COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORTE

IV Colóquio de Matemática
da Região Norte

TEORIA DE GREEN E ESCOAMENTO DE POISEUILLE

GILBERLANDIO J. DIAS

UNIFAP

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Teoria de Green e Escoamento de Poiseuille

Teoria de Green e Escoamento de Poiseuille

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN (eBook) 978-85-8337-111-3

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORTE

IV Colóquio de Matemática
da Região Norte

TEORIA DE GREEN E ESCOAMENTO DE POISEUILLE

GILBERLANDIO J. DIAS

1ª EDIÇÃO
2016
MACAPÁ

UNIFAP

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Dedicado aos ávidos por conhecimento.

Prefácio

Sobre a Estética do Texto[1]

Escolho começar este prefácio me justificando pela forma como o texto se apresenta; era meu intuito (e acho que o leitor merece) escrever um texto enxuto, conciso e fechado em si. Porém a História é senhora e condutora destas notas, como o leitor deve compreender ao desenrolar das linhas desta seção; por isso me isento da estética do texto e outorgo sua autoria à História. Tudo começa, como o leitor verificará no Capítulo 6, com o desenvolvimento do sistema de Navier-Stokes para o escoamento paralelo levando-nos a um problema de Dirichlet para a Equação de Poisson num domínio especial do plano ($\mathbb{R}^2$). A princípio a resolução do problema é um exercício óbvio da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), ou se preferir o leitor, do próprio escopo do Cálculo; todavia esta resolução simplória não instiga os ávidos por dificuldades (eles existem!!), pois ela conta com um “chute"sobre a forma da solução, e embora uma resolução seja sempre uma resolução, por conta “dáqueles"– os ditos ávidos – propomos nestas notas um estudo da teoria que emprega a função de Green para a resolução de problemas semelhantes ao nosso. Os principais textos que tratam do estudo introdutório das Equações Diferenciais Parciais (EDP) são [12, Valéria] e [6, Djairo] em $\mathbb{R}^2$, e [11, Rafael e Valéria] em $\mathbb{R}^3$, sendo que o método de resolução por fução de Green é tratado apenas na referência concernente ao $\mathbb{R}^3$. O cenário em tela, nos presenteia com o encargo de escrever e aplicar o método por função de Green para o caso de $\mathbb{R}^2$. Aí surge o primeiro defeito estético “o título": a princípio o tratado nestas notas nada mais é do que uma breve introdução à conhecida Teoria dos Potenciais. Porém, em se tratando de um texto para graduandos e principiantes de pós-graduação, a tal História busca um termo coerente com os conteúdos de graduação, e assim, cria-se a dita “Teoria de Green", visto que o Teorema de Green (ou Teorema da Divergência) é a principal ferramenta destas notas. Sobre o título, acho apropriado, e neste instante vou roubá-lo da História; sim, o título é de minha autoria!

Voltemos à estética do texto. Está claro na cabeça do leitor que o texto se desenvolverá no $\mathbb{R}^2$. Porém, logo se decepcionará o caro leitor, pois em todo o texto são poucos os momentos em que realmente somos fiéis ao $\mathbb{R}^2$. Permita-me o leitor justificar-me, e olha que ela - a justificativa - é pertinente. O primeiro ponto da

[1] Esta seção tem viés poético.

justificativa é a falta de material robusto sobre os temas de graduação necessários para estas notas, durante sua confecção me sentir abandonado pelos atuais livros didáticos que são por vezes, para não dizer sempre, incipientes; foi preciso valer-me dos clássicos para tomar posse, substancial, dos conteúdos. Assim, pergunto-me: devo manter-me fiel à estética, como desejado pela massa da comunidade, ou oferecer um suporte para aqueles ávidos pela informação consistente? Me desculpe o leitor estético, pois refugo-me a entregar o que no início me pairava à mente, encharcarei o texto com alguns conteúdos, por ora fora de própósito, mas que num “perigo", atende-nos. Um segundo ponto importante - e findarei estas descupas - é que muitas demonstrações não apresentam relevante aumento de dificuldade quando em dimensão maior que dois e não incluí-las pode insinuar a presença de complicadores que não existem.

Voltemos ao Assunto Técnico

O Escoamento de Poiseuille consiste do Sistema de Navier-Stokes para fluidos em “canais retos"infinitos[2] sob a hipótese de campo velocidade paralelo ao eixo de simetria do canal e com independência da referida direção.

Sob as hipóteses estabelecidas acima, a equação de Navier-Stokes torna-se uma equação de Poisson. Mesmo tendo, a equação de Poisson obtida, uma resolução “fácil", fornece-nos uma agradável motivação para o estudo das teorias básicas que se ocupam da resolução de tais equações. Assim, dentre os possíveis caminhos a se tomar para tratar de nossa equação (de uma forma mais teórica), optamos pela “teoria de Green".

Um ponto importante destas notas - que foi, na seção acima, comentado de forma discontraída - é a dimensão do espaço onde iremos trabalhar. A princípio o Problema de Poiseuille está posto em um domínio de $\mathbb{R}^3$, entretanto a natureza das hipóteses transforma o problema num outro correlato, mas com domínio em $\mathbb{R}^2$. Assim, de certo modo somos levados a introduzir definições e elementos matemáticos em $\mathbb{R}^3$. Desta feita, embora desejássemos escrever este texto em uma única dimensão ($\mathbb{R}^2$), somos levados a escrevê-lo em dimensão $n = 3$, ficando a cargo do leitor o fato da redução à dimensão $n = 2$, como uma particularidade do ente matemático. Mais claramente: quando o ente matemático restringir-se ao $\mathbb{R}^2$ como subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Sobre as definições, resultados e demonstrações presentes no texto, é razoável que apresentemos apenas aquelas que não fazem parte dos conteúdos das disciplinas dos cursos de graduação. Para a maioria das demonstrações veja [1].

[2] No plano: canais; e no espaço: cilindros

Sobre os pré-requisitos, conforme o nível destas notas, faz-se necessário a teoria de Análise no $\mathbb{R}^n$. Daí, temos sempre o empasse de quando devemos indicar precisamente os resultados que estamos usando, visto que em quase todo o tempo fazemos uso de resultados desta teoria? Como sempre, embora agrade a uns e não a outros, tal escolha ficará a cargo do autor; em outras palavras apenas indicaremos o resultado que estamos aplicando quando julgarmos necessário.

Macapá, 07 de novembro de 2016
Gilberlandio Jesus Dias

Sumário

Capítulo 1

NOTAÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

1.1 Definições Básicas

A seguir lembraremos algumas definições básicas necessárias para o bom andamento do texto. Aqui, devido a generalidade de algumas definições, n será um natural qualquer. Também pedimos uma atenção especial a esta seção, pois algumas das notações empregadas neste texto serão estabelecidas aqui.

- $\mathbb{R}^n$ é o espaço euclidiano de dimensão $n \in \mathbb{N}$.
  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$.
  $x \in \mathbb{R}^n$ é denotado por $x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.
  É importante mencionar que sempre que trabalhamos em $\mathbb{R}^n$, é comum o uso dos termos *elemento, ponto* e *vetor*, para referir-se a um elemento de $\mathbb{R}^n$; é claro que cada denominação tem um ponto de vista específico: quando elemento, estamos olhando $\mathbb{R}^3$ como um conjunto simplesmente; quando ponto (casos $n = 1, 2, 3$) estamos olhando $\mathbb{R}^n$ como ambiente geométrico; por fim, quando vetor estamos olhando $\mathbb{R}^n$ como espaço vetorial normado.

- Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a *distância* entre x e y é definida por

  $$\|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

  A *norma* de x é $\|x\| \equiv \|x - 0\|$.

- Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a *bola aberta centrada em x_0 de raio $r > 0$* é o subconjunto

  $$B\,(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}\,.$$

  Semelhantemente a *bola fechada centrada em x_0 de raio $r > 0$* é o subconjunto

  $$B\,[x_0; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq r\}\,.$$

Adotaremos $\mathbf{B}_r \equiv B(0;r)$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_1$.

- $A \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* se dado $x_0 \in A$ existir $r > 0$ tal que $B(x_0;r) \subset A$. Naturalmente a bola aberta é um conjunto aberto.

- $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Naturalmente a bola fechada é um conjunto fechado.

- Seja $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Y é dito aberto em X se existir $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $Y = A \cap X$. Y é dito fechado em X se existir $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado tal que $Y = F \cap X$.

- Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, a *fronteira* de X, denotada por ∂X[1] é definida por $\emptyset$ se $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ se $X = \emptyset$ e para X$\notin \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$,

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ B(x;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset \ \text{ e } \ B(x;\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset\,,\ \ \forall\, \varepsilon > 0\}$$

- $\partial\mathbf{B} \equiv S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ é a *esfera unitária*
  ω_n é a área da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$
  $\alpha(n) = \dfrac{\omega_n}{n}$ é o volume da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$

- $D \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo* se dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$, abertos e disjuntos, então

$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \implies A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset\,.$$

  Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, então existe uma coleção $\{C_\lambda; \lambda \in \Gamma\}$ de subconjuntos conexos, disjuntos, tais que $X = \bigcup_{\lambda\in\Gamma} C_\lambda$. Os conjuntos C_λ, são chamados *componentes conexas* de X.

- $U \subset \mathbb{R}^n$ é um *domínio* se é aberto e conexo.
  A fim de sermos mais didáticos e tornarmos o texto localmente idependente, vamos usar de redundância em alguns momentos escrevendo “domínio U".

- Um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é *limitado* se existe uma bola que o contém, ou equivalentemente, se existe $M > 0$ tal que $\|x\| < M$ para todo $x \in X$.

- Um subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ é *compacto* se é fechado e limitado.

- Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *limitada* se o conjunto $f(X)$ é limitado.

- $\mathcal{B}(X)$ denotará o conjunto das funções limitadas de $X \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

- A norma sobre o espaço $\mathcal{B}(X)$ é definida por

$$\|f\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup\{|f(x)|; x \in X\}\,.$$

[1]Esta notação será usada mais adiante, também, para denotar a curva fronteira orientada.

- A notação $a \ll 1$ significa que o número real a é positivo e suficientemente pequeno.

Proposição 1.1.

(i) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto (fechado), então $Y \subset X$ é aberto (fechado) em X se, e somente se, Y é aberto (fechado).*

(ii) *X é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X aberto e fechado em X são o conjunto $\emptyset$ e o próprio X.*

Prova. Veja [16].

$\square$

1.2 Curvas Parametrizadas

Definição 1.2. Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^3$, uma *curva parametrizada* (que aqui denotaremos simplesmente por *curva*) $\mathcal{C}$ é um par $(\boldsymbol{\alpha}, X)$ tal que X é a imagem da aplicação contínua $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Os pontos $\boldsymbol{\alpha}(a) = (x(a), y(a), z(a))$ e $\boldsymbol{\alpha}(b) = (x(b), y(b), z(b))$ são denominados, respectivamente, *ponto inicial* e *ponto final* da curva. O conjunto X é chamado *traço* da curva. As funções $x, y, z : [a, b] \to \mathbb{R}$ são denominadas *funções coordenadas* da curva. A curva $\mathcal{C}$ é dita de *classe* C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cada função coordenada x, y, z é C^k em $[a, b]$.

Definição 1.3. Uma curva $\mathcal{C}$ é dita C^1 *por partes* ou *seccionalmente* C^1, quando $\mathcal{C}$ é a união de um número finito de curvas C^1, $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$, onde o ponto inicial de $\mathcal{C}_{i+1}$ é o ponto final de C_i. Chamaremos de *caminho* a uma curva C^1 por partes.

Definição 1.4. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ curvas com parametrizações, respectivamente, $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{\beta} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$. Se existir um difeomorfismo $\varphi : [a, b] \to [c, d]$, tal que $\varphi'(t) \neq 0,\ \forall\, t$ de modo que $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}(\varphi(t))$, dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são *equivalentes* e que φ é uma *mudança de parametrização*. Se $\varphi' > 0$ diz-se que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ *têm mesmo sentido* e costuma-se indicar $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$; se $\varphi' < 0$ diz-se que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ *têm sentidos contrários* e costuma se indicar $\mathcal{C}' = -\mathcal{C}$.

No que segue, a menos que se mencione o contrário, $\mathcal{C}$ é uma curva com parametrização

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{r} : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array} \tag{1.1}$$

Definições 1.5.

- Uma curva é dita *plana* quando “está contida"em um plano, isto é, o seu traço está contido em um plano de $\mathbb{R}^3$.

- Uma curva é dita *fechada* se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$.

- Uma curva é *simples* quando ela não se autointersecta em nenhum ponto entre as extremidades, isto é, se $t_1, t_2 \in [a, b),\ t_1 \neq t_2$ então $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$[2].

- Um domínio $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito *simplesmente conexo* se toda curva simples fechada em U tem interior contido em U. Intuitivamente, uma região simplesmente conexa não contém “buracos"nem é constituida por dois “pedaços"separados (esta última afirmação significa ser conexa).

- Sejam $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m,\ m$ caminhos fechados simples, satisfazendo as condições:

    1. $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset,\ \forall\, i \neq j$;
    2. As curvas $\mathcal{C}_i,\ i \neq 1$ estão situadas no interior de $\mathcal{C}_1$;
    3. A curva $\mathcal{C}_i$ está no exterior da curva $\mathcal{C}_j,\ \forall\, i \neq j,\ i, j > 1$.

    O domínio formado pela região interior à $\mathcal{C}_1$ e exterior à $\mathcal{C}_i,\ \forall\, i > 1$, é denominada *domínio multiplamente conexo*.

Definição 1.6. Dizemos que uma curva fechada simples $\mathcal{C}$, em $\mathbb{R}^2$, tem *orientação positiva* quando a curva é “percorrida"no sentido anti-horário. Assim, se $\mathcal{C}$ for dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t),\ a \leq t \leq b$, então a região U interior à C está sempre à esquerda quando o ponto $\mathbf{r}(t)$ percorre C (para uma definição mais rigorosa de orientação de curvas planas, veja [1, seção 11.24]).

1.3 Superfícies Parametrizadas

1.3.1 Definições

Como na definição de curvas parametrizadas por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t, definiremos uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v.

Definição 1.7. Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^3$, uma *superfície parametrizada* (que aqui denotaremos simplesmente por *superfície*) $\mathcal{S}$ é um par $(\mathbf{r}, X)$ tal que X é a imagem da aplicação contínua

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{r} : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}\,. \end{array} \tag{1.2}$$

[2] Não confundir com o senso comum de curva, no qual a circunferência nunca se intersecta, o que não é verdade para a parametrização $(\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t),\ t \in [0, 2\pi]$.

As funções $x, y, z : D \to \mathbb{R}$ são denominadas *funções coordenadas* da superfície. Também é comum representar a superfície apenas por suas funções componentes, isto é, $\mathcal{S}$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ cujos pontos satisfazem as equações

$$x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\quad, \qquad (u, v) \in D\,. \tag{1.3}$$

As equações em (1.3) são chamadas *equações paramétricas* de $\mathcal{S}$.

Observações 1.8.

1. Conforme a definição, uma superfície pode "degenerar"[3] em um ponto ou uma curva. Por exemplo, se as três funções em (1.3) forem constantes a superfície será um ponto; e se as funções dependederem apenas de uma mesma variável teremos uma curva.

2. Quando a função $\mathbf{r}$ é biunívoca, a superfície é dita *simples*.

Definição 1.9.

- Uma superfície $\mathcal{S}$ é de *classe* C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se $x, y, z \in C^k(D)$.

- $\mathcal{S}$ é *diferenciável* se $\mathbf{r}$ é uma função diferenciável.

É óbvio que toda superfície C^1 é diferenciável.

