!1!1!1!} = \frac{14!}{144}$ começam com E. Com isso temos $\frac{14!}{32}$ anagramas que começam com vogal.

77. Basta escolher 4 delas e assim os dois grupos estarão definido, logo isso pode ser feito de $C_7^4 = 35$ maneiras.

78. Nesse caso podemos repetir o raciocínio do exercício anterior, mas tendo um certo cuidado, pois digamos que os oito alunos sejam $abcdefgh$. A divisão $befh|acdg$ é a mesma que $acdg|befh$. Portanto temos $\frac{C_8^4}{2} = 35$ maneiras de dividir os alunos.

79. Há $99999 - 9999 = 90000$ números com cinco algarismos. Desses os não perobas são da forma $IPIPI$ ou $PIPIP$, onde I significa que o algarismo é ímpar e P que ele é par. Da forma $IPIPI$ temos $5^5 = 3125$ números e do tipo $PIPIP$ são $4 \cdot 5^4 = 2500$ (o número não pode começar com zero). Logo temos $90000 - 3125 - 2500 = 84375$ números perobas de cinco dígitos.

80. Podemos formar $8!$ anagramas com a palavra PERIGOSA. Como temos 4 vogais, elas podem ser permutadas de $4! = 24$ maneiras e só uma satisfaz a condição do problema e assim a resposta é $\dfrac{8!}{4!} = 1680$.

81. As duas variáveis iguais a 1 podem ser escolhidas de C_6^2 maneiras. Assim restam 4 variáveis, digamos y_1, y_2, y_3 e y_4, e precisamos encontrar o número de soluções inteiras da equação $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 27$, com $y_i \geqslant 2$. Trocando $y_i - 1$ por z_i, isso equivale a encontrar o número de soluções inteiras positivas da equação $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 23$ que é igual a C_{22}^3. Portanto a solução do problema é igual a $C_6^2 \cdot C_{22}^3 = 23100$.

82.(a) Seja x_k o número de bombons do k-ésimo sabor que o cliente escolheu. Devemos, então, determinar o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12$. Isto pode ser feito de $C_{18}^{12} = 18564$ modos.

(b) Se o cliente quiser colocar pelo menos um bombom de cada sabor na caixa, devemos considerar que 7 sabores já estão escolhidos e fixados. Portanto resta determinar a quantidade de escolhas para preencher os 5 lugares remanescentes, ou seja, devemos determinar a quantidade de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 5$. Isto pode ser feito de $C_{11}^5 = 462$ modos.

(c) Nesta situação, o cliente poderá comprar exatamente 3, ou exatamente 4, ou exatamente 5 bombons de avelã. Devemos, então, determinar valores inteiros e não-negativos para x_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, tais que:

Primeiro caso: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 9$, que pode ser feito de $C_{14}^9 = 2002$ modos;

Segundo caso: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 8$, que pode ser feito de $C_{13}^8 = 1287$ modos;

Terceiro caso: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$, que pode ser feito de $C_{12}^7 = 792$ modos.

Portanto, a quantidade de escolhas possíveis é dada por $2002+1287+792 = 4081$.

83. Para fazer 16 pontos, sem nenhuma derrota, os resultados podem ser:
16 empates que dá uma sequência;
13 empates e uma vitória dá 14 sequências;
10 empates e 2 vitórias e nesse caso temos $\dfrac{12!}{10!2!} = 66$ sequências;
7 empates e 3 vitórias e assim temos $\dfrac{10!}{7!!3!} = 120$ sequências;
4 empates e 4 vitórias que dá $\dfrac{8!}{4!4!} = 70$ sequências;
1 empate e 5 vitórias são 6 sequências.

Portanto o número total de sequências possíveis é igual a $1+14+66+120+70+6 = 277$.

84. (a) O número de escolhas de 3 pontos distintos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$ é igual a $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.
Três pontos no espaço determinam um único plano se, e somente se, não são colineares. Dentre as 20 escolhas diferentes de três pontos, apenas 2 contêm todos os pontos colineares, a saber, $\{A, B, C\}$ e $\{D, E, F\}$. Portanto, há 18 escolhas em que os 3 pontos determinam um único plano.

Logo, a probabilidade pedida é $P = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10} = 0,9$.

(b) O número de escolhas de 4 pontos distintos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$ é $C_6^4 = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$.

Como os pontos dados estão distribuídos em duas arestas reversas, temos que quatro deles são coplanares se, e só se, houver três deles colineares.
Há 3 possibilidades contendo $\{A, B, C\}$ e 3 possibilidades contendo $\{D, E, F\}$, fazendo um total de 6 casos favoráveis.

Portanto a probabilidade é igual a $P = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

85. Primeiro escolhemos os algarismos das centenas nas posições a, b e c:
$\underline{a}\_\,\_ > \underline{b}\_\,\_ > \underline{c}\_\,\_$. Isso pode ser feito de $\binom{9}{3} = 84$ maneiras.
Depois precisamos colocar os demais 6 algarismos, o que pode ser feito de $6! = 720$ modos diferentes.
Logo a quantidade de soluções do problema é igual a $\binom{9}{3} \cdot 6! = 84 \cdot 720 = 60480$.

86. (a) A cada escolha de quatro dígitos (sem repetição), entre os dez dígitos, temos uma única ordem decrescente; assim o número de elementos pedido é igual a $C_{10}^4 = 210$.

(b) A quantidade dos que iniciam com o dígito 3 é 1 (apenas o número 3210); quatro iniciam com o dígito 4, a saber $4210, 4310, 4320$ e 4321; os que iniciam com o dígito 5 são no total de $C_5^3 = 10$; com o dígito 6 são $C_6^3 = 20$; com o dígito 7 são 35. Até este momento temos um total de 70 números em ordem crescente.

A quantidade daqueles que iniciam com o dígito 8 e são seguidos do dígito: 2 é apenas um número, a saber 8210; 3 é $C_3^2 = 3$; 4 é $C_4^2 = 6$; 5 é $C_5^2 = 10$ e 6 é $C_6^2 = 15$.

Até o momento, tem-se um total de 105 números. Os números seguintes serão $8710, 8720, 8721, 8730$. Portanto o número que ocupa a 109^a posição é 8730.

87. (a) Para determinar o anagrama da palavra PROFMAT que ocupará a posição 2015, seguindo a ordem alfabética, devemos contar os anagramas anteriores. Assim os anagramas começados por:

- A são 6!=720 anagramas
- F são 6!=720 anagramas
- MA são 5!=120 anagramas
- MF são 5!=120 anagramas
- MO são 5!=120 anagramas
- MP são 5!=120 anagramas
- MRA são 4!=24 anagramas
- MRF são 4!=24 anagramas
- MRO são 4!=24 anagramas
- MRP são 4!=24 anagramas

Mas $2 \cdot 720 + 4 \cdot 120 + 4 \cdot 24 = 2016$, então o anagrama que ocupa a posição 2016, seguindo a ordem alfabética, é MRPTOFA, já que é o último anagrama dos anagramas iniciados com MRP.

Desta forma o anagrama que ocupa a posição 2015 será o imediatamente anterior ao MRPTOFA, que é MRPTOAF.

(b) O número de modos de arrumar as letras diferentes de O é $P_8^{3,1,1,1,1,1}$.

Por exemplo, uma dessas arrumações é _ H _ F _ M _ I _ M _ S _ M _ R _

Agora temos que colocar as letras O nos espaços assinalados. Como em nenhum espaço podem entrar duas letras O, ocuparemos 4 espaços (uma letra O em cada) e deixaremos 5 espaços vazios. O número de modos de escolher os espaços que ocuparemos é C_9^4.

Portanto a resposta é $P_8^{3,1,1,1,1,1} \cdot C_9^4 = 846720$.

Outra solução

Colocamos as letras O (1 modo) _ O _ O _ O _ O _

Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos 5 espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 ($x_i =$ número de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não-negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$, com $x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$ (para impedir que haja duas letras O juntas). Façamos $x_2 = 1 + y_2,\ \ x_3 = 1 + y_3,\ \ x_4 = 1 + y_4,\ \ x_1 = y_1,\ \ x_5 = y_5$ e portanto devemos achar o número de soluçoes inteiras não-negativas de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 8$, cuja resposta é $CR_4^5 = C_9^4$.

