

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES

REGIÃO NORTE



IV Colóquio de Matemática
da Região Norte

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES NO \mathbb{R}^2

JOÃO SOCORRO PINHEIRO FERREIRA



UNIFAP



SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sistemas Dinâmicos Lineares no \mathbb{R}^2

Sistemas Dinâmicos Lineares no R2

Copyright © 2016 Sistemas Dinâmicos Lineares no R2

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Hilário Alencar

Vice- Presidente: Paolo Piccione

Diretores: João Xavier

José Espinar

Marcela de Souza

Walcy Santos

Editor Executivo

Hilário Alencar

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Comitê Científico

Eduardo Teixeira – UFC

Giovany Malcher Figueiredo – UFPA

João Xavier Cruz Neto – UFPI

José Nazareno Vieira Gomes – UFAM

Sandra Augusta Santos – UNICAMP

Eliane Leal Vasquez – UNIFAP (Coordenadora Geral)

Marcel Lucas Picanço Nascimento – UNIFAP

Comitê Organizador Local (UNIFAP)

Eliane Leal Vasquez

Gilberlandio Jesus Dias

Guzmán Eulálio Isla Chamilco

João Socorro Pinheiro Ferreira

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Naralina Viana Soares da Silva

Sergio Barbosa de Miranda

Simone de Almeida Delphim

Capa: Pablo Diego Regino

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)

ISBN (eBook) 978-85-8337-108-3



IV Colóquio de Matemática
da Região Norte

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES NO \mathbb{R}^2

JOÃO SOCORRO PINHEIRO FERREIRA

1ª EDIÇÃO
2016
MACAPÁ



UNIFAP



SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Dedicamos aos participantes deste minicurso e ao Comitê Organizador Local (UNIFAP) do 4º Colóquio de Matemática da Região Norte - 4CMRN.

Sumário

1	SISTEMAS DINÂMICOS	3
1.1	Sistemas dinâmicos lineares no \mathbb{R}^n	4
1.1.1	Solução de um sistema dinâmico linear no \mathbb{R}^n	4
1.1.2	Ponto crítico e estabilidade	6
1.2	Sistemas dinâmicos lineares no \mathbb{R}^2	7
1.2.1	Ponto crítico	7
1.2.2	Redução a uma EDO de 2ª ordem, linear e homogênea	8
1.2.3	Polinômio característico	8
1.2.4	Autovalores ou valores próprios	9
1.2.5	Discriminante	9
1.2.6	Autovetores ou vetores próprios	9
1.2.7	Solução geral de SDL no \mathbb{R}^2	10
1.2.8	Classificação (natureza) dos pontos críticos	13
2	APLICAÇÕES	19
2.1	Sistema dinâmico linear: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	19
2.1.1	(Re)solução	19
2.2	Estabilidades do oscilador harmônico	21
2.2.1	Velocidade nula: $b = 0$ (OHS)	22
2.2.2	Velocidade positiva: $b > 0$	25
2.2.3	Velocidade negativa: $b < 0$	27
2.3	Problema da mistura	30
2.3.1	(Re)Solução	31
2.3.2	Estabilidade	32
2.3.3	Retrato de fase	33
3	CONCLUSÃO	35
	REFERÊNCIAS	37

PREFÁCIO

O Curso de Licenciatura em Matemática da UNIFAP está organizando o 4º Colóquio de Matemática da Região Norte, que ocorrerá no período de 7 a 11 de novembro de 2016 e para o qual tivemos aceito este minicurso sobre Sistemas Dinâmicos Lineares no \mathbb{R}^2 , tema de grande importância para acadêmicos e pesquisadores de todas as áreas de conhecimento científico. A restrição deste tema se dá pela carga horária prevista para o minicurso, porém em outras oportunidades avançaremos para sistemas não lineares e quase lineares. É só o participante ficar atento.

Os sistemas dinâmicos têm grandes aplicações na modelagem matemática e estudo qualitativo de fenômenos biomatemáticos (a matemática que estuda a vida), biológicos, comportamentais, econômicos, físicos, químicos e sociais entre outros. A análise qualitativa diz respeito à estabilidade do sistema na vizinhança de um ou mais pontos críticos de um sistema. Estes são compostos por Equações Diferenciais Ordinárias – EDO's de ordem n e servem para a melhor compreensão (descrição) de fenômenos no que diz respeito à natureza das observações. Os sistemas autônomos são compostos por EDO's no \mathbb{R}^n e as soluções também são funções do \mathbb{R}^n . Neste minicurso, abordaremos somente os sistemas dinâmicos lineares de primeira ordem no \mathbb{R}^2 , isto é, aqueles cuja região de domínio é $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Um dos principais pesquisadores sobre sistemas dinâmicos é Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), matemático francês, por ser um dos precursores dos estudos sobre sistemas dinâmicos (autônomos), tendo apresentado as descrições do que hoje é conhecido como plano de fase, bem como estudos sobre ponto crítico, estabilidade e também sobre a existência de ciclos limites para sistemas não lineares, porém outros contribuíram, como por exemplo o matemático Bendixon, Dulac, Hartann e Grobman.

Neste livro estudaremos as teorias que servem de fundamentação científica para a utilização de sistemas dinâmicos no entendimento dos fenômenos citados no início deste prefácio e também as aplicações práticas, objetivando sempre os participantes a entenderem para que servem os conteúdos estudados.

FERREIRA, J. S. P.

Capítulo 1

SISTEMAS DINÂMICOS

Definição 1.1. Segundo [1], os sistemas dinâmicos são aqueles compostos por equações independentes do tempo. As equações que compõem o sistema são EDO's de ordem n :

$$F(\mathbf{X}) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

onde Ω é uma região aberta denominada de domínio e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$.

Os sistemas dinâmicos de primeira ordem, são formados por EDO's de primeira ordem, conforme a representação a seguir:

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \tag{1.1}$$

em que $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$ é o vetor velocidade das trajetórias (órbitas), $F = (f_1, \dots, f_n)$

é a função campo vetorial e $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é o vetor solução do sistema dinâmico

(1.1).

A função de campo vetorial do segundo membro do sistema (1.1):

$$F(\mathbf{X}) = A\mathbf{X} + h(\mathbf{X}) \tag{1.2}$$

é formada por partes correspondentes a linear e a não linear, por isso os sistemas dinâmicos classificam-se em lineares, não lineares ou quase lineares.

Considerando-se que este livro abordará somente os lineares, a partir da seção seguinte estudaremos somente os lineares.