O primeiro contato que tivemos com superfícies, em Matemática, foi como gráfico de uma função de duas variáveis, isto é $G(f) \equiv (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$. A *representação parmétrica canônica do gráfico* $G(f)$ é

$$x(u, v) = u\,, \quad y(u, v) = v\,, \quad z(u, v) = f(u, v)\quad, \qquad (u, v) \in D\,.$$

Além disso, se em (1.3), conseguirmos resolver em duas das três equações, u e v em função das coordenadas, substituindo na terceira teremos que $\mathcal{S}$ será um gráfico (por exemplo: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ e $z = z(u, v) = f(x, y)$).

O motivo da "nominação"da parametrização anterior para o gráfico, é que a representação de uma superfície parametrizada não é única. Por exemplo, o hemisfério superior da esfera de raio 1 tem parametrizações

$$\begin{array}{ll} (1) & x = x\,, \quad y = y\,, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\quad, \qquad (x, y) \in \mathbf{B} \\ (2) & x = r\cos\theta\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad z = \sqrt{1 - r^2}\quad, \qquad (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\,. \end{array}$$

Observação 1.10. Novamente volto a reforçar que superfície parametrizada é um par e não apenas a imagem, que a partir daqui denotaremos por *traço da superfície*. Por exemplo, a superfície abaixo têm mesmo traço que a superfície (2), porém é diferente:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad z = \sqrt{1 - r^2}\quad, \qquad (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 4\pi]\,.$$

[3] Superfícies que são pontos ou curvas de $\mathbb{R}^3$ são ditas *superfícies degeneradas*

Definição 1.11. Seja $\mathcal{S}$ uma superfície parametrizada dada pela função vetorial $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$. Fixado $(u_0, v_0) \in D$ as curvas paramétrica $\mathbf{r}_1(u, v_0),\ \mathbf{r}_2(u_0, v)$ para $(u, v_0), (u_0, v) \in D$ são denominadas *curvas coordenadas da parametrização* $\mathbf{r}$ passando por $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Definição 1.12. Sejam $\mathcal{S}$ uma superfície diferenciável e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ as curvas coordenadas por $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Definimos os vetores tangentes à $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em P_0, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}\,.$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é nulo, então o ponto P_0 é dito um *ponto regular da superfície*. A superfície S é dita *regular* (ou *lisa*, “sem bicos") se todos os seus pontos forem regulares. Para uma superfície regular o *plano tangente* é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$, e portanto tem vetor normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

Observações 1.13.

1. A regularidade de um ponto do conjunto $X = \mathbf{r}(D)$ depende da parametrização $\mathbf{r}$, isto é, um ponto regular na superfície $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{r}_1, X)$, pode não ser regular na superfície $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{r}_2, X)$.

2. Se os vetores $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ forem contínuos então a superfície não possui arestas ou bicos (veja [1]).

3. A condição $[\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v](u, v) \neq 0\ \forall (u, v) \in D$ implica a não existência de degenerações locais.

Teorema 1.14. *Sejam $\mathcal{S}$ uma superfície regular C^1 e $\mathcal{C}$ uma curva regular em $\mathcal{S}$, isto é, $\mathcal{C} = \mathbf{r}(\mathcal{C}')$, onde $\mathcal{C}'$ é uma curva regular em D. Então o vetor $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é normal à $\mathcal{C}$.*

Prova. Veja [1, seção 12.3].

Definição 1.15. Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ superfícies com parametrizações, respectivamente, $\mathbf{r}_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{r}_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$. Se existir um bijeção C^1, $\varphi : D_2 \to D_1$, tal que $\mathbf{r}_2(s, t) = \mathbf{r}_1(\varphi(s, t))$, dizemos que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ são *equivalentes* e que φ é uma *mudança de parametrização*.

1.3.2 Superfícies Orientadas

Seja $\mathcal{S}$ uma superfície que admite plano tangente em todos os seus pontos, exceto nos pontos de fronteira. Assim, em cada ponto existem dois vetores unitários normais, ao plano tangente do ponto, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Se for possível escolher um vetor normal unitário $\mathbf{n}$ em cada ponto (x, y, z) de $\mathcal{S}$, de modo que $\mathbf{n}$ varie continuamente sobre $\mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ é dita uma *superfície orientada*, e a escolha de $\mathbf{n}$ fornece a $\mathcal{S}$ uma *orientação*. Desta feita, toda superfície orientada possui apenas duas escolhas possíveis para orientação; a orientação escolhida é denominada *positiva*, ao passo que a outra (não escolhida) é denominada *negativa*.

Exemplos 1.16.

1. Seja $\mathcal{S}$ a superfície dada como o gráfico da função $z = g(x, y)$, facilmente obtemos que as orientações induzidas são dadas pelos vetores normais unitários
$$\mathbf{n} = \pm \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}.$$
Comumente adota-se como orientação positiva o vetor com componente positiva na direção de $\mathbf{k}$, ou seja, tomamos o sinal positivo no lado direito da fórmula acima, isso corresponde à chamada *orientação para cima* da superfície.

2. A faixa de Möbius não é orientada. Com efeito, para uma verificação rigorosa sugerimos as referências [16] e [3]. Entretanto uma verificação geométrica construtiva é muito simples, prazerosa e sobretudo contundente (o leitor pode construir com folha de papel esta “demonstração"): sobre a faixa de Möbius toma-se um vetor normal $\mathbf{n}$ num ponto (x_0, y_0, z_0), fora da fronteira, e efetua-se uma volta completa na faixa usando a orientação $\mathbf{n}$; surpreendentemente ao retornar ao ponto (x_0, y_0, z_0) teremos a orientação $-\mathbf{n}$ e não $\mathbf{n}$, e isto indica que $\mathbf{n}$ não variou continuamente.

Sobre uma superfície regular orientada $\mathcal{S}$ tomamos a orientação do vetor normal unitário
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{1.4}$$

Definição 1.17. Dada uma região sólida E de $\mathbb{R}^3$ (isto é, um conexo limitado e fechado), chamamos de *superfície fechada* à fronteira de E. Tomamos como orientação positiva àquela para a qual os vetores normais *apontam para fora de E*, e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa, obviamente.

Agora vamos definir a orientação positiva para a curva fronteira de uma superfícier orientada (curva espacial). Seja $\mathcal{S}$ uma superfície orientada, simples e regular por partes. Sua fronteira (quando existir) é uma união de curvas fechadas. A orientação positiva $\mathbf{n}$ de $\mathcal{S}$ é induzida, via parametrização $\mathbf{r} : D \to \mathcal{S}$ da seguinte forma: se $\mathcal{C}_1$ é uma curva fronteira de $\mathcal{S}$, então como $\mathcal{C}_1 = \mathbf{r}(\Gamma_1)$, onde Γ_1 é uma curva fronteira de D orientada positivamente, a *orientação positiva* de $\mathcal{C}_1$ é a conduzida por $\mathbf{r}$, e assim a orientação positiva $\mathbf{n}$ é tomada de modo a satisfazer a "regra da mão direita", ou seja, apontando o indicador na direção da orientação de $\mathcal{C}$ e mantendo a superfície $\mathcal{S}$ à esquerda, $\mathbf{n}$ aponta na direção do polegar (tudo com relação à mão direita).

Capítulo 2

O TEOREMA DE GREEN

2.1 Campos Vetoriais

2.1.1 Definições

Definição 2.1. Um *campo vetorial* $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que associa a cada ponto $\mathbf{x} \in X$ um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^n$.

Como comentado no Prefácio, nos deteremos aos caso $n = 2$ e $n = 3$. Assim usaremos as notações $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$ para os respectivos casos $n = 2$ e $n = 3$. Os campos vetoriais são representados em termos de suas funções componentes, como:

$$\begin{array}{ll} n = 2: & \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = \big(P(x, y), Q(x, y)\big)\,; \\ n = 3: & \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = (P, Q, R). \end{array}$$

As funções componentes são também denominadas *campos escalares*.

Observação 2.2. Note a consonância com o comentário do Prefácio relativo à dimensão, um campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ será um campo em $\mathbb{R}^2$ quando $R(x, y, z) = 0$ e P, Q forem funções apenas de x e y.

Definição 2.3. Um campo vetorial é de *classe* C^k se, e somente se, suas funções componentes são de classe C^k.

2.1.2 Operadores Diferenciais

Consideremos o operador diferencial parcial

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) .$$

A seguir introduziremos algumas definições que têm suas formas facilmente obtidas fazendo uso do operador ∇ como se fosse um vetor de $\mathbb{R}^n$. O mais impressionante é que algumas das regras para vetores são também carregadas pelo operador.

Definição 2.4. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas parciais e $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial.

- Denominamos *campo vetorial gradiente*, ou simplesmente *gradiente*, da função f ao campo vetorial

$$\text{grad} f \equiv \nabla f \equiv (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})\,.$$

- A *divergência* ou *divergente* de $\mathbf{F}$ é a função

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\,.$$

- Para o caso $n = 2, 3$, o *rotacional* do campo $\mathbf{F}$ é o "produto vetorial"de ∇ pelo campo vetorial $\mathbf{F}$, isto é,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\,.$$

- Para um campo escalar f, introduzimos o operador composto

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

  Abreviamos $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$, chamado *operador de Laplace* ou *laplaciano*, em razão da célebre *equação de Lapalace*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0\,.$$

  Podemos também aplicar o laplaciano Δ a um campo vetorial $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ em termos de suas compontentes, isto é,

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta F_1, \ldots, \Delta F_n)\,.$$

Definição 2.5. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é dito um *campo conservativo* se ele for o gradiente de algum campo escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Neste caso, f é denominada uma *função potencial* de $\mathbf{F}$.

A proposição a seguir, de demonstração imediata, traz alguma relações, bastante conhecidas para vetores, envolvendo os operadores acima.

Proposição 2.6. *Sejam f e $\mathbf{F}$, respectivamente, campos escalar e vetorial. Então*

(i) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = 0.$

(ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$.

(iii) *Se* $\mathbf{F}$ *é conservativo então* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$.

Em geral a recíproca do item (iii) não é verdadeira, mas com o emprego do Teorema de Stokes veremos no Corolário 3.9 que, se $\mathbf{F}$ for definido em todo o espaço, a recíproca vale. Mais precisamente, a recíproca vale para conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ ([1, Teo.10.9]) e, no caso de $\mathbb{R}^2$, devido ao Teorema de Green, vale para domínios simplesmente conexos (convexo é simplesmente conexo) como veremos no Teorema 2.18.

2.2 Integrais de Linha

2.2.1 Integrais de Linha de Campos Escalares

Definição 2.7. Seja f um campo escalar limitado definido sobre uma curva $\mathcal{C}$ de classe C^1. Definimos a *integral de linha* de f sobre $\mathcal{C}$ por

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f\,ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

sempre que a integral existir. Existindo a integral de linha de f sobre $\mathcal{C}$, dizemos que f é *integável por linha* sobre $\mathcal{C}$.

Observações 2.8.

1. O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva ([1, Teo.10.1] e fórmula de mudança de variáveis).

2. No caso especial em que C é um segmento de reta unindo os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0)$, tomamos x como parâmetro e daí (2.1) fica

$$x = x\,,\quad y = 0\,,\quad z = 0\,,\quad a \le x \le b\,;$$

   Desta forma (2.1) nos fornece

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_a^b f(x,0,0)dx = \int_a^b f(x)dx\,,$$

   confirmando que a integral do Cálculo I é um caso particular de integral de linha.

3. Se $\mathcal{C}$ for um caminho ($\mathcal{C} : \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$), temos

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} f\,ds + \ldots + \int_{\mathcal{C}_m} f\,ds\,.$$

4. Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, temos

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = |\mathcal{C}|\,,$$

   onde $|\mathcal{C}|$ é o comprimento da curva $\mathcal{C}$.

5. Valem as propriedades fundamentais, como na integral de Riemann.

Definição 2.9. Seja f um campo escalar limitado definido sobre uma curva $\mathcal{C}$ de classe C^1. Definimos as *integrais de linha parciais* de f sobre $\mathcal{C}$ em relação a um dos eixos coordenados, como

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)dx &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt \\ \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)dy &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt \\ \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)dy &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

sempre que as integrais envolvidas existirem.

Observações 2.10.

1. Para simplificar a notação (e também para manter a tradição) escreveremos

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y,z)dx + \int_{\mathcal{C}} Q(x,y,z)dy + \int_{\mathcal{C}} R(x,y,z)dz = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

2. Se $\mathcal{C}$ for um caminho, as integrais em (2.2) são definidas em cada curva C^1, como no caso das integrais de linha.

3. Diferentemente da integral de linha, a integral parcial depende da parametrização, mas apenas do *sentido* da parametrização ([1, Teo.10.1]), a saber

$$\int_{-\mathcal{C}} P(x,y)dx = -\int_{\mathcal{C}} P(x,y)dx\,.$$

Como no caso da integral de Riemann, também podemos definir o valor médio de uma função sobre uma curva.

Definição 2.11. Sejam $\mathcal{C}$ uma curva C^1 e f uma função integrável por linha, definimos o *valor médio* de f sobre $\mathcal{C}$ por

$$\frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} g\,ds\,.$$

Proposição 2.12. *Sejam $\mathcal{C}$ um círculo de centro $a \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$ e $g \in C(B[a;r])$. Então o valor médio de g sobre $\mathcal{C}$ tende para $g(a)$ quando $r \to 0^+$, isto é,*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2\pi r}\int_{\|x-a\|=r} g(x)\,ds(x) = g(a)\,.$$

Prova. Como g é contínua na região compacta $B[a;r]$, então g é uniformemente contínua (veja [16]); logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x, y \in B[a;r],\ \|x-y\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon\,.$$

Daí, para $0 < r < \delta$, temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi r}\int_{\|x-a\|=r} g(x)\,ds(x) - g(a)\right| &= \frac{1}{2\pi r}\left|\int_{\|x-a\|=r} (g(x)-g(a))\,ds(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r}\int_{\|x-a\|=r} |g(x)-g(a)|\,ds(x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi r}\int_{\|x-a\|=r} ds(x) = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Assim está provada a proposição.

□

2.2.2 Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Definição 2.13. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial limitado definido sobre um caminho $\mathcal{C}$. Então a *integral de linha de* $\mathbf{F}$ *ao longo de* C é

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_a^b [P(x,y,z)x'(t) + Q(x,y,z)y'(t) + R(x,y,z)z'(t)]\,dt\,,\end{aligned}$$

desde que as integrais existam. Resumindo a escrita, escrevemos

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \tag{2.3}$$

Observação 2.14. Aqui, diferentemente da integral de linha de campos escalares, quando invertemos a orientação do caminho trocamos o sinal da integral, isto é,

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

isto porque o vetor tangente de $-C$ é o oposto do vetor tangente de C, isto é, $-\mathbf{T}$ é o vetor tangente de $-C$ se $\mathbf{T}$ é o vetor tangente de C.

2.2.3 Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Lembremos do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \tag{2.4}$$

onde F' é contínua em $[a,b]$. A equação (2.4) também é chamada *Teorema da Variação Total*: a integral da taxa de variação é a variação total.

Se considerarmos o vetor gradiente ∇f, de uma campo escalar f, como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser considerado uma versão do TFC para integrais de linha.

Teorema 2.15 (Teorema Fundamental da Integral de Linha - TFIL)**.** *Seja f um campo escalar diferenciável com gradiente ∇f contínuo em um domínio U. Então para quaisquer dois pontos A e B ligados por um caminho $\mathcal{C}$ contido em U tem-se*

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big)\,. \tag{2.5}$$

Observação 2.16. Observe que para o caso $n = 1,\ C = [a,b],\ \nabla f = f'$, $d\mathbf{r} = dx$, $\mathbf{r}(a) = a$ e $\mathbf{r}(b) = b$, então (2.5) reduz-se a (2.4) com f no lugar de F.

O TFIL diz que podemos calcular a integral de linha de um campo vetorial conservativo sabendo apenas o valor de f nas extremidades de C. Em outros termos ele diz que a integral de linha de ∇f é a variação total de f.