Escolhidas quantas letras irão para cada espaço, por exemplo, _ _ O _ _ _ O _ O _ O _

Temos agora que colocar as letras H,M,M,M,F,I,S,R nessas casas, o que pode ser feito de $P_8^{3,1,1,1,1,1}$ modos. Portanto a resposta é

$$1 \cdot C_9^4 \cdot P_8^{3,1,1,1,1,1} = 846720$$

88. (a) As comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor podem ser compostas das seguintes maneiras:

- 1 professor e 5 alunos;
- 2 professores e 4 alunos;
- 3 professores e 3 alunos;
- 4 professores e 2 alunos;
- 5 professores e 1 aluno;
- 6 professores e 0 alunos.

Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor é

$$C_8^1 \times C_{20}^5 + C_8^2 \times C_{20}^4 + C_8^3 \times C_{20}^3 + C_8^4 \times C_{20}^2 + C_8^5 \times C_{20}^1 + C_8^6 \times C_{20}^0 = 337980.$$

Outra solução

Formam-se todas as comissões possíveis compostas por seis pessoas, isso pode ser feito de C_{28}^6 modos.

Agora devemos descontar as comissões formadas somente por alunos (C_{20}^6). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor é

$C_{28}^6 - C_{20}^6 = 337980$.

(b) As comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor e dois alunos podem ser compostas das seguintes maneiras:

- 1 professor e 5 alunos;
- 2 professores e 4 alunos;
- 3 professores e 3 alunos;
- 4 professores e 2 alunos;

Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor e dois alunos é

$$C_8^1 \times C_{20}^5 + C_8^2 \times C_{20}^4 + C_8^3 \times C_{20}^3 + C_8^4 \times C_{20}^2 = 336832$$

Outra solução

Formam-se todas as comissões possíveis compostas por seis pessoas, isso pode ser feito de C_{28}^6 modos. Agora devemos descontar as comissões formadas somente por alunos (C_{20}^6), as comissões formadas por 5 professores e 1 aluno ($C_8^5 \times C_{20}^1$) e as comissões formadas por 6 professores e nenhum aluno ($C_8^6 \times C_{20}^0$). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor e dois alunos é $C_{28}^6 - C_{20}^6 - C_8^5 \times C_{20}^1 - C_8^6 \times C_{20}^0 = 336832$.

(c) A solução proposta por este aluno está errada. Considere, por exemplo, uma comissão com 3 professores e 3 alunos, $P_1P_2P_3A_1A_2A_3$. Essa comissão foi contada várias vezes. Uma quando P_1 foi escolhido inicialmente, outra quando P_2 foi escolhido incialmente, etc. Desta forma obtemos uma resposta que inclui comissões repetidas, portanto esta resposta está incorreta.

4.2.2 O Binômio de Newton e Contagem Dupla

89. Conte a quantidade de arestas. A resposta é 90.

90. Cada mês pode ter 4 ou 5 domingos, e o ano pode ter 53 domingos ($365 = 52 \cdot 7 + 1$; note que nem precisamos apelar para os anos bissextos!). Logo podem haver no máximo 5 meses com 5 domingos.

91. $(0+1+2+3+4+5+6)(3+2\cdot 6+1\cdot(\binom{6}{2}+6)) = 756$.

92. Seja h o número de homens e m o número de mulheres no torneio. Como em cada jogo é disputado 1 ponto, nos jogos entre homens forma disputados $\binom{h}{2}$ pontos e nos jogos entre mulheres foram disputados $\binom{m}{2}$ pontos.

Sejam a e b os pontos conquistados por homens e mulheres, respectivamente. Das condições do enunciado, $a = \binom{h}{2}$ e $b = \binom{m}{2}$.

Como o total de jogos do torneio é $\binom{h+m}{2}$, temos que

$$2\left(\binom{h}{2} + \binom{m}{2}\right) = \binom{h+m}{2} \iff h + m = (h - m)^2,$$

ou seja, o total de participantes, $h + m$, é quadrado perfeito.

93. (a) *Demonstração combinatória ou Contagem Dupla*: Considere um conjunto com n elementos. Primeiro determine a quantidade de subconjuntos desse conjunto. Depois calcule a quantidade de subconjuntos com nenhum elemento, com um elemento, com dois elementos, ... , com $n - 1$ elementos, com n elementos. Compare os resultados obtidos.
(b) Aplique o binômio de Newton para a expressão $(1 + x)^n$. Faça $x = 1$.

94. (a) *Demonstração combinatória*: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e depois escolher o restante da comissão.

(b) Use a fórmula $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, derive em relação a x e depois faça $x = 1$.

95. (a) *Demonstração combinatória*: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e uma para secretário, podendo a mesma pessoa acumular os dois cargos, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o secretário entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente, uma pessoa para secretário e depois escolher o restante da comissão.

(b) Comece com $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, derive em relação a x, depois multiplique

a expressão obtida por x,derive mais uma vez em relação a x e faça $x = 1$.

96. (a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e outra para vice-presidente, que se pode formar a partir de n pessoas (portanto as comissões vão

conter ao menos 2 pessoas). Conte essas comissões de 2 maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o vice-presidente entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e outra para vice-presidente e escolher depois o restante da comissão.

(b) Use $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, derive duas vezes em relação a x e depois faça $x = 1$.

97. (a) *Demonstração combinatória:* Dados um conjunto de n homens e n mulheres, conte de duas maneiras diferentes todas as comissões de n pessoas com um homem escolhido para ser o presidente da comissão.
(b) *Utilizando o binômio de Newton:* Considere a igualdade

$$(1+x)^n(1+y)^n = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^j\right],$$

derive em relação a x, faça $y = x$ e, finalmente, identifique o coeficiente de x^{n-1} dos dois lados da igualdade.

98. (a) Considere o problema de formar comissões de n pessoas a partir de um grupo de n homens e n mulheres. Conte essas comissões de duas maneiras diferentes: primeiro diretamente e depois dividindo em casos, conforme o número de mulheres que a comissão contém. Comparando os resultados, obtenha nova demonstração de (3).
(b) Aplique o Binômio de Newton a ambos os lados da igualdade $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$. Comparando a expressão do coeficiente de x^n de ambos os lados, obtenha a identidade acima. Em seguida use a simetria dos números combinatórios para deduzir a identidade.

99. (a) *Demonstração combinatória:* Considere um grupo com m homens e n mulheres. Calcule, de duas maneiras diferentes, a quantidade de comissões de tamanho p possíveis de serem formadas.
(b) *Demonstração utilizando o Binômio de Newton:* Considere $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n\,(1+x)^m$, expanda os três binômios e compare o coeficiente de x^p nos dois lados da igualdade.

100. Considere um grupo de n pessoas ordenadas pela sua idade(1 é o mais novo e n o mais velho). Calcule a quantidade de grupos de pessoas de tamanho k que podem ser escolhidas. Por outro lado, determine quantos subconjuntos de tamanho k possuem i como a pessoa mais velha.

101. De um grupo de n pessoas, deve-se escolher um comitê de tamanho j. Deste comitê, será escolhido um subcomitê de tamanho i, com $i \leqslant j$. Calcule, de duas

maneiras, o número de escolhas possíveis para comitê e subcomitê, inicialmente supondo que o comitê seja escolhido antes do subcomitê e depois supondo que o subcomitê seja escolhido antes do comitê.

102. Comece dividindo ambos os membros por $n+1$ e obtenha

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k} = \binom{2n+1}{n+1}$$

Essa equação é equivalente a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1}\binom{n+1}{n+1-k} = \binom{2n+1}{n}$$

Agora obtenha uma demonstração combinatória para esta equação, escolhendo n pessoas de um grupo de $2n+1$ pessoas de duas maneiras diferentes.

103. Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, o número de permutações que tem k pontos fixos pode ser calculado escolhendo k elementos de I_n e depois dessarumando os demais e isso é igual a $\binom{n}{k} D_{n-k}$. Somando de 0 a n obtemos a expressão da direita. Como já é conhecido que o número de permutações de n elementos é igual a $n!$, segue o resultado.