Aplicando-se a propriedade de produto de potência no lado direito desta igualdade, tem-se: $\mathbf{X} = e^{tA}e^K$. Para determinar o valor da constante K , usa-se as condições iniciais (ou de contorno), $\mathbf{X}(0) = X_0$. Assim, $\mathbf{X}(0) = e^0e^K = X_0$. Consequentemente, $e^K = X_0$. Substituindo-se este último resultado em $\mathbf{X} = X_0e^{tA}$. Se a matriz A for diagonalizável, então ela pode ser decomposta em um produto matricial, conforme a seguir: $A = PDP^{-1}$. Substituindo-se este resultado no anterior, obtém-se: $\mathbf{X} = X_0e^{t(PDP^{-1})}$. Pelo método de exponencial matricial, temos que: $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$. Substituindo-se esta matriz exponencial, no resultado anterior, obtém-se (1.5), em que P é a matriz cujas colunas são os autovetores associados aos autovalores da matriz A , D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz A , P^{-1} é a matriz inversa de P e \mathbf{X}_0 é o vetor das constantes. \square

Exponencial matricial

Para obter o resultado (1.5) usamos o seguinte teorema:

Teorema 1.2. *A exponencial matricial da matriz A é*

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} \tag{1.6}$$

Por isso vamos demonstrá-lo a seguir:

Demonstração. A série de Taylor da função exponencial $f(t) = e^t$ é $s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

De maneira análoga, para a função exponencial $f(tA) = e^{tA}$, é:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \tag{1.7}$$

A matriz A é diagonalizável e pode ser escrita como: $A = PDP^{-1}$. A n ésima potência da matriz quadrada A é obtida por:

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n \text{ vezes}} \\ &= PD \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} DP^{-1} \cdots PD \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} DP^{-1} \\ &= PDIDP^{-1} \cdots PDIDP^{-1} \\ &= PDDP^{-1} \cdots PDDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} \cdots PD^2P^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} \tag{1.9}$$

portanto, (1.9) é a n -ésima potência de uma matriz quadrada de ordem n .

Substituir (1.9) em (1.7), tem-se:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n P D^n P^{-1}}{n!}$$

como a série acima depende de n , os termos independentes de n podem ser colocados em evidência. Assim, as matrizes P e P^{-1} são escritas conforme a seguir:

$$e^{tA} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n D^n}{n!} \right) P^{-1} \tag{1.10}$$

Contudo, a série de potência entre parênteses é a série de Taylor para a função $f = e^{tD}$:

$$e^{tD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n D^n}{n!} \tag{1.11}$$

Substituindo-se (1.11) na equação (1.10), encontramos a exponencial matricial de A , conforme a seguir:

$$e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}. \tag{1.12}$$

□

1.1.2 Ponto crítico e estabilidade

Nos sistemas autônomos, muitas vezes é mais interessante o estudo do comportamento das funções soluções na vizinhança de um ponto fixo que o estudo da própria solução. Este comportamento é denominado estabilidade do sistema e pode ser analisado a partir dos sinais de seus autovalores e de sua complexibilidade.

Definição 1.3. *(Ponto crítico)*

Segundo [1], dado o sistema $\dot{X} = F(X)$. Um ponto $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto crítico do sistema se $F_i(\bar{X}) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, quando $\dot{X} = 0$.

Definição 1.4. *(Ponto crítico estável)*

De acordo com [1], um ponto crítico \bar{X} do sistema autônomo $\dot{X} = F(X)$ é um ponto estável se, dado $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que toda solução $\phi(t)$ do sistema que satisfaz em $t = t_0$, $\|\phi(t_0) - \bar{X}\| < \delta$, então $\|\phi(t) - \bar{X}\| < \epsilon$, $\forall t \leq t_0$.

Isto significa que toda solução que começa próxima ao ponto crítico \bar{X} (raio δ) permanece próxima a ele (raio ϵ).

Definição 1.5. *(Ponto crítico assintoticamente estável)*

A esse respeito [1], um ponto crítico \bar{X} do sistema autônomo $\dot{X} = F(X)$ é um ponto assintoticamente estável se existir $\delta_0 > 0$ tal que $\|\phi(t_0) - \bar{X}\| < \delta_0$, então $\lim \phi(t) = \bar{X}$, quando $t \rightarrow \infty$.

1.2. SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES NO \mathbb{R}^2

7

Isso significa que uma solução que começa próxima ao ponto crítico $\bar{\mathbf{X}}$, não somente permanece próxima a este ponto, como também tende a ele quando $t \rightarrow \infty$

Definição 1.6. Ponto crítico instável

Conforme [1], um ponto crítico $\bar{\mathbf{X}}$ do sistema autônomo $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$ é um ponto instável se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se verifica $\|\phi(t_0) - \bar{\mathbf{X}}\| < \delta$, existe algum $t > t_0$ tal que $\|\phi(t) - \bar{\mathbf{X}}\| > \epsilon$.

Isso significa que ao menos uma solução que começa próxima ao ponto crítico $\bar{\mathbf{X}}$ se afasta do mesmo.

Devido ao tempo (carga horária) destinado(a) ao(s) minicurso(s), serão analisados somente os sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^2 , por isso nas seções e subseções do capítulos seguintes, centralizaremos os nossos estudos somente nesta dimensão.

1.2 Sistemas dinâmicos lineares no \mathbb{R}^2

A dimensão do espaço topológico determina o número de equações. Se $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ então o sistema possui duas equações e cada equação tem no máximo duas variáveis independentes.

Segundo [1], um sistema dinâmico de segunda ordem é do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.13)$$

onde os coeficientes a, b, c e d são constantes reais. Pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

ou

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (1.15)$$

1.2.1 Ponto crítico

Para este sistema, o ponto de equilíbrio é a origem $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$. Este ponto é isolado, isto é, é o único ponto de equilíbrio de (1.13) no disco (domínio)

$$B_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < \epsilon\} = \Omega.$$

Observação 1.1. Se o sistema $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ tem solução única $\{x = 0, y = 0\}$ então $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

1.2.2 Redução a uma EDO de 2ª ordem, linear e homogênea

Vamos resolver (reduzir) o sistema (1.13) usando o método de eliminação. Podemos substituir o sistema (1.13) numa equação diferencial de segunda ordem. Supondo que $b \neq 0$, tiramos o valor de y na primeira equação do sistema (1.13):

$$y = \frac{1}{b} \left(\frac{dx}{dt} - ax \right),$$

agora, derivando ambos os membros desta equação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - a \frac{dx}{dt} \right),$$

e substituindo o valor de dy/dt acima na segunda equação do sistema (1.13):

$$\frac{1}{b} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - a \frac{dx}{dt} \right) = cx + d \left[\frac{1}{b} \left(\frac{dx}{dt} - ax \right) \right]$$

multiplicar por $b \neq 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a \frac{dx}{dt} = bcx + d \frac{dx}{dt} - adx,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a \frac{dx}{dt} - d \frac{dx}{dt} - bcx + adx = 0$$

ou,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + d) \frac{dx}{dt} + (ad - bc)x = 0 \tag{1.16}$$

1.2.3 Polinômio característico

O polinômio característico associado a equação (1.16) é dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{1.17}$$

em que Θ é o traço

$$\Theta = Tr(A) = a + d \tag{1.18}$$

e Γ o determinante

$$\Gamma = Det(A) = ad - bc \tag{1.19}$$

da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1.2.4 Autovalores ou valores próprios

São as raízes do polinômio (equação) característico(a) (1.17). Os seus valores são encontrados pelas seguintes equações:

$$\lambda_1 = \frac{\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 4\Gamma}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{\Theta - \sqrt{\Theta^2 - 4\Gamma}}{2}.$$

1.2.5 Discriminante

O discriminante (Δ) também assume um papel importante na análise qualitativa de um sistema dinâmico linear no \mathbb{R}^2 , pois conforme o seu sinal, as trajetórias tem um comportamento na vizinhança e afastando-se do ponto crítico. A sua representação é:

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{Discr}(A) \\ &= \Theta^2 - 4\Gamma. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Substituindo-se as equações (1.18) e (1.19) na equação (1.17), o polinômio característico também é representado da seguinte forma:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \Theta\lambda + \Gamma = 0 \quad (1.21)$$

As raízes do polinômio característico (1.17) ou (1.21) são denominadas de autovalores ou valores próprios (eigenvalues).