De uma forma geral, se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo em um domínio U, dizemos que a integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ é *independente do caminho* se

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

para quaisquer caminhos C_1, C_2 em U que tenham os mesmos pontos inicial e final. Com essa terminologia, o TFIL nos garante que *as integrais de linha de campos conservativos são independentes do caminho.*

O próximo teorema traz a caracterização geral para campos conservativos e independência de caminhos para a integral de linha.

Teorema 2.17. *Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo em um domínio U. São equivalentes:*

(i) $\mathbf{F}$ *é conservativo;*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ *para todo caminho fechado $\mathcal{C}$ em U;*

(iii) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *é independente do caminho em U.*

Teorema 2.18 (Teste para Campos Conservativos em $\mathbb{R}^2$)**.** *Seja* $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ *um campo vetorial em um domínio* $U \subset \mathbb{R}^2$*, com* $P, Q \in C^1(U)$*:*

(i) *Se* $\mathbf{F}$ *é conservativo então*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad em \ \ U.$$

(ii) *Se* U *é simplesmente conexo e*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad em \ \ U,$$

então $\mathbf{F}$ *é conservativo.*

Um critério para determinar se um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ é ou não conservativo será dado mais adiante no Corolário 3.9.

2.3 O Teorema de Green

O Teorema de Green relaciona integais de linha com integrais duplas.

Teorema 2.19 (Teorema de Green - TG)**.** *Seja* $\mathcal{C}$ *um caminho fechado simples, orientado positivamente, e seja* U *a região delimitada por* $\mathcal{C}$*. Se* $P, Q \in C^1(X)$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^2$ *é um aberto que contém* U*, então*

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\overline{U}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA\,. \tag{2.6}$$

A notação

$$\oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy$$

é usada algumas vezes para indicar que a integral de linha é calculada usando-se a orientação positiva da curva fechada $\mathcal{C}$. Outra notação para a orientação positiva da curva fronteira a U é ∂U, assim a equação no TG fica

$$\iint_{\overline{U}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial U} P\,dx + Q\,dy\,.$$

O TG pode ser olhado como o correspondente do TFC para integrais duplas. No TFC

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)\,,$$

temos $\overline{U} = [a,b]$, $\partial U = \{a,b\}$, como no lado direito a dimenção de ∂U é zero, integração é entendida como “soma orientada", daí $F(b) - F(a)$.

Corolário 2.20. *A equação* (2.6) *é equivalente às equações*

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx = -\iint_{\overline{U}} \frac{\partial P}{\partial y} dA \tag{2.7}$$

$$\tag{2.8}$$

$$\int_{\mathcal{C}} Q\,dy = \iint_{\overline{U}} \frac{\partial Q}{\partial x} dA\,. \tag{2.9}$$

Prova. Tomando $Q = 0$ e $P = 0$, respectivamente, em (2.6), obtemos (2.7) e (2.9), respectivamente. Reciprocamente, somando (2.7) e (2.9) obtemos (2.6).

□

Observação 2.21. O Teorema de Green vale para domínios multiplamente conexos: Seja $\mathcal{C}$ constituida pelas curvas $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$, de modo que o domínio U multiplamente conexo tem fronteira $\partial U = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i$, então sob as hipóteses do Teorema de Green, tem-se

$$\iint_{\overline{U}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \sum_{i=1}^{m} \oint_{\mathcal{C}_i} (P\,dx + Q\,dy) = \oint_{\partial U} P\,dx + Q\,dy\,,$$

2.3.1 Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores div e rot nos permitem escrever o TG em uma versão que será útil futuramente. Considere na região plana U, sua curva fronteira $\mathcal{C}$ e funções P e Q que satisfaçam as hipóteses do TG. Então, podemos considerar o campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Sua integral de linha é

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy$$

e considerando $\mathbf{F}$ como um campo em $\mathbb{R}^3$ com $R \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

Portanto $(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$, e assim o TG na *forma vetorial* fica

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\overline{U}} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA\,. \tag{2.10}$$

A equação (2.10) expressa a integral de linha da componente tangencial de $\mathbf{F}$ ao longo de $\mathcal{C}$ (lembre que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$) como uma integral dupla da componente vertical de $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ sobre a região U delimitada por $\mathcal{C}$. Vamos deduzir agora uma fórmula semelhante, envolvendo a componente normal de $\mathbf{F}$. Ora, o vetor unitário normal exterior a $\mathcal{C}$ é

$$\mathbf{n}(t) = \frac{x'(t)}{\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} - \frac{y'(t)}{\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j},$$

daí

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)|\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \left[\frac{P(x,y)y'}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x,y)x'}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'|\, dt \\
&= \int_a^b [P(x,y))y'(t) - Q(x,y)x'(t)]\, dt = \int_{\mathcal{C}} P\, dy - Q\, dx \\
&\overset{TG}{=} \iint_{U} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = \iint_{U} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_{U} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA\,. \tag{2.11}$$

A equação (2.11) também é chamada de Teorema de Green. Esta versão diz que a integral de linha da componente normal de $\mathbf{F}$ ao longo de $\mathcal{C}$ é igual à integral dupla do divergente de $\mathbf{F}$ na região U delimitada por $\mathcal{C}$.

Capítulo 3

OS TEOREMAS DE STOKES E DA DIVERGÊNCIA

3.1 Integrais de Superfície

3.1.1 Integrais de Superfície para Campos Escalares

A integral de superfície é a versão para superfícies da integral de linha sobre uma curva, ou em outra maneira de ver, é o correspondente da integral de linha (esta para uma dimensão) para duas dimensões. A integral de linha foi definida mediante uma representação paramétrica da curva. Semelhantemente, a integral de superfície será definida mediante uma representação paramétrica da superfície; assim, teremos que provar que, sob certas condições gerais, o valor da interal independe da parametrização.

Definição 3.1. Sejam $\mathcal{S}$ uma superfície paramétrica diferenciável[1] e f um campo escalar limitado, definido sobre $\mathcal{S}$. A *integral de superfície* de f sobre $\mathcal{S}$ é definida por

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D} f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dA\,, \tag{3.1}$$

se a integral dupla do segundo membro existir.

Observação 3.2. Note a semelhança com a fórmula para a integral de linha

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt\,.$$

A seguir temos a invariância da integral de superfície em relação á parametrização.

Teorema 3.3. *Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ superfícies equivalentes, então*

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\mathcal{S}'} f(x,y,z)\,dS$$

[1]A parametrização $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ é uma função diferenciável

Prova. Veja [1, teo.12.2].

Observação 3.4. Se $\mathcal{S}$ é uma superfície regular por partes, ou seja, uma união finita de superfícies regulares $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m$ que se intersectam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre $\mathcal{S}$ é definida por

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\mathcal{S}_1} f(x,y,z)\,dS + \cdots + \iint_{\mathcal{S}_m} f(x,y,z)\,dS\,.$$

3.1.2 Integrais de Superfície para Campos Vetoriais

Definição 3.5. Sejam $\mathcal{S}$ uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$ e $\mathbf{F}$ é um campo vetorial limitado definido sobre $\mathcal{S}$, então a *integral de superfície de* $\mathbf{F}$ em $\mathcal{S}$ é

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,dS\,.$$

Essa integral é também chamada *fluxo* de $\mathbf{F}$ através de $\mathcal{S}$.

Em paralvras temos que a integral de superfície de um campo vetorial sobre $\mathcal{S}$ é igual à integral de superfície (de campo escalar) da componente do campo vetorial na direção normal a $\mathcal{S}$.

Agora, de (1.4), da Definição 3.5 e de (3.1), temos

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F}\cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS = \iint_{D} \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA\,,$$

ou seja,

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F}\cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA\,. \tag{3.2}$$

Observação 3.6. Compare (3.2) com a expressão análoga para o cálculo integral de linha de campos vetoriais

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt\,.$$

3.2 O Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes é uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. O Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma superfície plana com uma integral de linha em torno da curva fronteira da referida superfície plana. No Teorema de Stokes a superfície não precisará ser plana, assim a integral dupla será substituida por uma integral de superfície sobre uma superfície $\mathcal{S}$ no espaço, ao passo que a integral de linha será agora sobre uma curva do espaço que é a curva fronteira de $\mathcal{S}$.

Teorema 3.7 (Teorema de Stokes - TS)**.** *Seja $\mathcal{S}$ uma superfície orientada, simples e regular por partes, cuja fronteira é formada por uma curva $\mathcal{C}$ fechada, simples, regular por partes, com orientação positiva. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial C^1 em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém $\mathcal{S}$. Então*

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\,.$$

Como

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \quad \text{e} \quad \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o Teorema de Stokes assegura que a integral de linha em torno da curva fronteira de $\mathcal{S}$ da componente tangencial do vetor $\mathbf{F}$ é igual à integral de superfície da componente normal do rotacional de $\mathbf{F}$.

A curva fronteira, orientada positivamente, da superfície orientada $\mathcal{S}$ é denotada por $\partial\mathcal{S}$, assim o Teorema de Stokes também é escrito como

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{3.3}$$

Existe uma analogia entre o TS, o TG e o TFC. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo, do lado esquerdo da equação (3.3), derivadas e, do lado direito valores de $\mathbf{F}$ calculados somente na fronteira de $\mathcal{S}$.

De fato, no caso especial em que a superfície $\mathcal{S}$ é plana e pertence ao plano xy com orientação positiva para cima, o vetor normal unitário é $\mathbf{k}$, a integral de superfície se transforma numa integral dupla, e o TS fica

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA\,.$$

Esta é precisamente a forma vetorial do TG dada pela equação (2.10). Então vemos que o TG é, na verdade, um caso especial do TS.

Observação 3.8. Note que como no caso do TFIL em que a integral de linha independia da curva, mas sim dependia apenas dos pontos extremos da curva (ou seja, da fronteira da curva), a fórmula (3.3) mostra que a integral de superfície depende apenas da fronteira da superfície. Assim, para $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ superfícies orientadas com mesma curva fronteira orientada $\mathcal{C}$ e ambas satisfazem as hipóteses do TS, temos

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\,.$$

Este fato é útil quando a integral sobre uma das superfícies for de difícil resolução, enquanto que sobre a outra a integral se torne mais fácil.

Anteriormente mencionamos que aplicaríamos o Teorema de Stokes para obter um critério de determinação de campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$. A seguir apresentamos tal resultado.

Corolário 3.9. *Seja* $\mathbf{F}$ *um campo vetorial* C^1 *em* $\mathbb{R}^3$*. Então* $\mathbf{F}$ *é conservativo se, e somente se,* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \vec{0}$*; em símbolos, para um campo escalar* f *sobre* $\mathbb{R}^3$*,*

$$\mathbf{F} = \nabla f \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \vec{0}\,.$$

Prova. Se $\mathbf{F} = \nabla f$ então é fácil constatar que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \vec{0}$. Reciprocamente, pelo Teorema 2.17 é suficiente mostrar que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado $\mathcal{C}$. Sejam $\mathcal{C}$ um caminho fechado simples e $\mathcal{S}$ uma superfície orientada cuja fronteira seja $\mathcal{C}$[2]. Então, aplicando o TS obtemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{0}\cdot d\mathbf{S} = 0\,.$$

Para um caminho fechado não simples, como ele pode ser dividido em diversos caminhos simples e as integrais ao longo desses caminhos simples são todas 0, e sendo a integral ao longo do caminho a soma dessas integrais, segue que a integral ao longo do caminho é 0.

□

Observação 3.10. A demonstração acima contém duas afirmações de difícil prova: a existência da superfície $\mathcal{S}$ com fronteira $\mathcal{C}$ e a composição do caminho fechado não simples por diversos caminhos fechados simples. Obviamente a escolha pela apresentação desta demonstração deve-se à aplicação do Teorema de Stokes. Todavia uma demonstração com mais rigor encontra-se em [1].

3.3 O Teorema da Divergência

O Teorema da Divergência é uma extensão do Teorema de Green para dimensão maior. Na subseção2.3.1, escrevemos o TG na versão vetorial

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{\overline{U}} \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)\,dA\,, \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva fronteira, orientada positivamente, da região do plano U. O Teorema da Divergência estenderá, a identidade acima, para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$, onde em vez da região plana e de sua curva fronteira, teremos um sólido e sua superfície fronteira.

Teorema 3.11 (Teorema da Divergência - TD)**.** *Sejam* E *uma região sólida, cuja fronteira é uma superfície* $\mathcal{S}$ *orientada positivamente, e* $\mathbf{F}$ *um campo vetorial* C^1 *em uma região aberta que contém* E*. Então*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_{E} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV\,.$$

[2] Isso é sempre possível, mas sua demonstração foge ao escopo deste texto

Observações 3.12.

1. O Teorema da Divergência afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de $\mathbf{F}$ pela superfície fronteira de E é igual à integral tripla do divergente de $\mathbf{F}$ em E.

2. O Teorema da Divergência é, às vezes, chamado *Teorema de Gauss*. Em muitos países da Europa, ele é conhecido como *Teorema de Ostrogradski*.

3.4 Teoremas do Cálculo Vetorial

3.4.1 Alguns Teoremas

Uma conclusão fica-nos: os principais resultados apresentados aqui são versões em dimensão maior do Teorema Fundamental do Cálculo. Assim, listamos os teoremas (fórmulas) a fim de que o leitor possa visualizar, mais facilmente, essas semelhanças essenciais.

Observe que em cada caso temos, do lado esquerdo, uma integral de uma “derivada"sobre uma região, e do lado direito temos os valores da função na fronteira da região.

Note que das duas representações para o Teorema de Green, uma corresponde ao Teorema de Stokes e a outra ao Teorema da Divergência, quando estendidas.

TFC	$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$
TFIL	$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$
TG	$\iint_{\overline{U}} (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\iint_{\overline{U}} \text{div}\,\mathbf{F}\,dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,ds$
TS	$\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
TD	$\iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

São muitas as identidades integrais importantes no Cálculo Vetorial, três delas serão estudadas minuciosamente no próximo capítulo. Agora apresentaremos duas identidades que relacionam integrais de volume e integrais de superfícies, como no Teorema da Divergência. Para um estudo sobre tais identidades veja [2]:

$$\begin{aligned} \iiint_E \nabla f\, dV &= \iint_S f d\mathbf{S} \\ \iiint_E \text{rot}\,\mathbf{F}\, dV &= \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, dS\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.4.2 grad, div, rot e Independência do Sistema de Coordenadas

O gradiente de um campo escalar f (e também de um campo vetorial $\mathbf{F}$), o divergente e o rotacional de um campo vetorial $\mathbf{F}$ foram definidos com base num sistema de coordenadas. Todavia eles são propriedades intrínsecas do campo e assim admitem definições (fórmulas) que independem do sistema de coordenadas. Uma demonstração aberta dessas independências de sistema de coordenadas para os referidos campos pode ser feita usando o Teorema da Divergência e as identidades em (3.4) (veja [2]). Aqui preferimos seguir os passos de [1] e apresentar, como aplicação dos teoremas da Divergência e de Stokes, apenas a prova para o divergente e o rotacional de um campo; isto porque esta argumentação nos fornecerá a interpretação física para os referidos campos que, inclusive motiva-lhes os nomes.

Teorema 3.13. *Sejam $E(t)$ e $\mathcal{S}(t)$ um sólido e sua fronteira, ambos atendendo às hipóteses do Teorema da Divergência. Seja A um ponto de $E(t)$ tal que $E(t) \to A$, quando $t \to 0$, e seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial C^1 num aberto contendo $E(t)$. Então*

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|E(t)|} \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \,. \tag{3.5}$$

Note que definindo o divergente de um campo vetorial pela equação (3.5), não necessitamos de um sistema de coordenadas. Além disso a fórmula infere uma interpretação física ao divergente, a saber: seja $\mathbf{v}$ o campo velocidade de um fluido com densidade constante ρ, então a vazão de fluido por unidade de área é o campo $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$; desta feita, a integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ do lado direito de (3.5) afere a massa total do fluido passando através da superfície $\mathcal{S}(t)$ no instante t e no sentido da normal $\mathbf{n}$; assim o quociente em (3.5) representa a massa por unidade de volume que passa através de $\mathcal{S}(t)$ no instante t no sentido de $\mathbf{n}$. Por fim, quando $t \to 0$ temos a vazão total por unidade de volume que sai de A; por isso, o divergente em A pode ser interpretado como o coeficiente de variação da massa por unidade de volume, por unidade de tempo, em A (essa é a razão para o nome *divergente*). Para campos $\mathbf{F} \in C^1$ e $P \in E$, se $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$ o escoamento total próximo de P é para fora e P é dito *fonte*, se $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$ o escoamento total próximo de P é para dentro e P é denominado *sorvedouro*.