104. Monte uma tabela 21×21 com as garotas nas linhas e os rapazes nas colunas. Coloque, em cada entrada da tabela, um dos problemas que a garota e o rapaz correspondentes ambos resolveram. Em seguida, pinte de azul as casinhas com problemas que aparecem na mesma linha três vezes (são pelo menos 11 por linha) e de rosa as casinhas com problemas que aparecem na mesma coluna três vezes. O problema se resume a provar que uma casinha fica pintada das duas cores.

105. Consideremos uma turma com $2n$ alunos, n meninos e n meninas, e sua professora T. Denotemos as meninas por $a_1, a_2, ..., a_n$ e os meninos por $b_1, b_2, ..., b_n$. Para $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos os pares de alunos (a_i, b_i). A turma tem n ingressos para um jogo de futebol entre Brasil e Argentina. Consideremos o número de maneiras de encontrar n pessoas entre as $2n+1$ da classe para ir para o jogo. A resposta óbvia é $\binom{2n+1}{n}$.

Por outro lado, nós também podemos calcular esse número da seguinte maneira: fixado um inteiro $k, 0 \leqslant k \leqslant n$, escolha k pares dentre os n pares formados acima e dê um ingresso a cada um desses. Nesse caso há $\binom{n}{k}2^k$ maneiras de encontrar k pares e escolher um estudante de cada par que receberá um ingresso. Com isso restam ainda $n-k$ ingressos e $n-k$ pares de estudantes não forem contemplados com ingresso. Agora escolhemos $\lfloor (n-k)/2 \rfloor$ pares e damos 2 ingressos para cada um desses pares. há $\binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$ maneiras de se fazer isso. até aqui foram atribuídos $S = k + 2\lfloor (n-k)/2 \rfloor$ ingressos. Se $n-k$ é ímpar, $S = n-1$ atribue o último ingresso para a professora; se $n-k$ é par, $S = n$ e não haverá mais ingresso para ser atribuído. é fácil ver que tomando todos os valores de k de 0 até n, obtemos todos os possíveis modos de distribuir esses n ingressos.

Portanto há $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$ maneiras de escolher n pessoas que

receberáo ingresso para o jogo.

4.3 O Princípio das Gavetas de Dirichlet

106. Dados três números inteiros a, b e c (esses são os objetos!) temos, pelo PGD, que pelo menos dois deles tenham a mesma paridade. A diferença desses dois números é par e assim $(a-b)(a-c)(b-c)$ é também é par.

107. Iremos provar que $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)$ é divisível por k, para todo $1 \leqslant k \leqslant n$. De fato, dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos os números inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Como os restos possíveis na divisão por k são $0, 1, \ldots, k-1$ segue que existem $a_i, a_j \in \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ com $i < j$ tais que a_i e a_j deixam o mesmo resto na divisão por k. Portanto $a_j - a_i$ é divisível por k.

108. Considere 13 pontos com coordenadas inteiras. Assim segue, pelo PGD, que pelo menos dois deles têm a mesma cor e a distância entre eles é inteira.

109. O produto dos dez números é igual a $10! = 3628800$. Se o produto dos números de cada grupo não fosse maior que 153, então o produto deles seria no máximo igual a $153^3 = 3581577$.

110. Suponha que todos os alunos colheram quantidades diferentes de laranjas. Então foram colhidas pelo menos $0 + 1 + \cdots + 20 = 210$ laranjas, mas isso dá uma contradição.

111. Considere as somas

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Se alguma dessas somas, digamos S_j, seja divisível por n, então basta fazer $k = 0$ e $\ell = j$. Caso contrário, os restos das somas podem ser $1, 2, \ldots, n-1$ (essas são as gavetas!) e como temos n somas, segue que existem duas somas S_k e S_ℓ, com $k < \ell$, que tem o mesmo resto na divisão por n.

Portanto $S_\ell - S_k = \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ deixa resto 0 na divisão por n.

112. Seja n um inteiro positivo e denotemos $b = 2008$. Agora considere os $n+1$ números inteiros $b, bb, \ldots, \underbrace{b \ldots b}_{n+1}$ (esses são os objetos!), onde $bb = 20082008$ e

assim por diante. Os restos possíveis por n são $0, 1, \dots, n-1$ (essas são as gavetas) e assim existem dois números, digamos $\underbrace{b\dots b}_{k}$ e $\underbrace{b\dots b}_{\ell}$, com $k < \ell$ que têm o mesmo resto na divisão por n e o número $\underbrace{b\dots b}_{\ell} - \underbrace{b\dots b}_{k}$ satisfaz a condição desejada.

113. A soma dos elementos de um subconjunto A é no mínimo 1 e no máximo $97 + 98 + \cdots + 106 = 1015$. Logo os possíveis valores da soma dos elementos de um subconjunto de A são $1, 2, \dots, 1015$. Como A tem $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos não vazios e $1023 > 1015$ segue, pelo PGD, que A tem dois subconjuntos cuja soma dos elementos é igual. Se os conjuntos obtidos forem disjuntos, acabou! Caso contrário, é só retirar os elementos comuns.

114. Sejam $n \in A$ e $b = a_1 a_2 \dots a_k$. Considere os $n+1$ números $b, bb, \dots, \underbrace{b\dots b}_{n+1}$. Logo dois desses números, digamos $\underbrace{b\dots b}_{k}$ e $\underbrace{b\dots b}_{\ell}$, com $k < \ell$ têm o mesmo resto na divisão por n e assim o número $\underbrace{b\dots b}_{\ell} - \underbrace{b\dots b}_{k}$ é divisível por n. Mas $\underbrace{b\dots b}_{\ell} - \underbrace{b\dots b}_{k} = \underbrace{b\dots b}_{\ell-k}\underbrace{0\dots 0}_{k}$ e como n é primo com 10 segue que $b_1 = \underbrace{b\dots b}_{\ell-k}$ é um dos números que procuramos.
Agora considere os $n+1$ números $\underbrace{b\dots b}_{\ell-k+1}, \underbrace{b\dots b}_{2(\ell-k+1)}, \dots, \underbrace{b\dots b}_{(n+1)(\ell-k+1)}$.
Novamente dois deles, digamos $\underbrace{b\dots b}_{i(\ell-k+1)}$ e $\underbrace{b\dots b}_{j(\ell-k+1)}$, com $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$, têm o mesmo resto na divisão por n e $\underbrace{b\dots b}_{j(\ell-k+1)} - \underbrace{b\dots b}_{j(\ell-k+1)} = \underbrace{b\dots b}_{(j-i)(\ell-k+1)}\underbrace{0\dots 0}_{i(\ell-k+1)}$ é divisível por n. Seguindo o mesmo raciocínio acima temos que $b_2 = \underbrace{b\dots b}_{(j-i)(\ell-k+1)}$ é um número procurado diferente de b_1.

Essa ideia pode ser continuada para encontrarmos infinitos números com a propriedade desejada.

115. Para um conjunto com três números consecutivos $A = \{3k-2, 3k-1, 3k\}$ temos que $(3k-2) \cdot 3k + 1 = (3k-1)^2, 4(3k-2)(3k-1) + 1 = (6k-3)^2$ e $4(3k-1) \cdot 3k + 1 = (6k-1)^2$, ou seja, dados x, y dois elementos diferentes de A, temos que $xy + 1$ ou $4xy + 1$ é um quadrado perfeito.

Agora considere os n conjuntos com três elementos $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5, 6\}, \dots, A_n = \{3n-2, 3n-1, 3n\}$. Se escolhermos mais de n números no conjunto $\{1, 2, \dots, 3n\}$ segue, pelo PGD, que pelo menos dois deles pertencem ao mesmo conjunto A_i e pelo observado acima esses números satisfazem a condição desejada.

116. Seja a_i a quantidade de livros vendidos até o dia i, para $1 \leqslant i \leqslant 304$. então $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{304} = 463$. Considere a sequencia $b_i = a_i + 144$. Assim segue que $145 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_{304} = 607$.

Logo $a_i,\ b_j \in \{1,\ \ldots,\ 607\ \}$, para todo $i,\ j \in \{1,\ \ldots,\ 304\ \}$. Pelo PGD, existem $i,\ j$ tais que $a_i = b_j$. Portanto $a_i - a_j = 144$.

117. Note que a expressão $\dfrac{x-y}{1+xy}$ lembra a fórmula $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Sejam $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ os CINCO números reais arbitrários.