1.2.6 Autovetores ou vetores próprios

São os autovetores associados aos respectivos autovalores.

Segundo [4], nós escrevemos o sistema de equações (1.15) em notação vetorial como

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X}, \quad (1.22)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

para um sistema 2×2 . (De modo mais geral, A é uma matriz $n \times n$, e \mathbf{X} é um n -vetor quando estamos lidando com um sistema de n equações diferenciais com

n variáveis.) A multiplicação de matrizes, a notação $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ representa um vetor cujas entradas são dx_1/dt e dx_2/dt .

Para sistemas do tipo (1.22) nós assumiremos que a solução também é da forma

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}. \tag{1.25}$$

Derivando-se (1.25) em função do tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} &= \mathbf{v} \frac{d}{dt} (e^{\lambda t}) \\ &= \mathbf{v}\lambda e^{\lambda t}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Agora \mathbf{v} deve ser um vetor cujas entradas são independentes do tempo. Usando essa idéia, nós substituímos (1.26) e (1.25) em (1.22), temos:

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} &= A\mathbf{v}e^{\lambda t} \\ A\mathbf{v}e^{\lambda t} - \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} &= 0 \\ (A\mathbf{v} - \lambda \mathbf{v})e^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

A última igualdade tem de ser satisfeita se (1.26) ser uma solução de sistema (1.22). Cancelar o fator comum $e^{\lambda t}$ resulta em

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \tag{1.27}$$

onde no \mathbb{R}^2 , $i = 1, 2$.

Os vetores próprios são obtidos pela seguinte equação:

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_i - a}{b} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

para $b \neq 0$.

Uma vez que os eigenvectors \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são encontrados, a solução geral (desde que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e ambos são reais) é dada pela equação (1.29).

1.2.7 Solução geral de SDL no \mathbb{R}^2

Se $\Delta > 0$ então $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e a solução geral de (1.13) é dada por:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= c_1 \frac{\lambda_1 - a}{b} e^{\lambda_1 t} + c_2 \frac{\lambda_2 - a}{b} e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{1.29}$$

Se $\Delta = 0$ então os $\lambda_1 = \lambda_2$ e a solução geral de (1.13) é dada por:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) &= (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ y(t) &= (d_1 + d_2 t)e^{\lambda t} \end{cases} \tag{1.30}$$

onde $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ e apenas duas das constantes c_1, d_1, c_2 e d_2 são independentes.

$n = 2$. A exponencial matricial de D , é: $e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} & \frac{\lambda_2-a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2-a}{b} & -1 \\ \frac{a-\lambda_1}{b} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ &= \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} & \frac{\lambda_2-a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\lambda_2-a}{b} & -1 \\ \frac{a-\lambda_1}{b} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}} \\ &= \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} & \frac{\lambda_2-a}{b} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2-a}{b}e - f \\ \frac{a-\lambda_1}{b}e + f \end{bmatrix}} \\ &= \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} & \frac{\lambda_2-a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} \left(\frac{\lambda_2-a}{b}e - f \right) \\ e^{t\lambda_2} \left(\frac{a-\lambda_1}{b}e + f \right) \end{bmatrix}} \\ &= \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} \left(\frac{\lambda_2-a}{b}e - f \right) + e^{t\lambda_2} \left(\frac{a-\lambda_1}{b}e + f \right) \\ \frac{\lambda_1-a}{b}e^{t\lambda_1} \left(\frac{\lambda_2-a}{b}e - f \right) + \frac{\lambda_2-a}{b}e^{t\lambda_2} \left(\frac{a-\lambda_1}{b}e + f \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \left(\frac{(\lambda_2-a)e}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{t\lambda_1} + 1 \left(\frac{(a-\lambda_1)e}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{t\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1-a}{b} \left(\frac{(\lambda_2-a)e-bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) \frac{b}{\lambda_2-\lambda_1} e^{t\lambda_1} + \frac{\lambda_2-a}{b} \left(\frac{(a-\lambda_1)e+f}{\lambda_2-\lambda_1} \right) \frac{b}{\lambda_2-\lambda_1} e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \left(\frac{(\lambda_2-a)e-bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{t\lambda_1} + 1 \left(\frac{(a-\lambda_1)e+bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{t\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1-a}{b} \left(\frac{(\lambda_2-a)e-bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{t\lambda_1} + \frac{\lambda_2-a}{b} \left(\frac{(a-\lambda_1)e+bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $c_1 = \frac{(\lambda_2-a)e-bf}{\lambda_2-\lambda_1}$, $c_2 = \frac{(a-\lambda_1)e+bf}{\lambda_2-\lambda_1}$, $d_1 = \frac{\lambda_1-a}{b} \left(\frac{(\lambda_2-a)e-bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right)$ e $d_2 = \frac{\lambda_2-a}{b} \left(\frac{(a-\lambda_1)e+bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right)$, para $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + d_1 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} .$$

□

Analisando-se a demonstração acima, é possível escrever a solução (1.33) em função dos autovetores da matriz A , conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1-a}{b} \end{bmatrix} \left(\frac{(\lambda_2-a)e-bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2-a}{b} \end{bmatrix} \left(\frac{(a-\lambda_1)e+bf}{\lambda_2-\lambda_1} \right) e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1 \mathbf{v}_1 e^{t\lambda_1} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{t\lambda_2} \\ &= \sum_{i=1}^2 C_i \mathbf{v}_i e^{t\lambda_i} . \end{aligned}$$

Teorema 1.4. A solução geral de um SDL no \mathbb{R}^n em função de seus autovalores é:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{v}_i e^{t\lambda_i} . \tag{1.34}$$

3. Raízes λ_1 e λ_2 complexas conjugadas ($\Delta < 0$).

As raízes dos polinômios característicos (1.21) são:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad e \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

e a solução geral de (1.13) toma a forma

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \\ y(t) = e^{\alpha t}(d_1 \cos(\beta t) + d_2 \sin(\beta t)) \end{cases} \quad (1.36)$$

onde somente duas constantes são independentes. Como as partes trigonométricas de $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, a natureza do ponto crítico $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ é determinada pelo sinal da parte real das raízes:

$$\alpha = \frac{a + d}{2} = \frac{a + d}{2} = \frac{\Theta}{2}$$

- (i) Se $\alpha < 0$, o movimento de todas as trajetórias é em direção ao ponto crítico (estabilidade assintótica) e, se $\alpha > 0$, acontece o contrário (instabilidade).
- (ii) Se $\alpha = 0$, $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$, o movimento é periódico no tempo e as órbitas do sistema são curvas fechadas contendo em seu interior o ponto crítico estável $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$, que neste caso é denominado de centro.