Agora usando o Teorema de Stokes obtemos um resultado análogo para o rotacional.

Teorema 3.14. *Sejam $E(t)$, $\mathcal{S}(t)$ e A como no Teorema 3.13. Então*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|E(t)|} \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, dS$$

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|\mathcal{S}(t)|} \oint_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3.6}$$

Note que em ambas as fórmulas acima, temos definido o rotacional sem a presença de sistema algum de coordenadas. Quanto à interpretação física do rotacional, sendo $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ um campo de velocidade de um fluido, a integral de linha em (3.6) é $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$. Agora, como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente da velocidade $\mathbf{v}$ na direção do vetor $\mathbf{T}$, unitário tangente à curva $\mathcal{C}$, e como o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ cresce à medida que a direção de $\mathbf{v}$ se aproxima da direção de $\mathbf{T}$, segue que a integral de linha em (3.6) mede a tendência do fluido mover-se em torno de $\mathcal{C}$ e é, por isso, denominada *circulação de* $\mathbf{v}$ em torno de $\mathcal{C}$. Portanto o limite em (3.6) representa a circulação por unidade de área no ponto A; enquanto $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}(A)$ representa a medida do efeito da rotação do fluido em torno do eixo $\mathbf{n}$, isto é, é uma *densidade de circulação* da velocidade $\mathbf{v}$ em torno do eixo $\mathbf{n}$ (essa é a razão para o nome *rotacional*).

Capítulo 4

IDENTIDADES DE GREEN

4.1 As Identidades

Neste capítulo vamos nos restringir ao $\mathbb{R}^2$, para o tratamento em $\mathbb{R}^3$ veja [11]. Do Teorema de Green seguem três identidades de grande aplicação no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDP), denominadas *identidades de Green*. A seguir veremos duas delas.

Teorema 4.1 (1ª e 2ª Identidades de Green)**.** *Sejam U um domínio onde vale o Teorema de Green e $u, v \in C^2(\overline{U})$. Então*

$$\int_{\overline{U}} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\, dA = \int_{\partial U} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds \tag{$1^a IG$}$$

$$\int_{\overline{U}} (v\Delta u - u\Delta v)\, dA = \int_{\partial U} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \tag{$2^a IG$}$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ é a derivada direcional na direção do vetor unitário normal exterior $\mathbf{n}$.

Prova. (1ªIG): Seja $\mathbf{F} = v\nabla u$. Então $\mathbf{F}$ é um campo C^1 em $\overline{U}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$. Aplicando o TG vem

$$\begin{aligned} \int_{\overline{U}} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\, dA &= \int_{\overline{U}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA \overset{TG}{=} \int_{\partial U} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\partial U} (v\nabla u \cdot \mathbf{n})\, ds \\ &= \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds\,. \end{aligned}$$

Assim provamos a primeira identidade de Green.
(2ªIG): Aplicando a (1ªIG) para u, v e para v, u, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{U}} (v\Delta u - u\Delta v)\, dA &= \int_{\overline{U}} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\, dA - \int_{\overline{U}} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dA \\ &= \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds - \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, ds = \int_{\partial U} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds\,. \end{aligned}$$

Assim provamos a segunda identidade e finalizamos a prova do teorema.

□

Corolário 4.2. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1, se $\Delta u = 0$ em U, tem-se*

$$\int_{\overline{U}} |\nabla u|^2 dA = \int_{\partial U} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds \tag{4.1}$$

$$\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds = 0\,. \tag{4.2}$$

Prova. Basta fazer $v = u$ na (1ªIG) para obter a primeira equação e $v = 1$ na (2ªIG) para obter a segunda equação.

□

Como aplicação de (4.1) temos o teorema de unicidade para a equação de Poisson.

Teorema 4.3 (Unicidade Poisson)**.** *Sejam U como no Teorema 4.1, $f \in C(U)$ e $g \in C^2(\partial U)$. Então o problema de Dirichlet para a equação de Poisson*

$$\begin{cases} u \in C^2(\overline{U}) \\ \Delta u = f & \text{em} \quad U \\ u = g & \text{em} \quad \partial U \end{cases} \tag{4.3}$$

tem no máximo uma solução.

Prova. Se u e v são soluções de (4.3), tomamos $w = u - v$ e daí facilmente vemos que w é solução do problema

$$\begin{cases} w \in C^2(\overline{U}) \\ \Delta w = 0 & \text{em} \quad U \\ w = 0 & \text{em} \quad \partial U \end{cases}$$

Assim, aplicando (4.1) para w e sendo $w = 0$ em ∂U, temos

$$\int_{\overline{U}} |\nabla w|^2 dA = \int_{\partial U} w \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\, ds = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla w = 0\,.$$

Agora, uma vez que U é conexo, $w \in C^2(\overline{U})$ e $\nabla w = 0$ em $\overline{U}$, temos w constante em $\overline{U}$ e como $w = 0$ em ∂U segue que $w = 0$ em $\overline{U}$. Portanto $v = u$ em $\overline{U}$.

□

Observação 4.4. A hipótese $u \in C^2(\overline{U})$ é muito forte para a unicidade; ela é necessária devido às hipóteses para a aplicação da identidade (4.1). Contudo, mais adiante enfraqueceremos a hipótese (referente à regularidade da solução) para

$$u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})\,,$$

isto é, em (4.3) temos $g \in C^2(\partial U)$, mas basta $g \in C(\partial U)$ (veja a Seção 4.2).

Agora vamos à Terceira Identidade de Green, que é muito importante para a chamada “teoria do potencial".

Definição 4.5 (Função Harmônica)**.** Uma função $u \in C^2(U)$ é dita uma *função harmônica* se for solução da equação de Laplace

$$\Delta u = 0\,.$$

Observações 4.6.

1. Aqui U é um domínio, como sabemos.

2. A definição de função harmônica varia no que tange à sua regularidade, em [6] é exigido apenas $u \in C(U)$. Daí, em [6] terá uma prova diferente para o Princípio do Máximo, pois para aplicar as identidades de Green é necessária regularidade C^2. Como nosso texto trata de “teoria de Green"não há outro caminho se não assumirmos a regularide C^2 para a definição de função harmônica.

Agora vamos obter a Solução Fundamental do Laplaciano. Para esse fim usaremos a representação do Laplaciano em coordenadas polares.

Consideremos as fórmulas de mudança de variáveis, entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,; \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Fazendo $v(r,\theta) = u(x,y)$, facilmente vemos que

$$\Delta u =^{[1]} \Delta_{(r,\theta)} v = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}\,. \tag{4.4}$$

Definição 4.7. Se v é harmônica e $v(r,\theta) = f(r)$, então v é dita *harmônica radial*.

Teorema 4.8. *As funções harmônicas radiais em* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *são*

$$f(r) = c_1 \ln r + c_2\,, \quad c_1, c_2 \ \textit{constantes}\,. \tag{4.5}$$

Prova. Como $f = f(r)$, então $f_{\theta\theta} = 0$ e daí segue de (4.4) que se f é harmônica radial então

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0\,. \tag{4.6}$$

Consideremos os casos a seguir:

- $f'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) = c$ solução de (4.6).

- $f'(r) \neq 0 \quad \overset{(4.6)}{\Rightarrow} \quad |f'(r)| = \dfrac{c}{r}$, como f' é contínua segue que $f(r) = c\ln r + d$ onde $c \neq 0$ e d são constantes.

[1] Como no caso do grad, rot e div, também o laplaciano independe do sistema de coordenadas.

Assim, temos que $f_1 = 1$ e $f_2 = \ln r$ são soluções de (4.6) em $(0, \infty)$ e, uma vez que elas são linearmente independentes segue de [7, Teo.4.5] que a solução geral da EDO (4.6) é dada por (4.5). Reciprocamente, se f é do tipo (4.5) então, obviamente, f é harmônica radial.

$\square$

Notação. Usaremos as letras gregas para representar pontos de $\mathbb{R}^2$, isto é, $\xi = (x, y)$.

Definição 4.9 (Solução Fundamental)**.** A *solução fundamental* de $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^2$ é a função

$$\begin{array}{cccl} F & : & \mathbb{R}^2 \diagdown \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \xi & \longmapsto & F(\xi) = \dfrac{1}{2\pi} \ln |\xi| \,. \end{array}$$

Observação 4.10. Para $n \geq 3$, a *solução fundamental* de $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ é a função

$$\begin{array}{cccl} F & : & \mathbb{R}^n \diagdown \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \xi & \longmapsto & F(\xi) = \dfrac{1}{(2-n)\omega_n} |\xi|^{2-n} \,, \end{array}$$

Calculando diretamente, é fácil ver que se F é a solução fundamental de $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$, então $\Delta F = 0$ em $\mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$.
A solução fundamental é importante pois a partir dela se constrói outras funções harmônicas.

Seja F a solução fundamental de $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$, vamos adotar a seguinte notação:

$$F_\xi(\eta) = F(\xi - \eta) \,, \quad \eta \neq \xi.$$

Para demonstrar a Terceira Identidade de Green vamos precisar de alguns lemas, que apresentaremos a seguir.

Lema 4.11. *Sejam $R > 0$ e $g : B[\xi; R] \to \mathbb{R}$. Se g é limitada e $F_\xi g$ é integrável em relação ao comprimento de arco ao longo de qualquer círculo centrado em ξ de raio r, $0 < r < R$, então*

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds = 0 \,.$$

Prova. Como g é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M, \; \forall \, n \in B[\xi; R] \,.$$

Daí, se $0 < r < R$,

$$\int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds = \int_{\|\xi - \eta\| = r} F(\xi - \eta) g(\eta) \, ds(\eta) = \frac{\ln r}{2\pi} \int_{\|\xi - \eta\| = r} g(\eta) \, ds(\eta) \,,$$

e portanto

$$\left|\int_{\partial B(\xi;r)} F_\xi g\,ds\right| \leq \frac{M|\ln r|}{2\pi}\int_{\|\xi-\eta\|=r} ds(\eta) = Mr|\ln r| \overset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.$$

□

Lema 4.12. *Sejam $R>0$ e $g \in C(B[\xi;R])$. Então*

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\partial B(\xi;r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}} g\,ds = g(\xi)\,.$$

Prova. Denotando $\xi=(a,b)$ e $\eta=(x,y)$, temos:

$$\begin{aligned} F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi}\ln\|\xi-\eta\| = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\\ \partial_x F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi}\frac{x-a}{\|\xi-\eta\|^2}\\ \partial_y F_\xi(\eta) &= \frac{1}{2\pi}\frac{y-b}{\|\xi-\eta\|^2}\,. \end{aligned}$$

Além disso, se $\eta\in\partial B(\xi;r)$ para $0<r<R,\ \|\xi-\eta\|=r$ e

$$\mathbf{n} = \frac{\eta-\xi}{\|\xi-\eta\|} = \left(\frac{x-a}{\|\xi-\eta\|}, \frac{y-b}{\|\xi-\eta\|}\right)\,,$$

então

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\xi;r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}} g\,ds &= \int_{\|\xi-\eta\|=r} \nabla F_\xi(\eta)\cdot\mathbf{n}(\eta) g(\eta)\,ds(\eta)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\|\xi-\eta\|=r}\frac{\eta-\xi}{\|\xi-\eta\|^2}\cdot\frac{\eta-\xi}{\|\xi-\eta\|} g(\eta)\,ds(\eta)\\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_{\|\xi-\eta\|=r} g(\eta)\,ds(\eta) \end{aligned}$$

que é o valor médio de g sobre o círculo de raio r. Portanto o resultado segue da Proposição 2.12.

□

Lema 4.13. *Dado $\xi\in U$, seja $R>0$ tal que $B(\xi;R)\subset U$. Para cada $r\in(0,R)$, seja $U_r = U\setminus B[\xi;r]$. Então, para qualquer que seja $g\in C(\overline{U})$, existe o limite*

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\overline{U}_r} F_\xi(\eta) g(\eta)\,d\eta\,.$$

prova. Seja

$$I(r) = \int_{\overline{U}_r} F_\xi(\eta) g(\eta)\,d\eta\,.$$

$I(r)$ existe para $0 < r < R$, pois $F_\xi g \in C(\overline{U}_r)$. Queremos a existência de $\lim_{r\to 0^+} I(r)$.
Como $g \in C(\overline{U})$ e $\overline{U}$ é compacto, então g é limitada, logo existe $M > 0$ tal que

$$|g(\eta)| \leq M, \ \forall\, \eta \in \overline{U}\,.$$

Sejam $0 < s < t < R$: então

$$|I(t) - I(s)| = \left| \int_{\overline{U}_s \setminus \overline{U}_t} F_\xi(\eta) g(\eta)\, d\eta \right| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{s < \|\xi - \eta\| \leq t} \big|\ln \|\xi - \eta\|\big|\, d\eta\,.$$

Para calcular essa última integral, vamos introduzir um sistema de coordenadas polares centrado em ξ:

$$\eta = \xi + (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad s < r \leq t,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

Então

$$\int_{s < \|\xi - \eta\| \leq t} \big|\ln \|\xi - \eta\|\big|\, d\eta = \int_s^t \int_0^{2\pi} |\ln r| r\, dr d\theta = 2\pi \int_s^t r|\ln r|\, dr\,,$$

como $\lim_{r\to 0^+} (r \ln r) = 0$, então a função $r\ln r$ é limitada perto de zero, isto é, existe $N > 0$ tal que

$$0 < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < r|\ln r| < N\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{MN}$: se $r_n \in (0, R)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ é tal que $r_n \to 0$, quando $n \to \infty$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |r_n - r_m| < \delta$; Daí

$$|I(r_n) - I(r_m)| < \frac{M}{2\pi} N 2\pi |r_n - r_m| < \varepsilon$$

e portanto, pelo critério de Cauchy existe $\lim_{n\to\infty} I(r_n)$. Como $I(r_n)$ tem limite para todo $r_n \in (0, R)$ convergindo a zero, segue que existe $\lim_{r\to 0^+} I(r)$; como queríamos demonstrar.

□

Agora estamos preparados para a Terceira Identidade de Green.

Teorema 4.14 (3ª Identidades de Green)**.** *Sejam U um domínio limitado onde vale o Teorema de Green e $u \in C^2(\overline{U})$. Então, qualquer que seja $\xi \in U$,*

$$u(\xi) = \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}} - F_\xi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \int_{\overline{U}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta)\, d\eta\,. \qquad (3^a IG)$$

Observações 4.15.

1. A primeira integral está bem definida pois se $\xi \in U$ e $\eta \in \partial U$, então $F_\xi(\eta)$ está bem definida e é continuamente diferenciável em η, isto é, $F_\xi \in C^1(\partial U)$.