Como a função tangente é uma bijeção entre o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$, para cada x_i, existe um $a_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tal que $\tan a_i = x_i$.

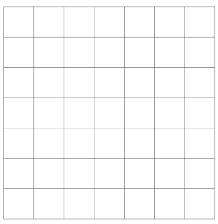
Dividimos os intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ em quatro subintervalos de comprimento $\dfrac{\pi}{4}$. Pelo PGD, temos que existem $a_i,\ a_j$ tais que $0 \leqslant a_i - a_j \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Usando o fato de que a função tangente é crescente em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e a fórmula acima,

temos que $\tan 0 \leqslant \tan(a_i - a_j) \leqslant \tan\dfrac{\pi}{4}$ e assim $0 \leqslant \dfrac{\tan a_i - \tan a_j}{1 + \tan a_i \tan a_j} \leqslant 1$,

ou seja, $0 \leqslant \dfrac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant 1$.

118. A ideia é dividir a cartolina em num reticulado com 49 quadrados de lado 10 cm cada, conforme figura abaixo.



Pelo PGD há pelo menos dois pontos, digamos A e B, num mesmo quadrado. A distância máxima num quadrado de lado 10 cm é igual a diagonal que nesse caso mede $\sqrt{200}$. Como $\sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$, segue o resultado.

119. Vamos fixar uma dessas 6 pessoas, digamos A. Pelo PGD, A conhece ou desconhece três das outras cinco e consideremos dois casos:

(i) A conhece B, C e D. Se duas dessas três se conhecem, acabou. Caso contrário as três não se conhecem mutuamente e também está provado.

(ii) A não conhece B, C e D. Se duas dessas não se conhecem, acabou!. Caso contrário as três se conhecem mutuamente e também está provado.

120. Divida o cubo em oito cubinhos de aresta 1. Pelo PGD haverá pelo menos dois pontos num mesmo cubinho e como a diagonal de um cubinho mede $\sqrt{3}$ segue o resultado.

121. Considere os conjuntos $\{1, 4, 9, 16, 25\}$, $\{2, 8, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{5, 20\}$ e $\{6, 24\}$. Diremos que um subconjunto satisfazendo as propriedades do enunciado é supimpa. Para que um subconjunto seja supimpa, ele só pode possuir no máximo um elemento de cada um dos conjuntos listados. Assim, um subconjunto supimpa possui no máximo $25 - 4 - 2 - 1 - 1 - 1 = 16$ elementos.

Um exemplo de um subconjunto supimpa com 16 elementos é

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}.$$

Portanto, o número máximo de elementos de um subconjunto supimpa é 16.

122. Considere os n conjuntos: $\{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \dots, \{n-1, n+1\}, \{n\}$. Note que a soma dos elementos de cada um dos conjuntos, exceto o último, é igual a $2n$. Se escolhermos $n+1$ números distintos entre 1 e $2n-1$, pelo menos dois deles pertencerão ao mesmo conjunto e assim está provado o resultado.

123. Considere uam festa com n pessoas, para $n \geqslant 2$. Assim o número de conhecidos de cada uma dessas pessoas pode ser um dos seguintes: $0, 1, \dots, n-1$. Se algum conhece $n-1$ pessoas, não é possível que exista alguém que não conhece ninguém. E vice-versa, se algum deles não conhece nenhum dos demais, não é possível que alguém conheça todos. Com isso temos n pessoas (objetos) para $n-1$ possibilidades (gavetas).

124. (a) Vamos distribuir os números de 1 a 20 em 10 conjuntos disjuntos como, por exemplo: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$.

Tomando 11 números de 1 a 20, pelo Princípio das Gavetas, como há 10 conjuntos, necessariamente teremos 2 números no mesmo conjunto, e portanto, temos a propriedade desejada.

(b) Três respostas possíveis: $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,

$\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, e $\{4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19\}$.

125. Escolha dois desses pontos. Sabemos que existe um único círculo máximo $\mathcal{C}$ (equador) que passa por esses pontos. Se esse círculo tiver mais dois ou três pontos, então acabou! Caso esse círculo tenha só mais um ponto, então pelo menos um dos outros dois pontos estará em um dos hemisférios fechados determinados por $\mathcal{C}$. Caso não tenha nenhum ponto sobre $\mathcal{C}$ além dos dois inicias, temos que haverá pelo menos dois pontos em um dos hemisférios fechados determinados por $\mathcal{C}$ e isso termina o problema.

126. Lembre que a matriz $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ é invertível se, e só se,

$$D = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \neq 0.$$

Nesse caso a inversa é dada pela fórmula

$$M^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{22}}{D} & \frac{-m_{12}}{D} \\ \frac{-m_{21}}{D} & \frac{m_{11}}{D} \end{bmatrix}$$

A matriz M tem inversa com entradas inteiras se, e só se, existem x, y, z e t inteiros tais que $m_{11} = xD, m_{12} = yD, m_{21} = zD$ e $m_{22} = tD$.

Logo $D = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = (xt - yz)D^2$ e assim $1 = (xt - yz)D$. Já que $xt - yz$ e D são inteiros segue que $D = 1$ ou $D = -1$. Agora sejam a_{ij} as entradas de A e b_{ij} as entradas de B. Se n é inteiro, então $\det(A + nB) = a + nh + n^2 b$, onde $a = \det A, h = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$ e $b = \det B$. Logo temos um polinômio de grau 2 em n.

Por hipótese as matrizes $A + nB$ tem inversa para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e assim cada uma delas tem determinante 1 ou -1. Assim pelo menos três delas têm o mesmo determinante. Logo existem três valores que distintos de n para o qual o polinômio $bn^2 + hn + a$ assume o mesmo valor. Mas isso só é possível se $b = h = 0$.

Portanto, $\det(A + nb) = a = \det A \in \{-1, 1\}$ para todo n e assim as matrizes da forma $A + nB$ tem inversa com entradas inteiras para todo inteiro n, em particular para $n = 5$.

127. (a) Cada um dos nove números é da forma $2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3}$, onde e_i pode ser par ou ímpar. A tabela abaixo mostra as oito possibilidades para as paridades dos expoentes.

Tabela 4.1:

e_1	ímpar	ímpar	ímpar	par	ímpar	par	par	par
e_2	ímpar	ímpar	par	ímpar	par	ímpar	par	par
e_3	ímpar	par	ímpar	ímpar	par	par	ímpar	par

Como temos nove números (esses são os objetos) e oito possibilidades para os expoentes (essas são as gavetas), pelo PGD dois deles, digamos a e b, serão do mesmo tipo e o produto destes será um quadrado perfeito.

(b) Vamos provar o resultado supondo que M tem 1537 elementos. Se $x \in M$, então $x = 2^{e_1}3^{e_2} \cdots 19^{e_8}23^{e_9}$, onde e_i pode ser par ou ímpar. Como $2^9 = 512$ segue que, nesse caso, temos 512 possibilidades para as paridades dos expoentes (essas são as gavetas!). M tem 1537 elementos, então podemos encontrar $a_1, b_1 \in M$ tais que a_1b_1 é quadrado perfeito. Agora o conjunto $M - \{a_1, b_1\}$ tem 1535 elementos e novamente podemos encontrar $a_2, b_2 \in M$ tais que a_2b_2 é um quadrado perfeito. Esse processo pode ser repetido até encontrarmos os pares de elementos distintos de M $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{512}, b_{512})$ tais que $a_i b_i$ é um quadrado perfeito. Vamos supor que $a_i b_i = c_i^2$, com c_i inteiro. Nesse momento ainda teremos $1537 - 2 \times 512 = 513$ elementos de M que ainda não foram usados. Repetimos mais uma vez o processo e encontramos $a_{513}, b_{513} \in M$ tais que $a_{513} b_{513} = c_{513}^2$ é quadrado perfeito. Agora considere o conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{513}\}$. Nesse conjunto temos 513 elementos cujos primos que aparecem na fatoração desses números são menores ou iguais a 23 e aplicando novamente o raciocínio acima existem $c_i, c_j \in C$ tais que $c_i c_j = d^2$ para algum inteiro d.

Finalmente note que $a_i, b_i, a_j, b_j \in M$ são tais que $a_i b_i a_j b_j = c_i^2 c_j^2 = (c_i c_j)^2 = (d^2)^2 = d^4$.