Teorema 1.5. *Seja $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ ponto crítico do sistema linear (1.13) Dizemos que $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$:*

- (a) *é assintoticamente estável se $\Theta = Tr(A) < 0$ e $\Gamma = det(A) > 0$;*
- (b) *é estável se $\Theta = Tr(A) = 0$ e $\Gamma = det(A) > 0$;*
- (c) *é instável se $\Theta = Tr(A) > 0$ ou $\Gamma = det(A) < 0$.*

Demonstração. Encontra-se em: [3] e [4]. □

Um estudo mais sucinto qualitativamente de sistemas lineares bidimensionais é apresentado por [2], que complementa resumidamente o estudo anteriormente apresentado que diz o seguinte: o estudo da natureza do ponto de equilíbrio $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ fica restrito ao comportamento dos valores λ_1 e λ_2 , mais especificamente dos seus sinais. Assim $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ será:

1.2. SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES NO \mathbb{R}^2

1. Estável, se cada ponto $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ numa vizinhança de $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ permanece limitado quando $t \rightarrow \infty$;
isto ocorre se as raízes λ_1 e λ_2 são números imaginários: $\lambda_1 = \beta i$ e $\lambda_2 = -\beta i$.
2. Assintoticamente estável, se cada ponto $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$;
isto ocorre se as raízes λ_1 e λ_2 são ambos negativos ou, se complexos, então a parte real é negativa ($\alpha < 0$).
3. instável se $x \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow +\infty$;
isto ocorre se pelo menos uma das raízes λ_1 ou λ_2 for positiva.

Podemos resumir os tipos de estabilidade do ponto $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ em seis casos distintos: nó instável, ponto de sela, espiral (sentido anti-horário), nó estável, espiral (sentido horário) e centro.

Os diferentes tipos de órbitas obtidas do sistema linear (1.13) cujo polinômio característico é (1.21) ($ad - bc \neq 0$), estão resumidas na Tabela 1.1. A Tabela 1.1

Tabela 1.1: Tipos de ponto de equilíbrio e estabilidade de SDL.

Discriminante	Autovalor	Tipo de Ponto de Equilíbrio	Esboço da Órbita	Estabilidade
$\Delta > 0$	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	1.1(a)	Instável
	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó		AE
	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	PS	1.1(b)	Instável
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó		Instável
	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó	1.2(a)	AE
$\Delta < 0$	$\lambda = \alpha \pm i\beta$			
	$\alpha > 0$ (i)	PE	1.1(c)	Instável
	$\alpha < 0$ (ii)	PE	1.2(b)	AE
	$\alpha = 0$	Centro	1.2(c)	Estável

Fonte: [1] (1988).

N.A.: AE: Assintoticamente Estável; PS: Ponto de Sela; PE: Ponto Espiral;

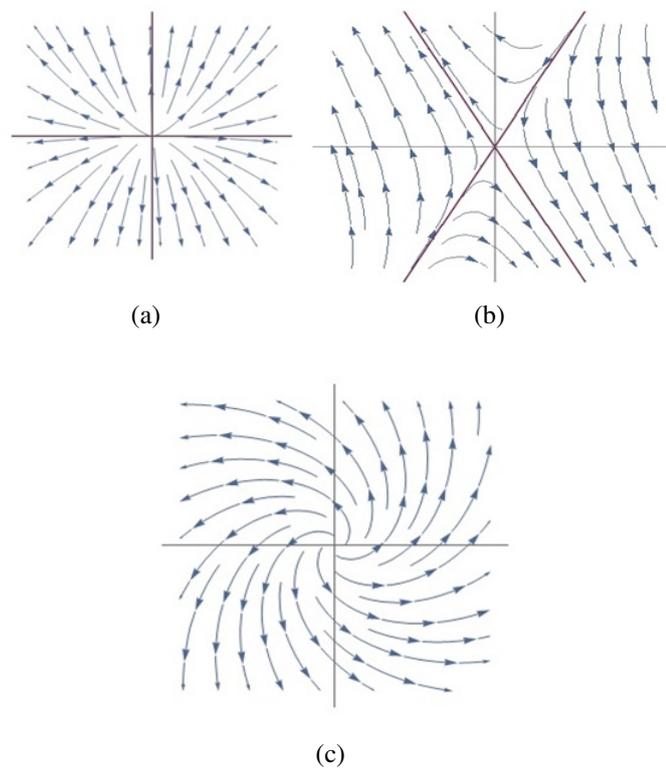
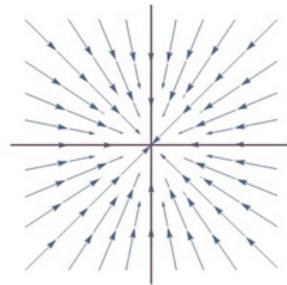
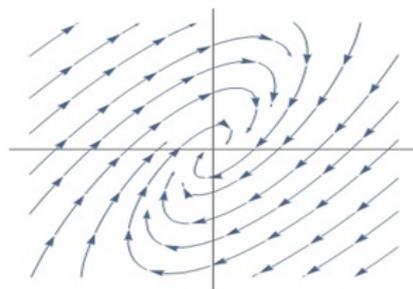


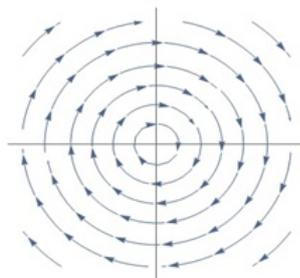
Figura 1.1: (a) Nó instável (λ_1 e $\lambda_2 > 0$); (b) Ponto de sela ($\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$); (c) Espiral ($\lambda_{1,2} = +\alpha \pm \beta i$). São os três casos de pontos instáveis de sistemas lineares bidimensionais.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.2: (a) Plano de fase: $\Delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. (b) Plano de fase: $\Delta < 0$ e $\alpha < 0$; (c) Plano de fase: $\Delta < 0$ e $\alpha = 0$.

Capítulo 2

APLICAÇÕES

Neste capítulo estudaremos algumas aplicações de sistemas dinâmicos lineares no \mathbb{R}^2 , com o objetivo de fixação dos conteúdos estudados no Capítulo 1.

2.1 Sistema dinâmico linear: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Considere o sistema autônomo linear de EDO's:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Resolva-o a partir da contribuição dos seus autovalores e autovetores.