2. A segunda integral é imprópria, pois $F_\xi(\eta)$ diverge quando $\eta \to \xi$, mas tem sua boa definição assegurada pelo Lema 4.13:

$$\int_{\overline{U}} F_\xi(\eta)\Delta u(\eta)\, d\eta = \lim_{r\to 0^+} \int_{\overline{U}_r} F_\xi(\eta)\Delta u(\eta)\, d\eta\,.$$

Prova. Fixemos $\xi \in U$ e tomemos $R > 0$ tal que $B(\xi; R) \subset U$. Como no Lema 4.13, se $0 < r <$, $U_r = U \setminus B[\xi; r]$, temos $\partial U_r = \partial U \cup \partial B(\xi; r)$ e a orientação positiva de ∂U_r coincide com a orientação positiva de ∂U e a orientação negativa de $\partial B(\xi; r)$, isto é, se $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a ∂U_r e ν é a normal unitária exterior a $\partial B(\xi; r)$, então $\mathbf{n} = -\nu$ em $\partial B(\xi; r)$.
Sabemos que $\Delta F_\xi(\eta) = 0$ se $\eta \in \overline{U}_r$, daí aplicando a (2ªIG), com $v = F_\xi$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\overline{U}_r} F_\xi \Delta u\, d\eta &= \int_{\overline{U}_r} (F_\xi \Delta u - u\Delta F_\xi)\, d\eta = \int_{\partial U_r} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}}\right) ds \\ &= \int_{\partial U} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}}\right) ds - \int_{\partial B(\xi;r)} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial F_\xi}{\partial \nu}\right) ds.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $\overline{U}$ é compacto e $\nabla u \cdot \nu$ é contínuo em $\overline{U}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é limitada, e $F_\xi \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é integrável sobre $\partial B(\xi; r)$. Logo pelo Lema 4.11

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\partial B(\xi;r)} F_\xi \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0\,.$$

Ainda, como u é contínua em $\overline{U}$, pelo Lema 4.12

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\partial B(\xi;r)} u\frac{\partial F_\xi}{\partial \nu} ds = u(\xi)\,.$$

Por fim, pelo Lema 4.13, como $u \in C^2(\overline{U})$, existe o limite

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\overline{U}_r} F_\xi \Delta u\, d\eta = \int_{\overline{U}} F_\xi \Delta u\, d\eta\,.$$

Assim, tomando $r \to 0^+$ em (4.7) obtemos a (3ªIG).

□

Observação 4.16. Em $\mathbb{R}^n$ tem-se a validade das três identidades de Green (veja [11]). As duas primeiras têm provas idênticas ao caso $n = 2$, apenas uando o Teorema da Divergência ao invés do Teorema de Green. Quanto à terceira identidade, sua prova é um pouco diferente, uma vez que para $n \geq 3$ a solução fundamental tem outra forma. Em $\mathbb{R}^3$, a Terceira Identidade de Green tem importância, do ponto de vista físico, na teoria do potencial (veja a referência indicada por [12]).

4.2 O Princípio do Máximo para Funções Harmônicas

Nesta seção vamos provar o princípio do máximo para funções harmônicas e usá-lo para obter a unicidade do problema de Poisson com menos regularidade.

Para a prova do princípio do máximo vamos usar outra propriedade interessante de funções harmônicas que é o teorema do valor médio.

Teorema 4.17 (Teorema do Valor Médio para Funções Harmônicas)**.** *Sejam A um a-berto e u harmônica em A. Então, quaisquer que sejam $\xi \in A$ e $r > 0$ com $B[\xi; r] \subset A$,*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi;r)} u\, ds\,. \tag{4.8}$$

prova. Aplicando a (3ªIG) à $B(\xi; r)$, obtemos

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{\partial B(\xi;r)} \left(u\frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}} - F_\xi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \int_{B[\xi;r]} F_\xi(\eta)\Delta u(\eta)\, d\eta \\ &= \int_{\partial B(\xi;r)} u\frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}}\, ds - \int_{\partial B(\xi;r)} F_\xi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds\,. \end{aligned}$$

Como na prova do Lema 4.12, se $\eta \in \partial B(\xi; r)$ temos

$$F_\xi(\eta) = \frac{\ln \|\xi - \eta\|}{2\pi} = \frac{\ln r}{2\pi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_\xi}{\partial \mathbf{n}}(\eta) = \frac{1}{2\pi\|\xi - \eta\|} = \frac{1}{2\pi r}\,.$$

Portanto

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi;r)} u\, ds - \frac{\ln r}{2\pi} \int_{\partial B(\xi;r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds\,.$$

Agora, como u é harmônica em $B(\xi; r)$, por (4.2)

$$\int_{\partial B(\xi;r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = 0\,,$$

e assim temos (4.8).

□

Observações 4.18.

1. Note que a fórmula do valor médio diferere da Proposição 2.12, onde lá o valor da função é o limite do valor médio sobre o círculo, quando o raio tende a zero. Aqui, pelo fato da função ser harmônica, temos que o valor médio é assumido no centro do disco.

2. É importante ressaltar que a recíproca do Teorema do Valor Médio é verdadeira, isto é: *se A é um aberto, $u \in C^2(A)$ e a fórmula (4.8) é válida, então u é harmônica em A.*

3. A recíproca do Teorema do Valor Médio é usada na Teoria de Funções de uma Variável Complexa para provar a analiticidade de uma função harmônica.

Teorema 4.19 (Princípio do Máximo)**.** *Sejam A um aberto e $u \in C(\overline{A})$ harmônica em A:*

(i) *Se A é conexo e u atinge seu máximo em A, isto é, existe $\xi_0 \in A$ tal que*

$$u(\xi) \leq u(\xi_0), \quad \forall \xi \in \overline{A};$$

então u é constante em $\overline{A}$.

(ii) *Se A é limitado então o máximo de u ocorre em ∂A, isto é,*

$$\max_{\overline{A}} u = \max_{\partial A} u\,.$$

Prova. (i) Conforme a hipótese, seja $\xi_0 \in A$ tal que

$$u(\xi_0) = M = \max\{u(x); x \in \overline{A}\}\,, \tag{4.9}$$

e consideremos o conjunto $S = \{\xi \in A; u(\xi) = M\}$.
Começamos observando que $S \neq \emptyset$ pois $\xi_0 \in S$. A seguir vamos mostrar que S é aberto e fechado em M, o que, mediante a conexidade de A, implica $S = A$ (Proposição 1.1):

- S é fechado em A pois $S = u^{-1}(M)$ (imagem inversa de fechado for função contínua).

- Como A é aberto, então S é aberto em A se, e somente se, S é aberto. Assim, vamos mostrar que S é aberto. Para esse fim, tomemos $\xi \in S$ arbitrário e $R > 0$ de modo que $B[\xi; R] \subset A$ e mostremos que $B(\xi; R) \subset S$. Como u é harmônica em A, pelo TVM temos

$$M = u(\xi) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)} u\,ds\,, \quad \forall r \in (0, R)\,. \tag{4.10}$$

Suponhamos que $B(\xi; R) \not\subset S$, então existe $\eta \in B(\xi; R)$ tal que $\eta \notin S$, logo

$$u(\eta) < M = u(\xi)\,, \tag{4.11}$$

pela continuidade de u, exite uma vizinhança V de η em $B(\xi; R)$ tal que $u < M$ em V; Tomando $r = \|\xi - \eta\|$, $\Gamma = V \cap \partial B(\xi; r)$ e usando (4.9), (4.10) e (4.11) vem

$$\begin{aligned} M &\overset{(4.10)}{=} \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)} u\,ds = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)\smallsetminus\Gamma} u\,ds + \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Gamma} u\,ds \\ &\overset{(4.9)}{\leq} \frac{M}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)\smallsetminus\Gamma} ds + \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Gamma} u\,ds \\ &\overset{(4.11)}{<} \frac{M}{2\pi r}\int_{\partial B(\xi;r)\smallsetminus\Gamma} ds + \frac{M}{2\pi r}\int_{\partial\Gamma} ds = M\,, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto $B(\xi; R) \subset S$ como desejávamos.

(ii) Como $\overline{A}$ é compacto, existe $\max_{\overline{A}} u$. Se $\max_{\overline{A}} u$ ocorre em um ponto interior, então pelo item (i) u é constante no fecho da componente conexa X que contém esse ponto, e portanto, como $\partial A \cap \overline{X} \neq \emptyset$ segue que existe $\xi_0 \in \partial A$ tal que $u(\xi_0) = \max_{\overline{A}} u$.

□

Observação 4.20. No item (i) o domínio A pode ser ilimitado daí a continuidade de u não garante a existência de máximo, por isso temos a hipótese de existência do máximo em A; já no item (ii) não há a necessidade da hipótese de existência do máximo em $\overline{A}$, visto que A é limitado e u contínua em $\overline{A}$.

Obviamente temos o análogo para o mínimo, de tudo que foi comentado para o máximo. Por simplicidade vamos registrar apenas o Princípio do Mínimo.

Corolário 4.21 (Princípio do Mínimo)**.** *Vale o mesmo princípio acima, apenas substituindo máximo por mínimo.*

Prova. Obviamente $v = -u$ satisfaz todas as hipóteses do Princípio do Máximo. Daí, é fácil ver, que aplicando-se o Princípio do Máximo à v obtemos o Princípio do Mínimo para u.

□

Agora findaremos este capítulo provando a unicidade do problema de Poisson, como prometido.

Teorema 4.22. *Sejam U um domínio limitado, $f \in C(U)$ e $g \in C(\partial U)$. Então existe no máximo uma solução para o problema*

$$\begin{cases} u \in C^2(U) \cap C(\overline{U}) \\ \Delta u = f \quad \text{em } U \\ u = g \quad \text{em } \partial U \end{cases} \tag{4.12}$$

Prova. Sejam u, v soluções do problema (4.12) e $w = u - v$. Então $w \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $\Delta w = \Delta u - \Delta v = f - f = 0$ em U e $w = u - v = g - g = 0$ em ∂U. Como w é harmônica em U, U é limitado e $w \in C(\overline{U})$ então w atinge seu máximo e seu mínimo em ∂U, o que implica $w = 0$ em $\overline{U}$ e, consequentemente $u = v$, findando a prova do teorema.

□

Observação 4.23. Comentamos anteriormente que uma região de “fácil"trato seria o semiplano. Contudo, como o semiplano é ilimitado, a princípio não podemos aplicar o Princípio do Máximo se não tivermos a hipótese de existência do máximo. Entretanto, isto é contornado por uma versão mais forte do Princípio do Máximo onde substituimos a hipótese de máximo em A por máximo local em A, este é o chamdo *Princípio do Máximo Forte*.

Capítulo 5

A FUNÇÃO DE GREEN

Neste capítulo, diferentemente do anterior, vamos considerar $n \geq 2$; assim estaremos admitindo a validade dos resultados do capítulo anterior para $n \geq 2$. O motivo desta escolha é que os pontos abordados neste capítulo não apresentam diferenças significativas entre os casos $n = 2$ e $n > 2$.

5.1 Definição

Para motivar a introdução da função de Green consideremos o problema no domínio limitado U onde vale o Teorema de Green. Suponha que o problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\overline{U}) \\ \Delta u = f \quad \text{em } U \\ u = g \quad \text{em } \partial U \end{cases} \tag{5.1}$$

para $f \in C(\overline{U})$ e $g \in C(\partial U)$ tem uma solução. Pela Terceira Identidade de Green a solução é dada para $x \in U$ por

$$u(x) = \int_U F(x-y)f(y)\,dy + \int_{\partial U}\left(g\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}(y)F(x-y)\right) ds(y)\,. \tag{5.2}$$

Esta representação da solução tem o incoveniente de não expressá-la explicitamente, pois o termo $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}$ não é um dado do problema (devido à unicidade de solução garantida pelo Teorema 4.22, obviamente $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}$ é determinado pelos dados f e g). Assim é preciso uma representação alternativa para a solução, onde apareçam apenas os dados f e g. A ideia é então substituir $F(x-y)$ por uma função $G(x,y)$ com propriedades semelhantes às de F mas, tal que $G(x,y) = 0$ para $(x,y) \in U \times \partial U$ pois assim o termo contendo $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}$ não ocorre na relação que corresponde à Terceira Identidade de Green.

Para realizar tal plano introduzimos para cada x fixo em U uma *função correção* $H_x = H_x(y) = H(x,y)$ solução do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} H_x \in C^2(U) \cap C(\overline{U}) \\ \Delta_y H_x(y) = 0 \quad \text{em } U \\ H_x(y) = F(x-y) \quad \text{em } \partial U \end{cases} \tag{5.3}$$

Pelo Teorema 4.22 vemos que existe no máximo uma função H_x para o problema acima.

Aplicando a Segunda Identidade de Green obtemos

$$\begin{aligned} \int_U H_x(y)\Delta u(y)\,dy &= \int_{\partial U}\left(H_x(y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - u(y)\frac{\partial H_x}{\partial \mathbf{n}_y}(y)\right)ds(y) \\ &= \int_{\partial U}\left(F(x-y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - u(y)\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y)\right)ds(y)\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Conduzido por essa explanação vamos definir, por enquanto, a função de Green para domínios limitados. Contudo veremos no decorrer deste capítulo que também se tem a função de Green para um domínio ilimitado.

Definição 5.1 (Função de Green)**.** A *função de Green* para um domínio limitado com fronteira C^1 é a função

$$G(x,y) = -F(x-y) + H_x(y)\,, \quad \forall\,(x,y) \in U \times \overline{U}\ (x \neq y)\,.$$

Assim, segue da (3ªIG) e de (5.4) que para $x \in U$

$$u(x) = \int_U G(x,y)\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial U} u\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x,y)\,ds(y)\,, \tag{5.5}$$

onde $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x,y) = \nabla_y G(x,y)\cdot \mathbf{n}(y)$ é a derivada normal exterior de G em relação à variável y. Note que o termo $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}$ não aparece em (5.5): a função correção H_x foi introduzida justamente para esse fim.

Agora voltando ao problema introdutório desta seção, combinando a equação (5.2) e (5.4) (com $f = \Delta u$ e $g = u\big|_{\partial U}$) obtemos

$$u(x) = \int_U G(x,y)f(y)\,dy + \int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x,y)\,ds(y)\,, \tag{5.6}$$

isto é, u é totalmente expressa em função dos dados f e g.

Observações 5.2.

1. A integral sobre U em (5.5) existe no mesmo sentido que a integral correspondente na (3ªIG), uma vez que a função $y \in \overline{U} \longmapsto H_x(y)$ para x fixo, é contínua.

2. Se u é harmônica então (5.5) fica

$$u(x) = \int_{\partial U} u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x,y)\, ds(y)\,, \quad \forall\, x \in U\,. \tag{5.7}$$

A equação (5.7) é conhecida como a *fórmula de Poisson* em U, e o termo $-\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}$ é chamado o *núcleo de Poisson* de U.

3. O motivo da limitação de U é simplesmente para aplicarmos a (3ªIG).

A partir de agora U denotará um *domínio regular*, isto é, um domínio limitado com fronteira de classe C^2.

A primeira propriedade a apresentarmos é a simetria da função de Green, isto é, $G(x,y) = G(y,x)$.

Teorema 5.3 (Simetria)**.** *Seja U um domínio regular. Então*

$$G(x,y) = G(y,x)\,, \quad \forall\,(x,y) \in U \times U,\ x \neq y\,.$$

Prova. Como $x \neq y$, por definição de G, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$B[x;\varepsilon] \cup B[y;\varepsilon] \subset U \quad \text{e} \quad B[x;\varepsilon] \cap B[y;\varepsilon] = \emptyset\,.$$

Tomemos ainda, em $U_\varepsilon \equiv (B[x;\varepsilon] \cup B[y;\varepsilon])$,

$$u(z) = G(x,z) = H(x,z) - F(x,z) \quad \text{e} \quad v(z) = G(y,z)\,.$$

Agora aplicando a (2ªIG), e observando que $\Delta u = \Delta v = 0$, vem

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{U_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial U_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \\
&= \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \\
&\quad + \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \left[G(x,z)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(y,z) - G(y,z)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,z) \right] ds(z) \\
&\quad + \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \left[G(x,z)\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}}(y,z) - G(y,z)\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}}(x,z) \right] ds(z) = A_\varepsilon + B_\varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Vamos analisar separadamente A_ε e B_ε.