128. Provaremos o resultado usando indução em n e o PGD.

Para $n = 1$ o resultado segue, pois se tivermos três números inteiros, pelo menos dois deles terão a mesma paridade e assim a soma desses dois números é par, ou seja, divisível por 2^1.

Supõe que o resultado vale para um certo $k \geqslant 1$, isto é, em qualquer conjunto com $2^{k+1} - 1$ números inteiros, é sempre possível encontrar 2^k deles cuja soma é divisível por 2^k.

Consideremos um conjunto X com $2^{k+1+1} - 1$ números inteiros. Pela hipótese de indução podemos encontrar

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2^k} \in X \text{ tais que } \sum_{j=1}^{2^k} a_j = a \cdot 2^k, \text{ com } a \in \mathbb{Z}\,.$$

O conjunto $Y = X - \{a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}\}$ tem $2^{k+2} - 1 - 2^k = 3 \cdot 2^k - 1$ e usando novamente a hipótese de indução, podemos encontrar

$$b_1, b_2, \ldots, b_{2^k} \in Y \subseteq X \text{ tais que } \sum_{j=1}^{2^k} b_j = b \cdot 2^k, \text{ com } b \in \mathbb{Z}\,.$$

O conjunto $Z = Y - \{b_1, b_2, \ldots, b_{2^k}\}$ tem $3 \cdot 2^k - 1 - 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ e usando novamente a hipótese de indução, podemos encontrar

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2^k} \in Z \subseteq X \text{ tais que } \sum_{j=1}^{2^k} c_j = c \cdot 2^k, \text{ com } c \in \mathbb{Z}\,.$$

Pelo PGD, pelo menos dois dos números a, b e c têm a mesma paridade.

Digamos, por exemplo, que a e b tenham a mesma paridade e assim $a + b = 2t$, com $t \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}, b_1, b_2, \ldots, b_{2^k}$ são 2^{k+1} números do conjunto X cuja soma é igual a $t \cdot 2^{k+1}$ que é divisível por 2^{k+1}.

129. Sejam $I = \{1, \ldots, n\}$ e $J = \{n + 1, \ldots, 2n\}$. Afirmamos que, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, um dos termos do par (a_i, b_i) pertence a I e o outro pertence a J.

Suponha que $a_i, b_i \in I$ para um certo i. Então $a_i \leqslant n$ e $b_i \leqslant n$. Assim temos que pelo menos i elementos de A pertencem a I e pelo menos $n - (i - 1)$ elementos de B pertencem a I. Mas $i + [n - (i - 1)] = n + 1$ e assim teríamos $n + 1$ inteiros positivos menos que $n + 1$, o que dá uma contradição.

Agora, suponha que $a_i, b_i \in J$ para um certo i. Logo temos pelo menos i elementos de B em J e $n - (i - 1)$ elementos de A em J. Isso novamente conduz a uma contradição, pois teríamos pelo menos $n + 1$ elementos em J.

Com isso, para cada par (a_i, b_i) temos que um dos elementos pertence a I e o outro pertence a J.

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| =$$

$$[(n+1) + (n+2) + \cdots + 2n] - [1 + 2 + \cdots + n] =$$
$$[1 + 2 + \cdots + 2n] - 2 \cdot [1 + 2 + \cdots + n] = n(2n+1) - n(n+1) = n^2 \ . \ \square$$

130. (ideia): Seguindo raciocínio semelhante ao usado para provar a Identidade de Proizvolov, para cada par (a_i, b_i), um dos termos será menor que c_{n+1} e o outro será maior que c_n. E assim note que cada termo da forma $|a_i - b_i|$ é igual a $c_\ell - c_k$ com $k \leqslant n < \ell$.

$$\text{Por exemplo, se } c_n = n^2, \text{ então } \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2(2n+1) \ .$$

131. Dada uma permutação $x = (x_1, ..., x_m)$ de S_m, definimos a permutação complementar como sendo $z = (m + 1 - x_1, \ldots, m + 1 - x_m)$.

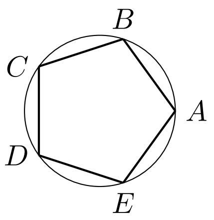
Por exemplo, em S_3 o complementar de (123) é (321), em S_5, a permutação complementar de (23154) é (43512).

Agora consideremos a sequência y com m coordenadas iguais a $(m + 1)/2$.

afirmação: Dada uma permutação x de S_m e sua complementar z, segue que $f(x) - f(y) = f(y) - f(z)$.

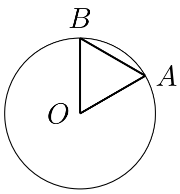
Agora consideremos $\{f(x) : x \in S_m\} \bigcup \{f(y)\}$. Assim temos um conjunto com $m! + 1$ números. Pelo PGD segue que dois deles devem ter o mesmo resto na divisão por $m!$. Caso nenhum deles for y, acabou. Se um deles for y e algum x de S_m, posso tomar x e seu complementar z, pois $f(x) - f(z) = (f(x) - f(y)) + (f(y) - f(z)) = 2(f(x) - f(y))$.

132. Suponha que exista uma forma de pintar o plano de forma que não exista um triângulo isósceles monocromático. Assuma que as cores sejam azul, preto e vermelho. Construa um suponha sem perda de generalidade que o seu centro O seja vermelho. Dessa forma, pode haver no máximo um único ponto vermelho dentre os pontos dos círculo. Assim é possível construir um pentágono regular $ABCDE$ cujos vértices são todos azuis ou pretos.



Pelo PGD, existirão três vértices do pentágono que são da mesma cor. E como quaisquer três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles, existirá um triângulo isósceles monocromático.

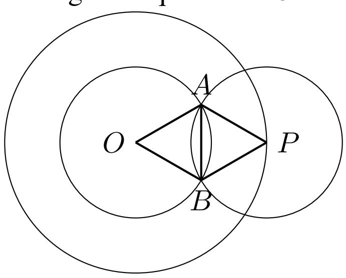
133. Tome um ponto O do plano e trace um círculo com centro nesse ponto e de raio 1 metro. Em seguida, construa um triângulo equilátero tendo como pontos o centro e dois pontos A e B da circunferência.



Assim temos três pontos (objetos) que a distância entre dois quaisquer é 1 metro e, pelo PGD, dois deles deverão ter a mesma cor.

Observação. *Esse problema é impossível para* 7 *ou mais cores e está em aberto para* $4, 5$ *ou* 6 *cores.*

134. Considere um ponto O, que podemos supor que seja vermelho. Trace a circunferência de raio $\sqrt{3}$ metros. Existem duas possibilidades . Todos os pontos em que o círculo é vermelho ou há um ponto que é preto ou azul. No primeiro caso, os pontos de extremidade de qualquer corda de comprimento 1 metro irá ser da mesma cor (vermelho), resolvendo assim o problema. Caso contrário, supõe que haja ponto preto P na circunferência. Agora considere as circunferências de centros O e P com raio 1 metro. Elas se cortam em dois pontos A e B, que formam dois triângulos equiláteros OAB e PAB de lado 1.



Se A ou B for vermelho, o segmento AO ou BO satisfaz a condição; se A ou B for preto, o segmento AP ou BP satisfaz a condição; se A e B forem azuis, o segmento AB resolve o problema.

135. Desenhe três retas horizontais, digamos r, s e t. Agora trace uma reta u que seja perpendicular a essas três. Assim temos três pontos de interseção de u com cada uma das demais. A tabela abaixo mostra as oito possíveis configurações colorações desses três pontos na vertical.

Tabela 4.2:

A	A	A	V	V	V	A	V
A	A	V	A	A	V	V	V
A	V	A	A	V	A	V	V

Se tivermos mais oitos retas verticais, além de u, é claro que haverá duas interseções com a mesma configuração e, portanto teremos um retângulo monocromático.

136. Supõe que um triângulo T seja coberto por dois triângulos equiláteros R e S. Assim, todo ponto de T estará em R ou em S. Em particular, os três vértices de T devem estar distribuídos nos triângulos R e S e, pelo PGD, um deles, digamos R, deve conter pelo menos dois vértices de T. Mas assim R é pelo menos do mesmo tamanho de T, o que dá uma contradição. Assim é impossível cobrir um triângulo equilátero com dois equiláteros menores.