2.1.1 (Re)solução

Trata-se de um sistema dinâmico (autônomo) linear (SDL) que tem um único ponto crítico que é a origem $\dot{\mathbf{X}} = (0, 0)$ e a sua estabilidade é estudada a partir dos sinais de seus autovalores λ .

Este sistema (2.1) pode ser escrito sob a forma matricial (1.3)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

é a matriz com os coeficientes constantes deste sistema.

A matriz (2.2) é diagonalizável, porque pode ser decomposta nas matrizes: $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, em que $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz A ,

onde b é velocidade escalar e $m \neq 0$ é a massa do sistema massa-mola, que caracteriza a imposição de duas forças, uma proporcional ao deslocamento e a outra proporcional à velocidade da partícula (de massa unitária) que se desloca.

Neste exemplo, estamos considerando a massa unitária ($m = 1$), logo a equação (2.8) é reescrita conforme a seguir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (2.9)$$

Existem três (3) categorias de osciladores harmônicos (OH), a saber: oscilador harmônico simples (OHS: velocidade nula, $b = 0$), oscilador harmônico amortecido (OHA: velocidade não nula, $b \neq 0$) e oscilador harmônico forçado (OHF: não homogêneo). As duas primeiras categorias são EDO's de segunda ordem homogêneas.

Por serem homogêneas, vamos estudar as duas primeiras categorias: a primeira em que a velocidade é nula¹ e a segunda, considerando-se a velocidade positiva² e considerando a velocidade negativa³.

2.2.1 Velocidade nula: $b = 0$ (OHS)

Suponhamos que a velocidade seja nula ($b = 0$), então a equação (2.9) se reduz a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (2.10)$$

Adotaremos $k > 0$. A equação (2.9) de segunda ordem é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx \end{cases}. \quad (2.11)$$

Vetor solução

A solução deste sistema (2.11) é obtida conforme a seguir. Pode-se escrever sob a forma (1.14) e nos ajudar a identificar se ele é linear ou não linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

¹N.A.: A velocidade é nula em um OH quando o corpo encontra-se nos extremos do sistema massa mola (amplitude máxima positiva ou negativa). A justificativa é que o sistema está mudando de sentido.

²N.A.: Suponhamos que o período do OHA seja $T = 2\pi$ e o sistema massa mola esteja na posição inicial, $-A$. No intervalo de $]0, T/2[$ a velocidade é positiva e em $T/4$ é máxima porque está passando pela origem do sistema.

³N.A.: No intervalo de $]T/2, T[$ a velocidade é negativa e em $3T/2$ é máxima (porém com sinal negativo) porque está passando novamente pela origem do sistema.

2.2. ESTABILIDADES DO OSCILADOR HARMÔNICO

23

portanto, é linear.

O $\Theta = 0$, $\Gamma = k > 0$ e $\Delta = -4k < 0$; com estes três parâmetros podemos escrever o polinômio característico da matriz A , a partir da equação (1.21):

$$P(\lambda) = \lambda^2 + k = 0 \quad (2.13)$$

cujas raízes (autovalores) são:

$$\lambda_1 = +i\sqrt{k}$$

e

$$\lambda_2 = -i\sqrt{k}$$

complexas conjugadas, com $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{k}$. Como $\alpha = 0$ o sistema é estável e o ponto crítico $\mathbf{X} = (0, 0)$ é um centro (ver o item 1 da análise qualitativa), e as soluções $\mathbf{X}(t)$ são periódicas.

O vetor solução, é:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) &= x_0 \cos(\sqrt{k}t) + y_0 \sin(\sqrt{k}t) \\ y(t) &= \sqrt{k}(y_0 \cos(\sqrt{k}t) + x_0 \sin(\sqrt{k}t)) \end{cases}$$

onde x_0 e y_0 são valores iniciais das variáveis de estado para $t = 0$.

Observação 2.1. Para $m \neq 1 > 0$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ é a frequência natural do sistema.

Retrato de fase

As trajetórias das órbitas são obtidas diretamente da solução ou através da equação

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{kx}$$

cuja integração

$$\begin{aligned} kx dx + y dy &= 0 \\ k \int x dx + \int y dy &= \int 0 \\ k \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} &= 0 + C \end{aligned}$$

multiplicando-se por 2:

$$\begin{aligned} kx^2 + y^2 &= 2C = c_1 \\ \frac{kx^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_1} &= 1 \end{aligned}$$

2.2.2 Velocidade positiva: $b > 0$

Considerando agora a velocidade positiva no OH ($b > 0$), a equação (2.8) é equivalente ao sistema dinâmico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx - by \end{cases} \quad (2.15)$$

Vetor solução: $\mathbf{X}(t)$

A solução deste sistema (2.15) é análoga a seção anterior. Pode-se escrevê-lo sob a forma (1.14) o que nos ajuda a identificar se ele é linear ou não linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

portanto, é linear.

O $\Theta = -b$, $\Gamma = k > 0$ e $\Delta = b^2 - 4k$. Com os dois primeiros parâmetros podemos escrever o polinômio característico da matriz A , tendo como base a equação (1.21):

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + k = 0 \quad (2.17)$$

cujas raízes (autovalores) são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$$

Como o discriminante Δ varia de sinal durante o movimento do OH, logo temos três subcasos a ser estudados:

1. Se $b^2 < 4k$ (a viscosidade é bem pequena) o $\Delta < 0$, então

$$\lambda_1 = \frac{-b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2} = \frac{-b}{2} + \frac{\sqrt{-(4k - b^2)}}{2} = -\frac{b}{2} + i \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{-b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2} = \frac{-b}{2} - \frac{\sqrt{-(4k - b^2)}}{2} = -\frac{b}{2} - i \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2}$$

Neste caso, $\alpha = -\frac{b}{2} < 0$ e $\beta = \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2} = \sqrt{\frac{4k - b^2}{4}} = \sqrt{k - \frac{b^2}{4}} = \omega$.

Logo, o ponto de equilíbrio $\mathbf{X} = (0, 0)$ é assintoticamente estável (ver Item 2), as soluções são espirais que convergem para a origem quando t

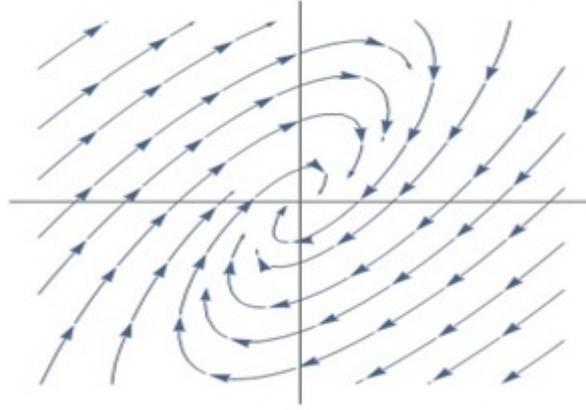


Figura 2.2: Ponto espiral: assintoticamente estável. $\lambda_{1,2} = -a \pm ib$.
 Fonte: Do Autor, com o auxílio do *software* Mathematica do Wolfran (2016).

cresce (ver Figura 2.2). Isto pode ser comprovado se considerarmos o vetor solução:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) &= e^{-\frac{b}{2}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \\ y(t) &= e^{-\frac{b}{2}t} \left[\left(B\omega - \frac{Ab}{2} \right) \cos(\omega t) - \left(A\omega + \frac{b}{2}B \right) \sin(\omega t) \right] \end{cases}$$

onde $\omega = \sqrt{k - \frac{b^2}{4}}$.