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \left[G(x,z)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(y,z) - G(y,z)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,z) \right] ds(z) \\
&= \int_{\partial B(x;\varepsilon)} H_x(z)\frac{\partial H_y}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) \\
&\quad - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} H_x(z)\frac{\partial F_y}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} F_x(z)\frac{\partial H_y}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) \\
&\quad + \int_{\partial B(x;\varepsilon)} F_x(z)\frac{\partial F_y}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} H_y(z)\frac{\partial H_x}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) \\
&\quad + \int_{\partial B(x;\varepsilon)} H_y(z)\frac{\partial F_x}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) + \int_{\partial B(x;\varepsilon)} F_y(z)\frac{\partial H_x}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) \\
&\quad - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} F_y(z)\frac{\partial F_x}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z) = \sum_{i=1}^{8} I_i\,.
\end{aligned}$$

Vamos calcular o limite de cada I_i.

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\partial B(x;\varepsilon)} H_x(z) \nabla_z H_y(z) \cdot \frac{x-z}{\|x-z\|}\, ds(z) \right| \\ &\leq \int_{\partial B(x;\varepsilon)} |H_x(z)|\; |\nabla_z H_y(z)|\, ds(z)\,. \end{aligned}$$

Como $H_x, H_y \in C^2(U)$ e $B[x;\varepsilon] \subset U$ temos que

$$|H_x(z)|\; |\nabla_z H_y(z)| \leq C_{xy}\,, \quad \forall\, z \in \partial B(x;\varepsilon)\,,$$

onde C_{xy} é uma constante; daí a inequação acima conduz a

$$|I_1| \leq C_{xy} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} ds = 2\pi C_{xy}\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.$$

Em destaque escrevemos

$$I_1 \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.9}$$

Analogamente tem-se

$$I_5 \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.10}$$

Agora vamos ao I_2.

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} H_x(z) \nabla_z F_y(z) \cdot \frac{x-z}{\varepsilon}\, ds(z) \right| \\ &\leq \int_{\partial B(x;\varepsilon)} |H_x(z)|\; |\nabla_z F_y(z)|\, ds(z)\,. \end{aligned}$$

Como $y \notin B[x;\varepsilon]$, tem-se $F_y \in C^\infty(B[x;\varepsilon])$ e portanto existe c_{xy} constante tal que

$$|H_x(z)|\; |\nabla_z F_y(z)| < c_{xy}\,, \quad \forall\, z \in \partial B(x;\varepsilon)\,,$$

e como na obtenção de (5.9), temos

$$I_2 \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.11}$$

Agora vamos à

$$I_3 = - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} F_x(z) \frac{\partial H_y}{\partial \mathbf{n}}(z)\, ds(z)\,.$$

Pelo argumento aplicado na obtenção de (5.11), temos $\dfrac{\partial H_y}{\partial \mathbf{n}}$ contínua e limitada em $B[x;\varepsilon]$ e como F_x é contínua em $\partial B(x;\varepsilon)$ temos $F_x \dfrac{\partial H_y}{\partial \mathbf{n}}$ integrável em relação ao comprimento de arco; Logo, segue do Lema 4.11 que

$$I_3 \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.12}$$

O mesmo argumento se aplica à I_4, e assim

$$I_4 \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.13}$$

Ainda, pelo mesmo argumento, segue do Lema 4.12 que

$$I_6 \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} H_y(x) = H(y,x)\,. \tag{5.14}$$

Agora $F_y \in C^\infty(B[x;\varepsilon])$ e $H_x \in C^2(U)$, daí como nos raciocínios anteriores segue que

$$I_7 \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \tag{5.15}$$

Pelo mesmo argumento usado na obtenção de (5.14), vem

$$I_8 \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} -F_y(x) = -F(y,x) = -F(x,y)\,. \tag{5.16}$$

Assim, de (5.9) – (5.16) temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{i=1}^{8} I_i = H(y,x) - F(y,x) = G(y,x)\,. \tag{5.17}$$

Um raciocínio análogo mostra que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} B_\varepsilon = -G(x,y)\,. \tag{5.18}$$

Com isto, tomando o limite $\varepsilon \to 0^+$ em (5.8), segue de (5.17) e (5.18) que

$$G(y,x) - G(x,y) = 0 \quad \text{e consequentemente} \quad G(y,x) = G(x,y)\,.$$

$\square$

Observações 5.4.

1. Por definição, a função $G(x,y)$ é harmônica na 2ª variável e se anula quando esta pertence à fronteira ∂U. A propriedade de simetria, provada acima, mostra que estas afirmações também são verdadeiras para a 1ª variável.

2. É importante ter uma sequência lógica dos resultados estabelecidos até aqui, pois é comum o equívoco de achar que já está resolvido o problema (5.1) para U limitado, entretanto os resultados obtidos até aqui foram assim: se o problema admite solução, então a solução tem a forma (5.6). Assim a resolução de um problema particular requer a obtenção da função de Green $G(x,y)$ para o domínio particular U, e o teste se a fórmula é solução do problema.

3. Referente à observação do item anterior temos que em [5] determina-se as funções de Green da bola e do semiespaço (este último inclusive é ilimitado) e depois prova que (5.6) é solução do problema (5.1) para $f = 0$. Já em [11] prova-se a existência de solução para (5.1) com U um aberto qualquer de $\mathbb{R}^3$ com a condição de fronteira nula ($u\big|_{\partial U} = 0$).

4. Para o tratamento de [11] necessita-se da teoria de integração de Lebesgue, o que não é o propósito destas notas, por isso vamos seguir [5], até porque o nosso propósito é o problema para o disco ($n = 2$, Problema (6.10)).

5.2 Função de Green para a Bola Unitária

Para construir a função de Green da bola unitária $\mathbf{B}$, definimos o simétrico de um ponto, diferente de 0, em relação à esfera unitária $\partial\mathbf{B} \equiv S^{n-1}$, como segue.

Definição 5.5. Dado $x \in \mathbb{R}_n \diagdown \{0\}$, o ponto

$$\tilde{x} \equiv \frac{x}{\|x\|^2}$$

é chamado o *ponto simétrico* de x com respeito à S^{n-1}. A aplicação $x \mapsto \tilde{x}$ é a *inversão completa em relação* a S^{n-1}.

Usaremos a aplicação inversão em relação à S^{n-1} para construir a função de Green da bola unitária.

Fixemos $x \in \mathbf{B}$. Lembremos que para a construção da função de Green devemos obter a função correção $H_x(y) = H(x, y)$ solução do problema

$$\begin{cases} \Delta H_x = 0 \quad \text{em } \mathbf{B} \\ H_x(y) = F(x-y) \quad \text{em } \partial\mathbf{B}\,, \end{cases}$$

e assim a função de Green será

$$G(x,y) = F(y-x) - H(x,y)\,.$$

Naturalmente a ideia é “inverter a singularidade"de $x \in \mathbf{B}$ para $\tilde{x} \notin \mathbf{B}$.

Assuma por um momento $n \geq 3$. Daí a aplicação $y \mapsto F(y - \tilde{x})$ é harmônica para $y \neq \tilde{x}$ e portanto $y \mapsto \|x\|^{2-n} F(y - \tilde{x}),\ x \neq 0$ é harmônica para $y \neq \tilde{x}$. Assim

$$H_x(y) = F(\|x\|(y - \tilde{x}))$$

é harmônica em $\mathbf{B}$ se $x \neq 0$. Além disso, se $y \in \partial\mathbf{B}$ e $x \neq 0$ então

$$\begin{aligned} \|x\|^2\|y-\tilde{x}\|^2 &= \|x\|^2 \left| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right|^2 = \|x\|^2 \left(y - \frac{x}{\|x\|^2} \right) \cdot \left(y - \frac{x}{\|x\|^2} \right) \\ &= \|x\|^2 \left(\|y\|^2 - \frac{2y \cdot x}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2} \right) = (\|x\|^2 - 2y \cdot x + 1) \\ &= \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Assim $(\|x\|\|y-\tilde{x}\|)^{-(n-2)} = \|x-y\|^{-(n-2)}$, $y \in \partial\mathbf{B}$. Portanto

$$H_x(y) = F(y-x) \ , \quad y \in \partial\mathbf{B} \, .$$

O mesmo argumento se aplica naturalmente ao caso $n=2$ (exercício para o leitor).

Agora estamos prontos para definir a função de Green para o caso $n \geq 2$.

Definição 5.6 (Função de Green para a Bola Unitária)**.** A *função de Green* para a bola unitária é

$$G(x,y) = F(y-x) - F(\|x\|(y-\tilde{x})) \ , \quad (x, y \in \mathbf{B}\diagdown\{0\}, \ x \neq y) \, . \tag{5.19}$$

Suponhamos que u seja solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbf{B} \\ u = g & \text{em } \partial\mathbf{B} \, . \end{cases} \tag{5.20}$$

Então segue de (5.6) que

$$u(x) = -\int_{\partial\mathbf{B}} g(y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y) \, dS(y) \, . \tag{5.21}$$

Vamos determinar $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y)$.

De (5.19) temos

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y_i}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_i} F(\|x\|(y-\tilde{x})) \, .$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_i}(y-x) &= \frac{-1}{\omega_n} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^n} \\
\frac{\partial}{\partial y_i} F(\|x\|(y-\tilde{x})) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial z_j}(\|x\|(y-\tilde{x})) \right] \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\|x\| \left(y_j - \frac{x_j}{\|x\|^2} \right) \right) \right] \\
&= \|x\| \frac{\partial F}{\partial z_i} F(\|x\|(y-\tilde{x})) = \|x\| \frac{-1}{\omega_n} \frac{\|x\| y_i - \dfrac{x_i}{\|x\|}}{\|x\|^n \left\| y - \dfrac{x}{\|x\|^2} \right\|^n} \\
&= -\frac{\|x\|^2 y_i - x_i}{\omega_n \|y-x\|^n} \, .
\end{aligned}$$

Poranto, como $\mathbf{n} = y$ segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{\omega_n} \frac{1}{\|y-x\|^n} \sum_{i=1}^{n} y_i \left[(y_i - x_i) - y_i\|x\|^2 + x_i \right] \\
&= \frac{-1}{\omega_n} \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|y-x\|^n} = \frac{-1}{\omega_n} \frac{1 - \|x\|^2}{\|y-x\|^n} \, .
\end{aligned}$$

Portanto (5.21) fica

$$u(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\omega_n} \int_{\partial\mathbf{B}} \frac{g(y)}{\|y-x\|^n} \, dS(y) \, . \tag{5.22}$$

Observação 5.7 (Bola Arbitrária)**.** Para o caso da bola $\mathbf{B}_r$ de centro na origem e raio $r > 0$, o problema (5.20) fica

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad \mathbf{B}_r \\ u = g & \text{em} \quad \partial\mathbf{B}_r \,. \end{cases} \tag{5.23}$$

Daí $\tilde{u}(x) = u(rx)$ é solução de (5.20) com $\tilde{g}(x) = g(rx)$ em vez de $g(x)$.
Com efeito, se u é solução de (5.23), então

$$\begin{array}{l} \Delta_x \tilde{u}(x) = r^2[\Delta u](rx) = 0 \\ \tilde{u}(y) = u(ry) = 0 \,, \quad \text{pois} \;\; ry \in \partial\mathbf{B}_r \;\Leftrightarrow\; y \in \partial\mathbf{B} \,. \end{array}$$

Assim de (5.22) temos

$$\tilde{u}(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\omega_n} \int_{\partial\mathbf{B}} \frac{\tilde{g}(y)}{\|y - x\|^n} \, dS(y) \;, \quad x \in \mathbf{B} \,.$$

Passando para u e g temos para $z = rx \in \mathbf{B}_r$,

$$\begin{aligned} u(z) &= \tilde{u}(x) = \frac{1 - \dfrac{\|z\|^2}{r^2}}{\omega_n} \int_{\partial\mathbf{B}} \frac{g(ry)}{\|y - x\|^n} \, dS(y) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{r^2 - \|z\|^2}{\omega_n r^2} \int_{\partial\mathbf{B}_r} \frac{g(y')}{\left\| \dfrac{y'}{r} - \dfrac{z}{r} \right\|^n} \frac{dS(y')}{r^{n-1}} \\ &= \frac{r^2 - \|z\|^2}{\omega_n r} \int_{\partial\mathbf{B}_r} \frac{g(y')}{\|y' - z\|^n} dS(y') \,. \end{aligned}$$

$(*)$: mudança de variável $y' = ry \;\Rightarrow\; dS(y) = \dfrac{dS(y')}{r^{n-1}}$, $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}_r$.
Escrevendo nas variáveis x e y, como de hábito, temos que se u é solução de (5.23) então

$$u(x) = \frac{r^2 - \|x\|^2}{\omega_n r} \int_{\partial\mathbf{B}_r} \frac{g(y)}{\|y - x\|^n} \, dS(y) \;, \quad x \in \mathbf{B}_r \,. \tag{5.24}$$

Note que (5.22) é o caso particular $r = 1$ de (5.24).

A função

$$K(x, y) = \frac{r^2 - \|x\|^2}{\omega_n r} \frac{1}{\|y - x\|^n} \quad (x \in \mathbf{B}_r, \; y \in \partial\mathbf{B}_r)$$

é chamada *núcleo de Poisson* da bola $\mathbf{B}_r$.

Note que afirmamos que se u é solução de (5.23) então u é dado por (5.24), isto é, não temos a existência da solução, ainda. Entretanto o teorema principal desta seção nos dará a existência, o que será obtido simplesmente verificando diretamente que u dada por (5.24) é solução de (5.23). Antes temos uma proposição importante.

Proposição 5.8. *Para cada $x \in \mathbf{B}_r$ tem-se*

$$\int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y)\,dy = 1\,. \tag{5.25}$$

Prova. Consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} w \in C^2(\overline{\mathbf{B}_r}) & \\ \Delta w = 0 & \text{em} \quad \mathbf{B}_r \\ w = 1 & \text{em} \quad \partial \mathbf{B}_r \end{cases}$$

Facilmente temos que $w = 1$ é a única solução do problema acima, e daí segue de (5.7) que

$$1 = w(x) = \int_{\partial \mathbf{B}_r} w \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y)\,dy = \int_{\partial \mathbf{B}_r} 1 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y)\,dy = \int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y)\,dy\,.$$

□

Observação 5.9. A proposição acima nos fornece uma grande aplicação no cálculo de integrais, mais especificamente, devido à forma de $K(x,y)$, segue que

$$\int_{\partial \mathbf{B}_r} \frac{dy}{\|y-x\|^n} = \frac{r\omega_n}{r^2 - \|x\|^2}\,, \quad \forall x \in \mathbf{B}_r\,.$$

Para o caso $n = 2$, $x = (\|x\| \cos\theta_0, \|x\| \operatorname{sen}\theta_0)$, $y = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, a integral acima fica

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 + \|x\|^2 - 2r\|x\| \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{2\pi r^2}{r^2 - \|x\|^2}\,.$$ [1]

Agora vamos à existência de solução. Antes observamos que a condição de fronteira será expressa por

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbf{B}_r}} u(x) = g(x_0)\,, \quad \text{para cada } x_0 \in \partial \mathbf{B}_r\,.$$

Teorema 5.10 (Fórmula de Poisson para a Bola)**.** *Seja $g \in C(\partial \mathbf{B}_r)$ e defina u por* (5.24)*. Então*

(i) $u \in C^\infty(\mathbf{B}_r)$

(ii) $\Delta u = 0$ *em* $\mathbf{B}_r$

(iii) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbf{B}_r}} u(x) = g(x_0)$, *para cada* $x_0 \in \partial \mathbf{B}_r$.

[1] Esta integral é obviamente resolvível em um curso de Cálculo de uma variável real.