137. Lembre que se as coordenadas dos vértices de um triângulo são $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, então o baricentro é o ponto

$$P = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

Pelo PGD existem pelo menos 13 pontos que têm a coordenada x com mesmo resto na divisão por 3. Desses, pelo PGD, há pelo menos 5 pontos que têm a coordenada y com o mesmo resto na divisão por 3. Dos cinco pontos finais, aplicando mais uma vez o PGD, existem pelo menos três deles tais que a coordenada z deles têm o mesmo resto na divisão por 3. Portanto, esses três pontos satisfazem a condição do problema.

138. Observe que não podem haver três hobbits mentirosos vizinhos, pois nesse caso o hobbit do meio diria que seus vizinhos falam a verdade.

(a) Suponha que haja no máximo nove hobbits que falam a verdade. Assim teremos, no máximo nove espaços entre eles e assim só será possível colocar no máximo 18 hobbits mentirosos sem que haja três mentirosos vizinhos. Assim haveria no máximo 27 hobbits, o que dá uma contradição.

(b) É possível haver exatamente dez hobbits que falam a verdade, veja duas configurações abaixo, onde eles estão listados da posição 1 até a 29 e em que V significa uma hobbit que fala a verdade e M um mentiroso.

$$VMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVM.$$
$$MVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMVMMV.$$

139. Entre 1 e 100 há 25 números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$. Por outro lado os números $1001!+2, 1001!+3, \ldots, 1001!+1001$ são 1000 números consecutivos compostos. Começando com os números de 1 a 100 vamos acrescentando o seguinte e retirando o menor: primeiro troca 1 a 100 por 2 a 101, depois troca para 3 a 102, etc. Temos intervalos 100 números consecutivos vai aumentando ou diminuindo de no máximo uma unidade a cada passo. Assim, como era 25 inicialmente, pode ser igual a 0 e aumenta ou diminui de 1 em 1, em algum momento será igual a 20.

140. Denominemos os três temas de T_1, T_2 e T_3. Considere um estudante qualquer, digamos A. Pelo PGD ele falou sobre o mesmo assunto com pelo menos 6 estudantes, vamos supor que tenha sido o tema T_3. Se dois desses seis tenham conversado o tema T_3, está provado. Agora supõe que os 6 alunos tenham conversado apenas sobre os temas T_1 e T_2 entre si. Escolhemos um deles, digamos B. Pelo PGD, B discutiu um assunto com pelo menos três dos outros 5, vamos supor que tenha sido o tema T_2. Se dois desses três conversaram T_2, acabou. Caso contrário os três conversaram T_1 entre si e também está provado.

141. 1991 é claramente um desses números. Considere todos os infinitos números da forma 199...91, com mais de três noves. Como há infinitos números (esses são os objetos) e o resto da divisão de qualquer número inteiro por 1991 é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 1990$ (essas são as gavetas), então dois números deixam o mesmo resto. Se subtrairmos esses números obtemos um número múltiplo de 1991 (os restos se cancelam). Assim, existem k e ℓ tais que $1\underbrace{99...9}_{k}1 - 1\underbrace{99...9}_{\ell}1 =$ 199...9800...0 é múltiplo de 1991.

Podemos cortar os zeros à direita e o número continua múltiplo de 1991, mas mantemos três deles: 199...98000 é múltiplo de 1991. Somando 1991 obtemos $199...98000 + 1991 = 199...99991$ que é múltiplo de 1991. É fácil ver que esse número tem pelo menos três noves. Supõe que esse número tem m noves.

Agora considere os infinitos números da forma 199...91, com mais de $t + 1$ noves. Seguindo a mesma estratégia acima encontramos um múltiplo de 1991 com pelo menos $t + 1$ noves . Esse raciocínio pode ser continuado para a obtenção do resultado.

142. Para cada jogador denominaremos a sua parada como sendo o número de jogos entre duas partidas consecutivas, incluindo a partida seguinte. Com isso todas as paradas são iguais a, no mínimo, $n + 1$.

Considere $n + 3$ partidas consecutivas $p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}$ com $2n + 6$ jogadores envolvidos (claro que há repetições!). Afirmamos que no máximo 3 jogadores poderão participar em dois desses jogos. Isso é verdade, pois supõe que o jogador

A participe de p_1 e p_{n+2}, o jogador B participe de p_1 e g_{n+3}, o jogador C participe de p_2 e p_{n+3}, não é possível nenhum outro jogar duas vezes. Logo as paradas são de tamanho $n+1$ ou $n+2$ apenas!

Assim é suficiente provar que um jogador teve todas as paradas iguais a $n+2$, já que o total de jogos é igual $\binom{2n+3}{2} = (2n+3)(n+1) = 1 + (2n+1)(n+2)$.

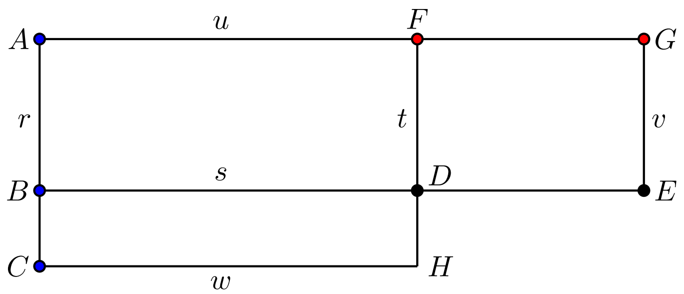
Supõe que isso seja falso, ou seja, que todos os jogadores tiveram pelo menos uma parada de tamanho $n+1$. Considere A o último jogador a ter uma parada de $n+1$, ou seja, até essa jogada A sempre parou $n+2$ e todos os outros já pararam $n+1$ jogos pelo menos uma vez. Seja b o número do jogo que A fez após a sua primeira parada de tamanho $n+1$ e seu adversário foi B. Além disso, denomine de a o jogo que B fez antes de sua última parada de $n+1$ jogos. Logo entre o jogo $a+n+1$ e o jogo b, B fez apenas paradas de tamanho $n+2$ e assim $b = a + (n+1) + k(n+2)$ para algum inteiro positivo k. Já sabemos que todas as paradas de A antes do jogo b foram de tamanho $n+2$. Se ele teve pelo menos k paradas, então disputou o jogo a com B, mas isso é impossível. Por outro lado, se ele teve no máximo $k-1$ paradas de tamanho $n=2$, então seu primeiro jogo foi no mínimo $b-(n+1)-(k-1)(n+2) = a+(n+2) \geqslant n+3$. Portanto no máximo $2n+2$ jogadores participaram das $n+2$ primeiras partidas, mas isso só seria possível se o jogo 1 e o $n+2$ fossem disputados pelos mesmo jogadores, o que também dá uma contradição.

Com isso concluímos que um jogador teve todas as suas paradas de tamanho $n+2$ e jogou a primeira e a última partida.

143. Como uma reta tem infinitos pontos, é claro que toda reta vertical tem pelo menos três pontos da mesma cor. Vamos supor que os pontos A, B e C estão numa reta vertical r e que são pontos de cor azul. Agora traçamos a reta s perpendicular a r passando por B. Se a reta s tiver um ponto X diferente de B que seja azul, temos um triângulo retângulo azul ABX, por exemplo.

Caso contrário, supõe que B é o único ponto de cor azul de s. Então podemos supor que s tem dois pontos, denominados D e E, de cor preta. Tracemos a reta t perpendicular a s passando por D e a reta u perpendicular a r passando por A. Denominamos o ponto de interseção de t e u como sendo F. Se F tiver cor azul, o triângulo retângulo ABF será azul. Se F for um ponto preto, o triângulo retângulo FDE será preto.

A outra hipótese é F ser um ponto vermelho. Nesse caso traçamos a reta v perpendicular a s passando por E e seja G o ponto de interseção das retas u e v. Se G for azul ou preto, acabou! Se G for vermelho, trace a reta w perpendicular a r que passa por C. Seja H o ponto de interseção de t e w. Se H for azul, temos o triângulo retângulo azul ACH. Se H for preto, DHE será um triângulo retângulo preto. E finalmente, se H for vermelho, o triângulo GFH será retângulo e vermelho.