Tomando $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ obtemos $A = x_0$ e $B = \frac{2y_0 + cx_0}{2\omega}$.

Fazendo $x_0 = R \cos(\theta)$ e $B = R \sin(\theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) &= Re^{-\frac{b}{2}t} [\cos(\omega t - \theta)] \\ y(t) &= Re^{-\frac{b}{2}t} \left[\frac{b}{2} \cos(\omega t - \theta) + \sin(\omega t - \theta) \right], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.18)$$

que é a equação de uma espiral no plano de fase e $\lim(x(t), y(t)) = (0, 0)$. (ver Figura 2.2).

Observação 2.2. Para $m \neq 1 > 0$, $\gamma = \frac{k}{2m}$ é o coeficiente de amortecimento.

- Se $b^2 = 4k$, o $\Delta = 0$ então as raízes são reais, iguais e negativas (movimento superamortecido), e o vetor solução é do tipo (1.35):

$$\begin{cases} x(t) &= (c_1 + c_2 t) e^{-ct/2} \\ y(t) &= (d_1 + d_2 t) e^{-ct/2} \end{cases} \quad (2.19)$$

2.2. ESTABILIDADES DO OSCILADOR HARMÔNICO

27

Como os dois autovalores são negativos, o $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$, logo o equilíbrio é assintoticamente estável.

3. Se $b^2 > 4k$, o $\Delta > 0$ então as raízes são reais e desiguais, e o vetor solução é do tipo (1.33):

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) &= c_1 e^{\frac{\sqrt{c^2-4k-c}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{c^2-4k-c}}{2}t} \\ y(t) &= d_1 e^{\frac{\sqrt{c^2-4k-c}}{2}t} + d_2 e^{-\frac{\sqrt{c^2-4k-c}}{2}t} \end{cases} \quad (2.20)$$

Como os dois autovalores são negativos, o $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$, logo o equilíbrio é instável (ponto de sela).

Retrato de fase

De acordo com [1] (1988, p. 347), para se obter as equações das trajetórias no plano de fase, é mais simples analisar a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx}{y} - b.$$

Desta equação concluímos que o coeficiente angular da reta tangente à trajetória do sistema amortecido é obtido ao acrescentarmos $-b$ ao coeficiente angular do sistema sem amortecimento. Isto favorece o traçado destas trajetórias, com base nas elipses obidas quando $b = 0$

2.2.3 Velocidade negativa: $b < 0$

Considerando agora a velocidade negativa no OHA ($b < 0$), a equação (2.8) é equivalente ao sistema dinâmico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -kx + by \end{cases} \quad (2.21)$$

Vetor solução: $\mathbf{X}(t)$

A solução deste sistema (2.21) é análoga a seção anterior. Pode-se escrevê-lo sob a forma (1.14) o que nos ajuda a identificar se ele é linear ou não linear:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

portanto, também é linear.

O $\Theta = b > 0$, $\Gamma = k > 0$ e $\Delta = b^2 - 4k$. Com os dois primeiros parâmetros podemos escrever o polinômio característico da matriz A_3 , tendo como base a equação (1.21):

$$P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + k = 0 \tag{2.23}$$

cujas raízes (autovalores) são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}.$$

Como o discriminante Δ varia de sinal durante o movimento do OH, logo temos três subcasos a ser estudados:

1. Se $b^2 < 4k$ (a viscosidade é bem pequena) o $\Delta < 0$, então

$$\lambda_1 = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{-(4k - b^2)}}{2} = -\frac{b}{2} + i \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2}.$$

e

$$\lambda_2 = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4k}}{2} = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{-(4k - b^2)}}{2} = \frac{b}{2} - i \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2}.$$

Neste caso, $\alpha = \frac{b}{2} > 0$ e $\beta = \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2} = \sqrt{\frac{4k - b^2}{4}} = \sqrt{k - \frac{b^2}{4}} = \omega$.

Logo, o ponto de equilíbrio $\mathbf{X} = (0, 0)$ é instável (ver Item), as soluções são espirais que divergem para a origem quando t cresce.

Isto pode ser comprovado se considerarmos o vetor solução:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) &= e^{\frac{b}{2}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \\ y(t) &= e^{\frac{b}{2}t} \left[\left(B\omega - \frac{Ab}{2} \right) \cos(\omega t) - \left(A\omega + \frac{b}{2}B \right) \sin(\omega t) \right] \end{cases}$$

onde $\omega = \sqrt{k - \frac{b^2}{4}}$.

Tomando $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ obtemos $A = x_0$ e $B = \frac{2y_0 + cx_0}{2\omega}$.

Fazendo $x_0 = R \cos(\theta)$ e $B = R \sin(\theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) &= Re^{-\frac{b}{2}t} [\cos(\omega t - \theta)] \\ y(t) &= Re^{-\frac{b}{2}t} \left[\frac{b}{2} \cos(\omega t - \theta) + \sin(\omega t - \theta) \right], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \tag{2.24}$$

que é a equação de uma espiral no plano de fase e $\lim(x(t), y(t)) = (0, 0)$. (ver Figura 2.3).

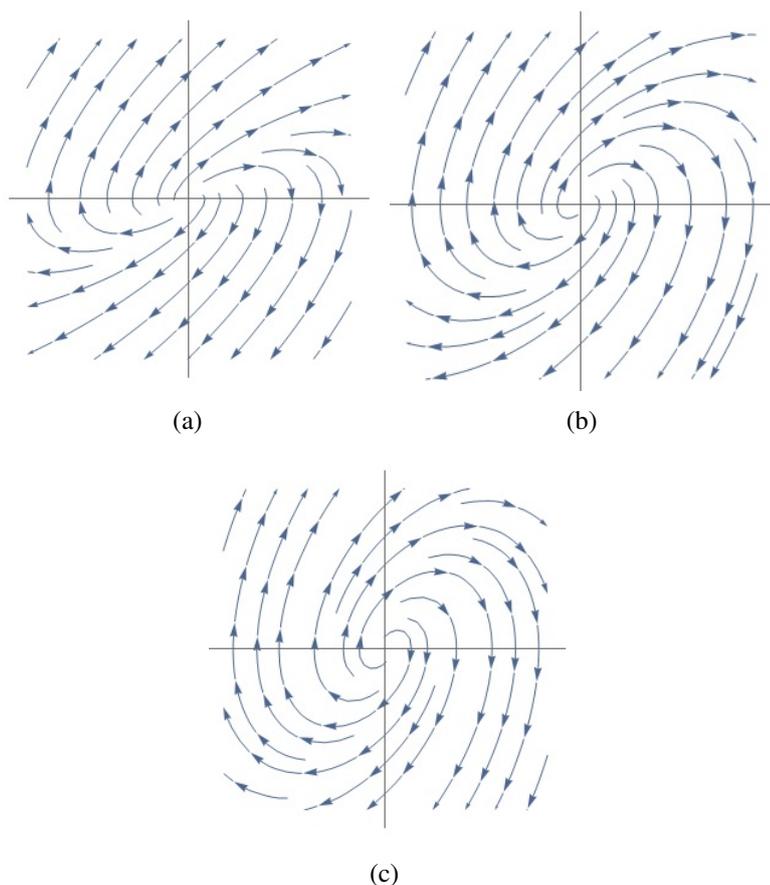


Figura 2.3: (a) $0 < k < 1$ e $b = 1$: ponto espiral (instável); (b) $k = 1$ e $b = 1$: ponto espiral (instável); (c) $k > 1$ e $b = 1$: ponto espiral (instável).