Prova. (i) Como $K(x,y) = \dfrac{r^2 - \|x\|^2}{r\omega_n \|y-x\|^n}$, segue que a aplicação $x \longmapsto K(x,y)$ é $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$, e portanto

$$u(x) = \int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y) g(y)\, dy \in C^\infty(\mathbf{B}_r)\,.$$

(ii) Para cada $x \in \mathbf{B}_r$, a aplicação $y \mapsto G(x,y)$ é harmônica em $\mathbf{B}_r \setminus \{x\}$. Como $G(x,y) = G(y,x)$, pelo Teorema 5.3, então também a aplicação $x \mapsto G(x,y)$ é harmônica em $\mathbf{B}_r \setminus \{y\}$, e portanto a aplicação

$$x \longmapsto \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = K(x,y)$$

é harmônica em $\mathbf{B}_r$ para $y \in \partial \mathbf{B}_r$. Como $\Delta_x K(x,y) = 0$, então facilmente temos

$$\Delta u(x) = \int_{\partial \mathbf{B}_r} \Delta_x K(x,y) g(y)\, dy = 0\,.$$

(iii) Fixemos $x_0 \in \partial \mathbf{B}_r$. Como $g \in C(\partial \mathbf{B}_r)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon\,, \quad \forall \;\; \|y - x_0\| < \delta,\; y \in \partial \mathbf{B}_r\,. \tag{5.26}$$

Daí se $\|x - x_0\| < \dfrac{\delta}{2}$, $x \in \mathbf{B}_r$, então

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &\overset{(5.25)}{\leq} \left| \int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y) g(y)\, dy - \int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y)\, dy\, g(x_0) \right| \\ &\leq \int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y) |g(y) - g(x_0)|\, dy \\ &= \int_{\partial \mathbf{B}_r \cap B(x_0;\delta)} K(x,y) |g(y) - g(x_0)|\, dy \\ &\quad + \int_{\partial \mathbf{B}_r \setminus B(x_0;\delta)} K(x,y) |g(y) - g(x_0)|\, dy = I + J. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Vamos trabalhar cada uma das parcelas acima:

$$I \overset{(5.26)}{\leq} \varepsilon \int_{\partial \mathbf{B}_r \cap B(x_0;\delta)} K(x,y)\, dy \leq \varepsilon \int_{\partial \mathbf{B}_r} K(x,y)\, dy \overset{(5.25)}{=} \varepsilon\,. \tag{5.28}$$

Para J, temos $\|x - x_0\| < \dfrac{\delta}{2}$ e $\|y - x_0\| \geq \delta$, então

$$\begin{aligned} &\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < \|y - x\| + \frac{\delta}{2} \leq \|y - x\| + \frac{\|y - x_0\|}{2} \\ &\Longrightarrow \;\; \|y - x\| > \frac{1}{2}\|y - x_0\|\,. \end{aligned}$$

Daí, como g é limitada,

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{\mathcal{B}} \int_{\partial \mathbf{B}_r \smallsetminus B(x_0;\delta)} K(x,y)\, dy \\ &= 2\|g\|_{\mathcal{B}} \frac{r^2 - \|x\|^2}{r\omega_n} \int_{\partial \mathbf{B}_r \smallsetminus B(x_0;\delta)} \frac{dy}{\|x-y\|^n} \\ &\leq \frac{2^{n+1}(r^2 - \|x\|^2)\|g\|_{\mathcal{B}}}{r\omega_n} \int_{\partial \mathbf{B}_r \smallsetminus B(x_0;\delta)} \frac{dy}{\|y-x_0\|^n} \quad \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0\,, \end{aligned} \tag{5.29}$$

onde a convergência acima deve-se a limitação da última integral. Assim, de (5.28), (5.29) e (5.27) temos

$$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon\ , \quad \text{desde que } \|x - x_0\| \ll 1\,.$$

Com isto provamos (iii) e findamos a prova do teorema.

$\square$

5.3 Função de Green para o Semiplano

Nesta seção, seguido o rito estabelecido na Observação 5.4.2, resolveremos um problema do tipo (5.1) para o semiespaço

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\} .$$

Para esse fim obteremos a função de Green para o semiespaço. Vale lembrar que a fórmula (5.5) foi obtida para U limitada. Portanto, devemos obter a função de Green para $\mathbb{R}^n_+$ seguindo as ideias usadas para domínios limitados, e depois provar a validade da fórmula (5.5) para $\mathbb{R}^n_+$ no lugar de U.

Vamos definir a função de Green para o semiespaço observando a simetria do semiespaço.

Definição 5.11. Dado $x \in \mathbb{R}^n_+$, seu *simétrico* em relação à $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ é o ponto

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) .$$

Tomamos a função correção, como anteriormente,

$$H_x(y) = F(y - \tilde{x}) = F(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) , \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+$$

(a ideia foi construir a função correção a partir de F, pela reflexão da singularidade de $x \in \mathbb{R}^n_+$ para $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n_-$.)

Note que

$$H_x(y) = F(y - \tilde{x}) = F(y - x) , \quad \text{se } x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \quad (x = \tilde{x},\ x \in \mathbb{R}^{n-1}) .$$

Assim

$$\Delta_y H_x(y) = \Delta_y F(y - \tilde{x}) = 0 , \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n_+ .$$

Daí H_x é solução do Problema (5.3) para o semiespaço $\mathbb{R}^n_+$.

Definição 5.12 (Função de Green para o Semiespaço)**.** A *função de Green* para o semiespaço é

$$G(x, y) = F(y - x) - H_x(y) , \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+,\ x \neq y .$$

Observação 5.13. Alguns autores (veja [11]) definem a função acima com sinal contrário, isto é, $G = H - F$. A diferença reside no objetivo: como definimos acima tem sentido físico, ao passo que como em [11] tem objetivo de simplificar os cálculos, uma vez que suprimi o sinal negativo ficando com equação $\Delta u = f$ ao invés de $-\Delta u = f$.

Agora vamos mostrar a validade da fórmula (5.5).

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y_n}(y - x) - \frac{\partial F}{\partial y_n}(y - \tilde{x}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y_n}(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) - \frac{\partial F}{\partial y_n}(y_1 - x_1, \ldots, y_n + x_n) . \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente os casos para n:

$\underline{n=2}$:

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\ln\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}-\frac{\partial}{\partial y_2}\ln\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y_2-x_2}{\|y-x\|^2}-\frac{y_2+x_2}{\|y-\tilde{x}\|^2}\right).$$

$\underline{n\geq 3}$:

$$\frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\left[(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2\right]^{-\frac{n-2}{2}}-\right.$$
$$\left.\left[(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n+x_n)^2\right]^{-\frac{n-2}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\left[-\frac{n-2}{2}\|y-x\|^{-n}2(y_n-x_n)+\frac{n-2}{2}\|y-\tilde{x}\|^{-n}2(y_n+x_n)\right]$$
$$=\frac{-1}{\omega_n}\left(\frac{y_n-x_n}{\|y-x\|^n}-\frac{y_n+x_n}{\|y-\tilde{x}\|^n}\right)$$

Assim, para $n\geq 2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) &= \begin{cases}\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{y_2-x_2}{\|y-x\|^2}-\frac{y_2+x_2}{\|y-\tilde{x}\|^2}\right) & , \quad n=2\\ \frac{-1}{\omega_n}\left(\frac{y_n-x_n}{\|y-x\|^n}-\frac{y_n+x_n}{\|y-\tilde{x}\|^n}\right) & , \quad n\geq 3\end{cases}\\ &= \frac{-1}{\omega_n}\left(\frac{y_n-x_n}{\|y-x\|^n}-\frac{y_n+x_n}{\|y-\tilde{x}\|^n}\right).\end{aligned}$$

Daí, se $y\in\partial\mathbb{R}^n_+$ $(y_n=0)$ então $\mathbf{n}=-\mathbf{e}_n$ e temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y) &= \nabla_y G\cdot\mathbf{n}=-\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{y_n-x_n}{\|y-x\|^n}-\frac{y_n+x_n}{\|y-\tilde{x}\|^n}\right)\\ &\overset{y_n=0}{=} -\frac{2x_n}{\omega_n\|y-x\|^n}.\end{aligned}$$

Suponha agora que u seja solução do problema

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n_+\\ u=g & \text{em} \quad \partial\mathbb{R}^n_+\,.\end{cases} \tag{5.30}$$

Em conformidade com (5.6) esperamos que u tenha a representação

$$u(x)=\frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{\|x-y\|^n}dy\,. \quad (x\in\mathbb{R}^n_+) \tag{5.31}$$

Definição 5.14. A função

$$K(x,y)=\frac{2x_n}{\omega_n}\frac{1}{\|x-y\|^n}\ ,\quad x\in\mathbb{R}^n_+\,,\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+$$

é chamado *núcleo de Poisson* para $\mathbb{R}^n_+$ e (5.31) é a *fórmula de Poisson*.

Nosso propósito é mostrar que (5.31) é de fato solução de (5.30). Isto será feito por etapas.

Proposição 5.15. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$ tem-se*

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy = 1\,. \tag{5.32}$$

Prova. Denotemos $z = (z', z_n) \in \mathbb{R}^n$. Ainda, para $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ temos $y = (y_x, \ldots, y_{n-1}, 0) \equiv y'$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy &= \frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dy}{\|x-y\|^n} \\
&= \frac{2x_n}{\omega_n}\int_0^\infty\int_{\partial B(x';r)} \frac{dSdr}{(\|x'-y'\|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{2x_n}{\omega_n}\int_0^\infty\int_{\partial B(x';r)} \frac{dSdr}{(r^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(r^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}dr\,.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Vamos proceder separadamente para $n = 2$ e $n \geq 3$.

$\underline{n = 2}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dr}{(r^2 + x_2^2)} &= \frac{1}{x_2^2}\int_0^\infty \frac{dr}{\left(\frac{r}{x_2}\right)^2 + 1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{x_2^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{x_2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2x_2}\,.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$(*)$: usamos a mudança de variável $t = \dfrac{r}{x_n}$.

Agora para $n = 2$ temos $\omega_n = 2\pi,\ \omega_{n-1} = 2$, daí

$$\frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{4x_2}{2\pi} = \frac{2x_2}{\pi}\,. \tag{5.35}$$

Portanto, de (5.33) $-$ (5.35) segue (5.32) para $n = 2$.

$\underline{n \geq 3}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(r^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}dr &\overset{(*)}{=} x_n^{n-1}\int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{(t^2+1)^{\frac{n}{2}}} \overset{(**)}{=} x_n^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{n-2}\theta\sec^2\theta}{\sec^n\theta}d\theta \\
&= x_n^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}\right)^{n-2}d\theta = x_n^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2}\theta\,d\theta\,.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$(**)$: usamos a mudança de variável $t = \operatorname{tg}\theta$.

Agora, vimos no curso básico de Cálculo que

$$n \text{ par}:\quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}\theta\,d\theta = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)}\frac{\pi}{2} \tag{5.37}$$

$$n \text{ impar}:\quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}\theta\,d\theta = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-3)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)} \tag{5.38}$$

Assim, substituindo (5.37) ou (5.38), conforme o caso par ou impar, em (5.36) e depois em (5.33) obtemos (5.32) para $n \geq 3$.

□

Agora vamos ao nosso propósito, mencionado acima. Avisamos ao leitor que devido ao curto tempo de preparação destas notas vamos ser repetitivos na demonstração do teorema a seguir, no que tange aos mesmos argumentos empregados no teorema correlato para a bola. Também aqui, analogamente ao caso da bola, a condição de fronteira será expressa por

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0)\,, \quad \text{para cada } x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+\,.$$

Teorema 5.16 (Fórmula de Poisson para o Semiespaço)**.** *Seja* $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *e defina* u *por* (5.31)*. Então*

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_+)$

(ii) $\Delta u = 0$ *em* $\mathbb{R}^n_+$

(iii) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0)$*, para cada* $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

Prova. (i) $\underline{u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_+)}$: segue de (5.32) que

$$|u(x)| \leq \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |K(x,y)||g(y)|\,dy \leq \|g\|_{\mathcal{B}(\partial\mathbb{R}^n_+)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy = \|g\|_{\mathcal{B}(\partial\mathbb{R}^n_+)} < \infty\,.$$

$\underline{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)}$: A aplicação $x \mapsto K(x,y),\ x \neq y$ é C^∞, daí é fácil verificar (fica como exercício para o leitor) que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Assim completamos a prova do item (i).

(ii) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $y \mapsto G(x,y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Como $G(x,y) = G(y,x)$ (isto segue da forma de G e não do Teorema 5.3, uma vez que $\mathbb{R}^n_+$ é ilimitado) então também a aplicação $x \mapsto G(x,y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Assim a aplicação

$$x \longmapsto \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = K(x,y)$$

é harmônica em $\mathbb{R}^n_+$ para $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Como $\Delta_x K(x,y) = 0$, então facilmente temos

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_x K(x,y) g(y)\,dy = 0\,.$$

(iii) Fixemos $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Como $g \in C(\partial\mathbb{R}^n_+)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon\,, \quad \forall\ \|y - x_0\|^{2} < \delta,\ y \in \partial\mathbb{R}^n_+\,. \tag{5.39}$$

[2]Conforme a definição de continuidade (veja [16]), esta norma é do $\mathbb{R}^n$, contudo pelo fato de $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$, fatalmente ela reduz-se à norma de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Daí se $\|x - x_0\| < \dfrac{\delta}{2}$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, então

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &\overset{(5.32)}{=} \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)g(y)\,dy - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy\, g(x_0) \right| \\ &\leq \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy \\ &= \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B(x_0;\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x_0;\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy = I + J\,. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Vamos trabalhar cada uma das parcelas acima:

$$I \overset{(5.39)}{\leq} \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B(x_0;\delta)} K(x,y)\,dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x,y)\,dy \overset{(5.32)}{=} \varepsilon\,. \tag{5.41}$$

Para J, temos $\|x - x_0\| < \dfrac{\delta}{2}$ e $\|y - x_0\| \geq \delta$, então

$$\begin{aligned} &\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < \|y - x\| + \frac{\delta}{2} \leq \|y - x\| + \frac{\|y - x_0\|}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \|y - x\| > \frac{1}{2}\|y - x_0\|\,. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{\mathcal{B}(\partial\mathbb{R}^n_+)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x_0;\delta)} K(x,y)\,dy = 2\|g\|_{\mathcal{B}} \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(x_0;\delta)} \frac{dy}{\|x - y\|^n} \\ &\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{\mathcal{B}} x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(x_0;\delta)} \frac{dy}{\|y - x_0\|^n} \overset{x_n \to 0^+}{\longrightarrow} 0\,, \end{aligned} \tag{5.42}$$

onde a convergência acima deve-se a limitação da última integral. Assim, de (5.41), (5.42) e (5.40) temos

$$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon\,, \quad \text{desde que } \|x - x_0\| \ll 1\,.$$

Com isto provamos (iii) e findamos a prova do teorema.

□

5.4 Observações

Algumas observações são necessárias:

1. A fórmula (5.24) poderia ser obtida direta, por uma construção da função de Green para a bola $\mathbf{B}_r$, em vez de $\mathbf{B}$ como fizemos. As mudanças na construção seriam elementares, como ilustramos a seguir.
   Dado $x \in \mathbf{B}_r \setminus \{0\}$, o seu simétrico em relação à $\partial \mathbf{B}_r$ é definido por duas propriedades:

   (a) ele está sobre a reta que passa pela origem e pelo ponto x;

   (b) sua distância da origem é "inversa em relação à $\partial \mathbf{B}_r$", isto é, $\|x\| \|\tilde{x}\| = r^2$.