144. Iremos encontrar duas sequências de inteiros p_n e q_n tais que $\lim_{n\to\infty} q_n e - p_n = 0$ e $q_n e - p_n \neq 0,$ para todo $n \geqslant 1$.

De fato, sejam $q_n = n!$ e $p_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Então $q_n e - p_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} > 0$.

Além disso, para $k \geqslant n+1$ temos que $\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{(n+1)\cdot\ldots\cdot k} \leqslant \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$

Assim segue que $q_n e - p_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} n! \frac{1}{n!}\frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^m} = \frac{1}{n}$.

Portanto $\lim_{n\to\infty} q_n e - p_n = 0$ e e é irracional.

145. Note que, para todo inteiro positivo k, temos k inteiros positivos compostos (deserto de primos): $(k+1)!+2, (k+1)!+3, \ldots, (k+1)!+k+1$ e assim a sequência $(p_{n+1} - p_n)_n$ é ilimitada.

É fácil ver que a série acima converge, pois $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p_j}} \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}$.

Agora vamos supor que a soma é um número racional a/b, com a e b inteiros positivos. Para cada $n \geqslant 1$ temos que

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p_j}} = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{p_j}} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c}{2^{p_n}} - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{1}{b\cdot 2^{p_n}}.$$

Por outro lado $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p_j}} \leqslant \sum_{j=p_{n+1}}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{p_{n+1}-1}}$

Logo $b \geqslant 2^{p_{n+1}-p_n-1}$, para todo $n \geqslant 1$, mas então $p_{n+1} - p_n \leqslant \log_2 b + 1$, para todo n, o que dá uma contradição.

146. Numere os vértices sucessivos de 1 a 20 no sentido horário. Cada um dos quatro conjuntos de vértices $\{1,5,9,13,17\}, \{2,6,10,14,18\}, \{3,7,11,15,19\}$, $\{4,8,12,16,20\}$ é formado por cinco vértices que formam um pentágono regular. Como pintamos nove pontos de vermelho temos, pelo PGD, que há pelo menos três desses pontos no mesmo conjunto. Como quaisquer três vértices de um pentágono

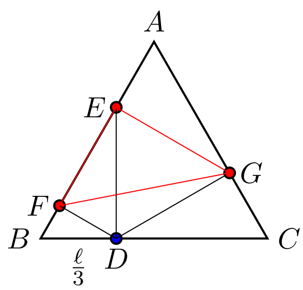
regular formam um triângulo isósceles, segue o resultado.

147. Veja a solução em http://www.math.hawaii.edu/ dale/putnam/1989.pdf

148. Veja a solução em http://www.math.hawaii.edu/ dale/putnam/2000.pdf

149. https://suhaimiramly.files.wordpress.com/2009/10/official-solution-to-imo-2007.pdf

150. Considere um triângulo equilátero ABC de lado ℓ. Faremos algumas construções geométricas e posteriormente atacaremos o problema.
Seja D o ponto sobre o lado BC de modo que a distância até B é igual a $\frac{\ell}{3}$.
A reta perpendicular a BC, pelo ponto D, intersecta o lado AB no ponto E.
A reta perpendicular a AB, pelo ponto D, intersecta o lado AB no ponto F.
A reta perpendicular a AC, pelo ponto D, intersecta o lado AC no ponto G.
O triângulo DFE é retângulo por construção e o triângulo FEG também é retângulo (mostre que o ângulo $F\widehat{E}G$ é reto!).



Vamos supor, sem perda de generalidade que o ponto D está pintado de azul e assim consideremos as oito possíveis colorações dos pontos E, F e G.

Tabela 4.3:

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8
E	A	A	A	V	V	V	A	V
F	A	A	V	A	A	V	V	V
G	A	V	A	A	V	A	V	V

Como os triângulo FEG é retângulo segue que o problema está provado nos casos 1 e 8 (esse é o da figura).
Caso ocorra 2 também temos o triângulo retângulo monocromático (azul) DFE.
Caso 3: se houver um outro ponto azul X diferente de G no lado AC, temos que DGX é um triângulo que satisfaz o problema. Outra possibilidade é que todos os pontos do lado AC, exceto G, sejam vermelhos. Assim podemos traçar a projeção ortogonal (ponto X) de F sobre AC e marcamos mais um ponto Y sobre AC diferente de G e o triângulo FXY satisfaz o problema.

Caso 4: semelhante ao caso anterior, trocando F por E.
Caso 5: se existir um ponto azul X diferente de F sobre o lado AB temos que XFD satisfaz a condição do problema. Por outro lado, se todos os pontos sobre o lado AB, exceto F, forem vermelhos, basta tomar um desses pontos, digamos Y, e o triângulo YEG resolve a questão.
Caso 6: se existir um ponto azul X sobre AC, diferente de G, use o triângulo DGX. Caso contrário, todos os pontos sobre o lado AC, exceto G são vermelhos. Basta tomar a projeção ortogonal de F sobre AC e mais um ponto diferente deste e de G e temos a solução.
Caso 7: se existir um ponto azul X sobre BC diferente de D, então toma o triângulo EDX. Caso todos os pontos sobre BC, exceto D, sejam vermelho, basta tomar o ponto projeção de G sobre BC e mais um ponto sobre BC diferente de D e está resolvido.

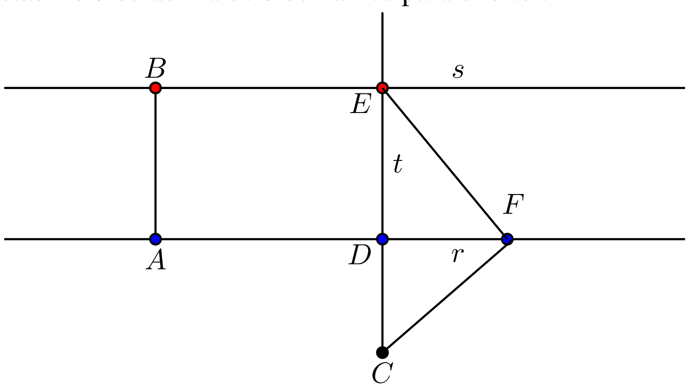
151. Para cada $n \geqslant 2$ seja $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ o conjunto das classes de resto módulo n. Agora considere a função $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, f(t) = t^3 - t$. Como $f(\overline{0}) = f(\overline{1}) = \overline{0}$, segue que f não é injetiva e assim também não é sobrejetiva. Portanto, para todo $n \geqslant 2$, existe $y \in \mathbb{Z}_n$ tal que a equação $t^3 - t = y$ não tem solução. Veremos alguns exemplos.
Se n é das formas $6\ell, 6\ell + 2, 6\ell + 3$ ou $6\ell + 4$, podemos tomar $m = 1$.
Para $n = 5$, a imagem de $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(t) = t^3 - t$ é dada por $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}\}$. Assim podemos tomar $m = 2$ e $k^3 - k + 2$ não é divisível por 5 para nenhum inteiro k.
Para $n = 7$, a imagem de $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7, f(t) = t^3 - t$ é dada por $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\}$. Assim podemos tomar $m = 2$ e $k^3 - k + 2$ não é divisível por 7 para nenhum inteiro k.

152. Vamos trabalhar com um reticulado, que pode representar o plano com pontos nas coordenadas inteiras. O problema supõe um reticulado infinito, mas só precisaremos de um reticulado 3000×3000. Para começar, note que existem 3000 pontos na diagonal principal do nosso reticulado. Pelo PGD, pelo menos 1000 destes pontos tem mesma cor, vamos supor azul. Analisando estes 1000 pontos azuis, escolhendo dois a dois como vértices de um triângulo, podemos formar $\binom{1000}{2} = 499500$ triângulos isósceles diferentes usando os pontos abaixo da diagonal principal. Se algum dos 499500 novos vértices dos triângulos for azul, o problema estará resolvido. Caso nenhum seja azul eles estarão divididos entre vermelhos e pretos e, também pelo PGD, pelo menos $499500/2 = 249750$ deles vai ter uma mesma cor, digamos preto. Note que estes pontos pretos estarão divididos nas 2999 subdiagonais abaixo da diagonal principal. O PGD nos garante que existirá pelo menos uma subdiagonal S com pelo menos $\lceil 249750/2999 \rceil = 84$ pontos pretos. Também escolhendo entre estes 84 pontos pretos, dois a dois, podemos formar $\binom{84}{2} = 3486$ triângulos isóceles abaixo da subdiagonal S. Se algum dos novos vértices dos triângulos for preto, o problema está provado. Caso nenhum deles seja preto, note que também não podem ser azuis, pois estes novos vértices são também vértices dos triângulos definidos pelos pontos azuis do caso inicial, e estamos supondo que nenhum deles é azul. Assim sendo, caso nenhum seja preto,

serão todos vermelhos. Temos então 3486 pontos vermelhos. Estes 3486 pontos vermelhos estão divididos entre as outras 2998 subdiagonais e, pelo PGD, pelo menos $\lceil 3486/2998 \rceil = 2$ estão numa mesma subdiagonal D. Estes dois pontos vermelhos formam um triângulo isóceles com um ponto abaixo da subdiagonal D. Para mostrar que este ponto é vermelho, basta notar que ele faz parte dos 499500 que supomos não serem azuis e dos 3486 que supomos não serem pretos. Assim, só pode ser vermelho.