Fonte: Do Autor, com o auxílio do *software* Mathematica do Wolfram (2016).

2. Se $c^2 = 4k$, o $\Delta = 0$ então as raízes são reais, iguais e positivas (movimento superamortecido), e o vetor solução é do tipo (1.35):

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-ct/2} \\ y(t) = (d_1 + d_2 t)e^{-ct/2} \end{cases} \quad (2.25)$$

Como os dois autovalores são negativos, o $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$, logo o equilíbrio é instável (nó).

3. Se $b^2 > 4k$, o $\Delta > 0$ então as raízes são reais e desiguais, e o vetor solução é do tipo (1.33):

$$\mathbf{X}(t) = \begin{cases} x(t) = c_1 e^{(\frac{\sqrt{b^2-4k-b}}{2})t} + c_2 e^{-(\frac{\sqrt{b^2-4k-b}}{2})t} \\ y(t) = d_1 e^{(\frac{\sqrt{b^2-4k-b}}{2})t} + d_2 e^{-(\frac{\sqrt{b^2-4k-b}}{2})t} \end{cases} \quad (2.26)$$

Como os dois autovalores tem sinais contrários, logo o ponto de equilíbrio é instável (ponto de sela).

Retrato de fase

De acordo com [1] (1988, p. 347.), para se obter as equações das trajetórias no plano de fase, é mais simples analisar a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx}{y} - b.$$

Desta equação concluímos que o coeficiente angular da reta tangente à trajetória do sistema amortecido é obtido ao acrescentarmos $-c$ ao coeficiente angular do sistema sem amortecimento. Isto favorece o traçado destas trajetórias, com base nas elipses obidas quando $c = 0$.

2.3 Problema da mistura

Em uma indústria, dois tanques se encontram conectados conforme a ilustração abaixo.

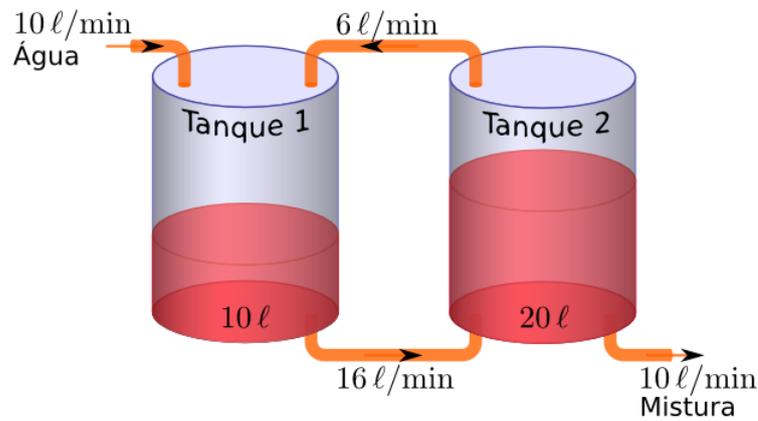


Figura 2.4: Dois tanques conectados com indicação do fluxo da mistura.

Fonte: <http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/sourceforge/pngtest.php>

No instante de tempo $t = 0$, o Tanque 1 contém 10 litros de água pura e o Tanque 2 contém 20 litros de uma mistura de água com 12 Kg de sal. Água pura está sendo constantemente bombeada para dentro do Tanque 1 a uma taxa de 10 litros por minuto, as misturas salinas são trocadas entre os dois tanques como na figura acima, e a mistura escoo do Tanque 2 a uma taxa de 10 litros por minuto. Encontre a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t .

2.3.1 (Re)Solução

Como a quantidade de líquido que entra em cada tanque é igual à quantidade que sai, o volume de mistura em cada tanque permanece constante. Então o Tanque 1 contém sempre 10 litros de mistura e o Tanque 2 contém sempre 20 litros de mistura. Agora sejam:

$$x(t) = \text{quantidade de sal no Tanque 1 no instante } t \quad (2.27)$$

e

$$y(t) = \text{quantidade de sal no Tanque 2 no instante } t. \quad (2.28)$$

As taxas de variação instantânea da quantidade de sal em cada tanque são respectivamente:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Cada uma dessas taxas deve ser igual à diferença entre a taxa à qual o sal está entrando menos a taxa à qual o sal está saindo do respectivo tanque.

No Tanque 1, a taxa à qual o sal está entrando é igual a

$$6 \frac{L}{min} \cdot \frac{y \text{ kg}}{20 L} = \frac{3}{10} y \frac{kg}{min}$$

enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$16 \frac{L}{min} \cdot \frac{x \text{ kg}}{10 L} = \frac{8}{5} x \frac{kg}{min}.$$

Portanto,

$$\dot{x} = \frac{3}{10} y - \frac{8}{5} x. \quad (2.29)$$

No Tanque 2, a taxa à qual o sal está entrando é igual a

$$16 \frac{L}{min} \cdot \frac{x \text{ kg}}{10 L} = \frac{8}{5} x \frac{kg}{min}$$

enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$(10 + 6) \frac{L}{min} \cdot \frac{y \text{ kg}}{20 L} = \frac{4}{5} y \frac{kg}{min}.$$

Portanto,

$$\dot{y} = \frac{8}{5} x - \frac{4}{5} y. \quad (2.30)$$

Com as equações (2.29) e (2.30) escreve-se o sistema autônomo linear abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{8}{5}x + \frac{3}{10}y \\ \dot{y} = \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y \end{cases} \quad (2.31)$$

Como foram dados $x(0) = 0$ Kg e $y(0) = 12$ Kg, segue que as quantidades desejadas podem ser obtidas resolvendo-se o PVI.

A matriz de coeficientes deste sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Usando os métodos estudados nas seções anteriores, podemos encontrar facilmente os autovalores dessa matriz. São eles: $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$ e $\lambda_2 = -2$. Os autovetores associados são $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{4}, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-\frac{3}{4}, 1)$.