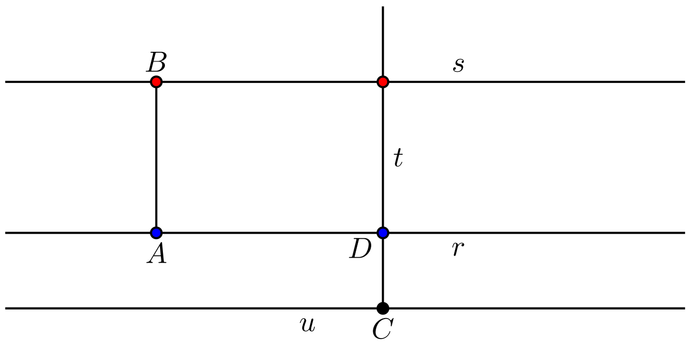
153. Podemos fazer isso tomando qualquer carta de qualquer baralho, colocando sobre a mesa e vendo seu verso. Depois disso procuramos a carta de mesmo número do verso (procurando no outro baralho, já que já foi usada no primeiro baralho). Fazemos com esta carta o mesmo que foi feito com a primeira carta. Continua-se a fazer isso até fechar um ciclo (um mesmo número que já saiu em um baralho sair no outro). Quando um ciclo for fechado pega-se outra carta e começa um novo ciclo. Fazendo isso até o final das cartas as faces voltadas para cima mostrarão todos os números de 1 a 100. Note que o processo termina, pois a quantidade de cartas que sobram após fechar cada ciclo diminui.

154. Vamos supor que as três cores sejam azul, preta e vermelha. Consideremos um ponto azul A e um vermelho B. Agora tracemos as duas retas r e s perpendiculares ao segmento AB, uma passando por A e outra por B. Caso haja um ponto de cor preta em uma das retas r ou s, o resultado está provado. Caso contrário não haverá ponto de cor preta sobre nenhuma das retas. Então há um ponto C de cor preta fora das retas r e s. Trace uma reta t, passando por C que seja perpendicular a r e s. Se o ponto E de interseção de t e s for azul, acabou. Caso contrário o ponto é vermelho. Nessa situação se houver um ponto azul sobre s, o problema está resolvido. A outra possibilidade é que todos os pontos sobre s sejam vermelhos. Raciocínio semelhante pode ser feito na interseção entre t e r. A situação não estará resolvida caso todos os pontos sobre s sejam vermelhos e todos os pontos sobre r sejam azuis. Vamos considerar D o ponto de interseção entre r e t e E o ponto de interseção das retas s e t. Agora basta construir um ponto F sobre a reta r de modo que o ângulo $E\widehat{F}C$ seja reto. Os casos em que o ponto preto está entre as retas r e s ou acima de s deixamos para o leitor.



155. Adapte a demonstração do exercício anterior, mas agora os pontos têm coordenadas inteiras. Construa uma reta u paralela a r, passando por C. Se u tiver um ponto com a cor azul ou vermelha, acabou! Caso contrário, todos os pontos de u serão da cor preta.

Vamos supor que todos os pontos de r são azuis, que os pontos de u são pretos e que os pontos de s são vermelhos. Além disso, podemos supor que s é a reta $y = h$, r é a reta $y = 0$ e u é a reta $y = -t$, com h e t positivos. O triângulo de vértices $X = (h, h)$ (ponto vermelho), $Y = (h + t, 0)$ (ponto azul) e $Z = (t, -t)$ é um triângulo retângulo ($X\widehat{Y}X$ é reto).



156. Faça uma partição das pessoas no sentido horário da seguinte forma:

$\{P_1, P_2\}, \{P_3, P_4\}, \ldots, \{P_{99}, P_{100}\}$. Os pares de pessoas em cada conjunto serão denominados vizinhos. Agora vamos compor os dois grupos A e B de 50 pessoas. Coloque P_1 no conjunto A, o compatriota de P_1 em B e o vizinho, digamos x, do compatriota de P_1 em A. Agora ponha o compatriota de x em B e o vizinho deste em A e assim por diante até que seja colocado a pessoa P_2. Nesse momento reinicia o processo com o próximo que ainda não foi colocado em nenhum dos grupos. É fácil ver que esse algoritmo resolve o problema.

Referências Bibliográficas

[1] AIGNER, M; ZIEGLER, G.M. Proofs from THE BOOK. Springer Verlag, 2014.

[2] ALZER, H. A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality. American Mathematical Monthly **103** (1996), 585.

[3] ANDREESCU, T.; FENG, Z. 102 Combinatorial Problems. Birkhäuser Boston, 2002.

[4] DAWS, M. Pick's Theorem. http://www1.maths.leeds.ac.uk/ mdaws/notes/pick_proof.pdf

[5] DERKSEN, H. Problem Set 7: Pigeon Hole Principle. *www.math.lsa.umich.edu/ hderksen/ProblemSolving/PS.pdf*

[6] DOERING, C.I. Introdução à Análise Matemática na Reta. SBM: Rio de Janeiro, 2015.

[7] FERGUSON, T.S. Game Theory. (http://www.math.ucla.edu/ tom/math167.html)

[8] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculo Matemáticos. A Experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[9] GUNDERSON, D. S. Handbook of mathematical induction: theory and applications. CRC Press, 2010.

[10] HOLANDA, B. Jogos. (http://poti.impa.br/upload/Aula%2006%20-%20Jogos45.pdf)

[11] HOLANDA, B.; AUGUSTO, C. BARBOSA, S.; LIMA, Y. Treinamento Cone Sul 2007.

[12] KOSHY, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. John Wiley & Sons, 2001.

[13] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. A Matemática do Ensino Médio, Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] LOPES, L. Manual de Indução Matemática. Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

[15] LOVÁSZ, I.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[16] MARTINEZ, F.B.; MOREIRA, C.G.T.A; SALDANHA, N.; TENGAN, E. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[17] MISTURINI, R.; STEFFENON, R.R. Uma Grosa de Problemas de Matemática. Goiânia: III Bienal da SBM, 2006. (http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/misturini.steffenon.pdf)

[18] MORGADO, A.C.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[19] MUNIZ NETO, A.C. Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1, Números Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[20] MUNIZ NETO, A.C. Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4, Combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[21] OLIVEIRA, K.I.M; FERNANDEZ, A.J.C. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM.

[22] ROSEN, K. Elementary Number Theory and its applications. Addison Wesley, 2005.

[23] ROSEN, K. Matemática Discreta e Suas Aplicações. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

[24] SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[25] SHINE, C.Y. Existe, mas não sei exibir, (http://cyshine.webs.com/existe.pdf)

[26] SHINE, C.Y. Contagem Dupla. (http://poti.impa.br/upload/Aula%2003%20-%20Contagem%20Dupla.pdf)

[27] SPIER, T.J.; STEFFENON, R.R. Jogos matemáticos: uma maneira divertida de aprender Matemática. Maceió: VII Bienal da SBM, 2012.

[28] STEFFENON, R.R. Alguns belos problemas de matemática discreta. João Pessoa: V Bienal da SBM, 2010.

[29] TAVARES, J.N. Teorema de Pick. http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/

SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

FURG

ISBN 978-85-8337-099-4

9 788583 370994 >