Como temos dois autovetores linearmente independentes, segue que a matriz A é diagonalizável. Portanto, pelos Teoremas 1.3 e 1.4, a solução geral do sistema de equações diferenciais $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{v}_1e^{-2t/5} + c_2\mathbf{v}_2e^{-2t}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t/5} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

ou equivalente,

$$\mathbf{X} = \begin{cases} x(t) &= \frac{1}{4}c_1e^{-2t/5} - \frac{3}{4}c_2e^{-2t} \\ y(t) &= 1c_1e^{-2t/5} + 1c_2e^{-2t} \end{cases}$$

Substituindo as condições iniciais $x(0) = 0$ e $y(0) = 12$ nessas equações temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 12 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $c_1 = 9$ e $c_2 = 3$, portanto a solução do PVI é

$$\mathbf{X} = \begin{cases} x_1(t) = \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4}e^{-2t} \\ x_2(t) = 9e^{-\frac{2}{5}t} + 3e^{-2t}. \end{cases} \tag{2.33}$$

A figura abaixo exhibe os gráficos das soluções $x(t)$ e $y(t)$ em função do tempo no intervalo entre 0 e 14 minutos.

2.3.2 Estabilidade

Analisando as componentes $x(t)$ e $y(t)$ do vetor solução (2.33) quando $t \rightarrow +\infty$, o comportamento delas correspondem ao Item 2, da Subseção 1.2.8 e o ponto crítico $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ é assintoticamente estável.

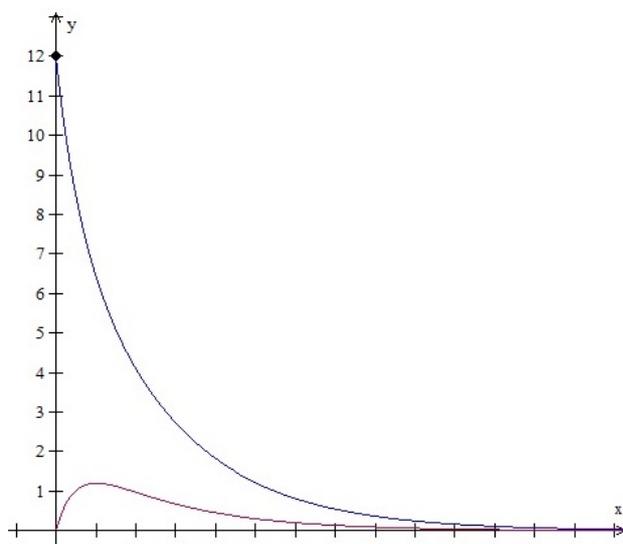


Figura 2.5: Gráfico das funções soluções $x(t)$ e $y(t)$ do sistema (2.31).

Fonte: Do Autor (2016), plotado com o *softwwinplot*.

Se tomarmos como referência o Teorema 1.5, a estabilidade será obtida a partir do traço $\Theta = -\frac{12}{5} < 0$, do determinante $\Gamma = \frac{4}{5} > 0$ e do discriminante $\Delta = \frac{64}{25} > 0$ da matriz A , concluindo-se que ponto crítico $\bar{\mathbf{X}} = (0, 0)$ é assintoticamente estável.

Neste caso, o ponto crítico (ou de estabilidade) também é denominado de nó atrator (porque os dois autovalores são negativos).

2.3.3 Retrato de fase

A partir dos elementos da matriz A , equação (2.32), podemos desenhar o comportamento das trajetórias na vizinhança do ponto de equilíbrio $\mathbf{X} = (0, 0)$, conforme mostrado na Figura 2.6. Na Subseção 2.3.2, vimos que este ponto de equilíbrio é assintoticamente estável a partir da análise qualitativa de seus autovalores.

Na Figura 2.6 está representado o retrato de fase do sistema (2.31), sendo que a trajetória das órbitas aproximam-se do ponto de equilíbrio. Os eixos inclinados estão na direção dos autovetores. Como os autovalores são negativos, as órbitas tem origem no infinito aproximando-se da origem.

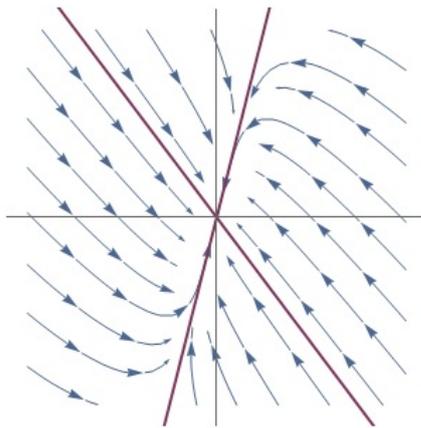


Figura 2.6: Retrato de fase plotado a partir da matriz A (2.32).
 Fonte: Do Autor, com o auxílio do *Mathematica* do *Wolfram* (2016).

CONCLUSÃO

O estudo sobre sistema dinâmico linear no \mathbb{R}^2 é início dos estudos realizados sobre sistemas dinâmicos no \mathbb{R}^n , isto porque a análise qualitativa sobre o ponto crítico e estabilidade bidimensional podem ser expandida para as dimensões maiores que dois ($n > 2$).

Por exemplo, embora não sejam sistemas dinâmicos lineares, os modelos epidemilógicos clássicos são o embrião dos estudos sobre modelagem matemática em biomatemática (na concepção do autor, biomatemática é a Matemática que estuda a vida). Com a modelagem de sistemas clássicos, um novo paradigma para a Ciência foi estabelecido, pois com técnicas próprias é possível descrever e estudar o comportamento ou o dinamismo de doenças epidemiológicas, jogando a luz sobre conceitos eruditos e redefinindo-os de tal forma que o entrelaçamento científico entre biomatemática e modelagem matemática se tornem um só.

Com a evolução dos modelos epidemiológicos, atualmente é possível estudar o comportamento de epidemias, formas de abrangência e propagação, além de avaliar formas de controle. Conforme foi apresentado, os modelos se modificam e buscam abranger de modo mais geral, casos particulares (específicos) que se constata em termos de tipos de doenças e se colocam, desta forma, como forte instrumental de análise de entendimentos e de estudos de ações.

Do mesmo modo, podemos estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos de EDO's envolvendo problemas de economia, administração, física, química, biologia, mercado financeiro entre muitos outros.

Enfim, esperamos que este tema tenha contribuído para despertar nos participantes o interesse em utilizá-lo e abrir novas fronteiras de estudos e pesquisas.

REFERÊNCIAS

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR., W. C . **Equações diferenciais com aplicações** . São Paulo: Harbra Ltda., 1988.
- [2] BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais ordinárias**. Um curso introdutório. Vol. 1. São Paulo: UFABC, s.d. (Coleção BC & T - UFABC, Textos didáticos).
- [3] BOYCE, E. W.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. (Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iório).
- [4] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Philadelphia: SIAM, 2005. (Classics In Applied Mathematics, 46).

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 4 - Exercícios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Moraes Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Moraes Filho

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

- *Topologia e Análise no Espaço R^n* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M. Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