   Disto temos
   $$\tilde{x} = \frac{r^2 x}{\|x\|^2}\,.$$
   Note que no caso $r = 1$ temos o simétrico como definimos.
   Procedendo como no caso da bola unitária obtemos a função de Green para a bola $\mathbf{B}_r$
   $$G(x,y) = F(y-x) - F\left(\frac{\|x\|}{r}(y-\tilde{x})\right) \quad , \quad x, y \in \mathbf{B}_r \setminus \{0\}, \quad x \neq y\,. \tag{5.43}$$

2. Nas fórmulas da função de Green para a bola de raio r, retiramos a origem. Entretanto podemos colocar a origem e assim (5.19) e (5.43) são válidas para $x, y \in \mathbf{B}_r, \quad x \neq y$, onde naturalmente o único sentido de $F\left(\|x\|(y-\tilde{x})\right)$ em $x = 0$ é como
   $$\lim_{x \to 0} F\left(\|x\|(y-\tilde{x})\right)\,.$$

3. Vamos determinar o limite acima para $r = 1$, deixando o caso geral $r > 0$ como exercício para o leitor:
   $n \geq 2$:
   $F\left(\|0\|(y-\tilde{0})\right) \equiv \lim_{x \to 0} F\left(\|x\|(y-\tilde{x})\right) = 0\,.$
   De fato. Temos $F\left(\|x\|(y-\tilde{x})\right) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{\|x - \|x\|^2 y\|}{\|x\|}$. Agora
   $$\begin{aligned} \ln \frac{\|x - \|x\|^2 y\|}{\|x\|} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\langle x - \|x\|^2 y, x - \|x\|^2 y\rangle}{\|x\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\|x\|^2 - 2\|x\|^2 (x \cdot y) + \|x\|^4 \|y\|^2}{\|x\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cdot y + \|x\|^2 \|y\|^2)\,. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0} F(\|x\|(y-\tilde{x})) = \frac{1}{4\pi}\lim_{x\to 0}\ln(1-2x\cdot y+\|x\|^2\|y\|^2) = 0\,.$$

Como requerido.
$n \geq 3$:
$F(\|0\|(y-\tilde{0})) \equiv \lim_{x\to 0} F(\|x\|(y-\tilde{x})) = \dfrac{1}{\omega_n}\,.$
De fato. Temos $F(\|x\|(y-\tilde{x})) = \dfrac{1}{\omega_n\|x\|^{n-2}\|y-\tilde{x}\|^{n-2}}$. Agora

$$\begin{aligned}
\|x\|\|y-\tilde{x}\| &= \|x\|\sqrt{(y-\tilde{x})\cdot(y-\tilde{x})} \\
&= \|x\|\sqrt{\left(y-\frac{x}{\|x\|^2}\right)\cdot\left(y-\frac{x}{\|x\|^2}\right)} \\
&= \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2-2\,y\cdot x+1}\,.
\end{aligned}$$

Daí $\lim_{x\to 0}\|x\|\|y-\tilde{x}\| = \lim_{x\to 0}\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2-2\,y\cdot x+1} = \sqrt{1} = 1$. E portanto

$$\lim_{x\to 0} F(\|x\|(y-\tilde{x})) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\omega_n\|x\|^{n-2}\|y-\tilde{x}\|^{n-2}} = \frac{1}{\omega_n}\,.$$

Como requerido.

4. Quando introduzimos a função de Green, estávamos olhando para um problema específico, onde o domínio era limitado; em seguida definimos a função de Green para o semiespaço, que é um domínio ilimitado; ficando assim, óbvio que a função de Green não se restringe a domínios limitados. Assim introduzimos a definição geral para uma função de Green.

   (Função de Green) A *função de Green* $G(x)$ para o operador $-\Delta$ num domínio U no ponto $x_0 \in U$ é uma função $G : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

   (i) $G \in C^2(U\diagdown\{x_0\})$;

   (ii) $\Delta G(x) = 0\,,\quad \forall\, x \in U\diagdown\{x_0\}$;

   (iii) $G\Big|_{\partial U} = 0$;

   (iv) A função $H_{x_0}(x) = G(x) - F(x-x_0)$ está definida em U e é solução do problema

$$\left\{\begin{array}{l} H_{x_0} \in C^2(U) \\ \Delta H_{x_0}(x) = 0\,,\quad \forall\, x \in U\,. \end{array}\right.$$

   Note a troca do sinal na parcela referente à $F(x-x_0)$ desta definição de G com respeito à que empregamos anteriormente.
   Notação: $G(x) \equiv G(x_0, x)$.

Capítulo 6

ESCOAMENTO DE POISEUILLE

6.1 Sistema de Navier-Stokes com Lei de Potência

O escoamento de um fluido viscoso estacionário incompressível com lei de potência em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é modelado pelo sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \operatorname{div}\left\{ |D(\mathbf{v})|^{p-2} D(\mathbf{v}) \right\} & = & \delta(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla \mathcal{P} & \text{em} \quad \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \mathbf{v} & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{6.1}$$

onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidade e $\mathcal{P}$ é a função pressão do fluido, $D(\mathbf{v})$ é o gradiente simétrico (isto é, $D_{ij}(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ para $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$) e $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{v}$ é o termo convectivo.

O escoamento é classificado segundo o valor de p

$\underline{p = 2}$: Fluidos Newtonianos (ex. água, óleo) O sistema (6.1) torna-se o Sistema de Stokes ($\delta = 0$) e Navier-Stokes ($\delta = 1$)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \nu \Delta \mathbf{v} & = & \delta(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla \mathcal{P} & \text{em} \quad \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \mathbf{v} & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,. \end{array} \right.$$

De fato, como $p = 2$ então $|D(\mathbf{v})|^{p-2} = 1$ e daí

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\{D(\mathbf{v})\} = \nabla \cdot [D(\mathbf{v})] = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{ij} = \\
&\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right)\right] = \\
&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 x_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 x_i}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_n x_i}\right)\right] = \\
&\frac{1}{2}\left(\Delta \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j} \frac{\mathbf{v}_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\Delta \mathbf{v}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_j}\right) = \\
&\frac{1}{2}\left[\Delta \mathbf{v}_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right] = \frac{1}{2}\Delta \mathbf{v}\,,
\end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Note ainda que, para descarregar as notações, nas contas acima o i representa todas as entrada, ou seja, o termo $\mathbf{u}_i$ representa o vetor cuja i-ésima entrada é $\mathbf{u}_i$ (isto é, $\mathbf{u}_i \equiv (\mathbf{u}_i)_i \equiv \mathbf{u}$); Daí a última igualdade.

Observação 6.1. a constante $\nu > 0$ é a viscosidade que substitui o termo constante $|D(\mathbf{v})|^{p-2} = 1$ e absorve a fração $1/2$ resultante nos cálculos acima. Todavia para facilitar os cálculos na resolução da equação acima, tomaremos $\nu = 1$, sem prejuizos de generalidade.

$\underline{p < 2}$: *shear-thinning* (ou plástico e pseudo-plástico, Ex. muitos polímeros e soluções).

$\underline{p > 2}$: *shear-thickening* (ou dilatante, Ex. barro e cimento).

Para o estudo do sistema (6.1) no caso $p = 2$ veja [10].

Para o caso $p \neq 2$: Se $\delta = 1$, (6.1) é dito *sistema de Navier-Stokes com Lei de Potência*; se $\delta = 0$, (6.1) é dito *sistema de Stokes com Lei de Potência*.

Maiores informações sobre o desenvolvimento do sistema (6.1) podem ser encontradas em vários papers sobre fluidos não Newtonianos, como por exemplo, Ladyzhenskaya [13, 14], Marusic-Paloka [18, 19], Ruzicka [20] e Frehse, Málek e Steinhauer em [8, 9]. O estudo deste tipo de escoamento em domínios limitados pode ser encontrado em Lions [17], Ruzicka [20] e Frehse, Málek e Steinhauer em [8, 9]. Em domínios ilimitados são poucas as referências, citamos Marusic-Paloka [18, 19] e Dias e Santos em [4].

Recordando os conceitos em Mecânica dos Fluidos, um fluido é *incompressível* quando sua densidade é constante. A equação que caracteriza a incompressibilidade do fluido é a equação (6.1_1), isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0\,.$$

Ainda, o *fluxo*, do fluido, atravessando a fronteira de um domínio $U \subset \mathbb{R}^n$, é definida por

$$\phi = \int_{\partial U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,,$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal exterior à U. Segue do Teorema da Divergência que para fluidos incompressíveis a vazão é nula. Com efeito

$$\phi = \int_{\partial U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_U \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_U 0 \, dV = 0 \,. \tag{6.2}$$

Em [10] e [18] estuda-se o sistema (6.1) (no primeiro para $p = 2$ e no segundo para $p > 2$) para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \ n = 2, 3$ de classe C^∞, do seguinte tipo

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{m} \Omega_i \,,$$

onde Ω_0 é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, enquanto Ω_i, $i = 1, \ldots, m$, em possíveis diferentes sistemas de coordenadas cartesianas, são canais infinitos retos, isto é, com seção transversal Σ_i limitada. Em símbolos, existem constantes c_i, $i = 1, \ldots, m$ tais que

$$\begin{aligned} &\Sigma_i(t) = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n; \ \|x'\| \leq c_i, \ x_n = t\} \\ &\Omega_i = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; \ \|x'\| < c_i, \ x_n > 0\} \,. \end{aligned}$$

Adotemos as seguintes notações referentes ao conjunto Ω. Para $s > r > 0$:

$$\begin{aligned} &\Omega_{ir} = \{x \in \Omega_i; |x_n| < r\} \\ &\Omega_{ir,s} = \Omega_{is} \diagdown \overline{\Omega}_{ir} \\ &\Omega_i^r = \Omega_i \diagdown \overline{\Omega}_{ir} = \{x \in \Omega_i; |x_n| > r\} \\ &\Omega_r = \Omega_0 \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{ir} \\ &\Omega_{r,s} = \Omega_s \diagdown \overline{\Omega}_r \,. \end{aligned}$$

Definimos o *fluxo através de cada seção transversal* $\Sigma_i(t)$ como

$$\phi_i(t) = \int_{\Sigma_i(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \,,$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal à $\Sigma_i(t)$ apontando na direção infinita dos canais ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_n$ no sistema de coordenadas de cada canal).

Num escoamento incompressível sem ação de forças externas temos que o fluxo em cada canal é constante e a soma dos fluxos nos canais é nula, como veremos no lema a seguir.

Lema 6.2. *Se o escoamento é incompressível e sem a ação de forças externas, isto é* $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$, *então*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \phi_i(t) = \phi_i \,, \quad \forall \, t > 0 \\ &\text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{m} \phi_i = 0 \,. \end{aligned}$$

Prova. (i) Tomando $U = \Omega_{ir,s}$, $s > r > 0$ em (6.2) e observando que $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ em $\Sigma_i(r)$ e $\mathbf{n} = \mathbf{n}$ em $\Sigma_i(s)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega_{ir,s}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS \\ &= \int_{\partial\Omega_{ir,s}\cap\partial\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_{\Sigma_i(s)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_{\Sigma_i(r)} \mathbf{v}\cdot(-\mathbf{n})\, dS = \phi_i(s) - \phi_i(r) \\ &\Rightarrow \phi_i(r) = \int_{\Sigma_i(r)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{\Sigma_i(s)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \phi_i(s)\,. \end{aligned}$$

(ii) Agora tomando $U = \Omega_r$ em (6.2) temos

$$0 = \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{\partial\Omega_r\cap\partial\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS + \sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_i} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \sum_{i=1}^{m}\phi_i\,.$$

□

Observação 6.3. Note que se Ω possuir apenas dois canais, mesmo que os raios dos canais sejam diferentes, os fluxos atravessando as seções transversais são sempre iguais em módulo e com sentidos contrários.

Nos artigos citados acima obtem-se solução para o sistema (6.1) sob a hipótese da solução convergir no “final dos canais"para a solução de (6.1) onde Ω é apenas um canal. Esta solução é chamada solução paralela e será determinada, para $p = 2$, nas próximas seções.

6.2 Soluções paralelas

Consideremos Ω um canal reto, isto é

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x = (x', x_n),\ \|x'\| < r\} = \Sigma \times \mathbb{R}\,, \tag{6.3}$$

onde $\Sigma = \mathbf{B}_r$ é a bola de raio $r > 0$ de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Definição 6.4. Soluções do sistema (6.1) do tipo $\mathbf{v}(x) = v(x')\mathbf{e}_n$, onde Ω é do tipo (6.3) e $v : \Sigma \to \mathbb{R}$, são denominadas *soluções paralelas*.

Lema 6.5. *Se* $\mathbf{u} = u(x')\varepsilon_n$ *então*

$$\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & \nabla\cdot\mathbf{u} & = & 0 \\ \text{(ii)} & \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} & = & 0\,. \end{array}$$

Prova. (i) É imediata, pois $\mathbf{u}=(0,\ldots,0,u(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ implica

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot(0,\ldots,0,u(x_1,\ldots,x_{n-1}))=\frac{\partial}{\partial x_n}u(x_1,\ldots,x_{n-1})=0.$$

(ii) Seja $\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Como

$$\mathbf{u} = (0, \ldots, 0, u(x_1, \ldots, x_{n-1})) \;\Rightarrow\; u_j(x) = \begin{cases} 0 & , \; j \neq n \\ u(x') & , \; j = n \,, \end{cases}$$

então

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_j = \begin{cases} 0 & , \; j \neq n \\ u(x') \dfrac{\partial}{\partial x_n} u(x') = 0 & , \; j = n \,. \end{cases}$$

Portanto $\mathbf{w} = 0$.

□

Pelo lema acima vimos que para determinar uma solução paralela para o sistema (6.1), é suficietne resolver o problema de valor de fronteira para a equação de Stokes com lei de potência, isto é, (6.1_1) e (6.1_3) com $\delta = 0$.

Na próxima seção resolveremos o problema acima, denominado Problema de Poiseuille, para $p = 2$. Para o caso $p > 2$ veja [18].

6.3 O Problema de Poiseuille

Nesta seção resolveremos o sistema (6.1) para $p = 2$ e Ω dado por (6.3). Sob as referidas hipóteses e a consideração final na Observação 6.1, o sistema (6.1) fica

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v} = \nabla \mathcal{P} & \text{em} \;\; \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{em} \;\; \Omega \\ \mathbf{v} = 0 & \text{em} \;\; \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{6.4}$$

Resolveremos o seguinte problema:

Problema de Poiseuille. Seja Ω dado por (6.3). Dado um número arbitrário ϕ, existe uma solução paralela $(\mathbf{v}_0, \mathcal{P}_0)$ para o sistema (6.4), com fluxo ϕ, isto é,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = \phi \,. \tag{6.5}$$

Devemos buscar uma solução da forma $\mathbf{v}_0(x) = v_0(x')\mathbf{e}_n$. Assim a equação ($6.4_1$) fica

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_0 &= (0, \ldots, 0, \Delta_x v_0(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \left(0, \ldots, 0, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i^2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_n}\right), \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_1} = \cdots = \dfrac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_{n-1}} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \,. \end{cases} \tag{6.6}$$

De (6.6_1) temos que a pressão é uma função apenas de x_n, isto é, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0(x_n)$. Agora, como o lado direito de (6.6_2) só depende de x' e o lado esquerdo apenas de x_n, temos que ambos são constantes, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial x_n} = -c = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i^2}(x') \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{P}_0 = -cx_n \\ \Delta_{x'} v_0(x') = -c\,. \end{cases}$$

Portanto, a solução $(\mathbf{v}_0, \mathcal{P}_0)$ deve satisfazer ao sistema

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0(x) = v_0(x')\mathbf{e}_n \\ \mathcal{P}_0 = -cx_n \\ \Delta_{x'} v_0(x') = -c \\ v_0 = 0 \ \text{ em } \partial\Sigma\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

Observação 6.6. Note que o fluxo ϕ da hipótese não figura no sistema (6.7). Acontece que ele está implícito na constante c, como será visto na Seção 6.6, onde será obtida uma correspondência biunívoca entre c e ϕ. Desta feita, dado $\phi \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{v}_0, \mathcal{P}_0)$ é solução de (6.4), (6.5) se, e somente se, $(\mathbf{v}_0, \mathcal{P}_0)$ é solução de (6.7).

6.4 Solução de Poiseuille para $n = 2$

Para o caso $n = 2$ temos $\Omega = (-r, r) \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -r < x < r\}$. Daí o sistema (6.7) fica

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0(x) = v_0(x)\mathbf{e}_2 \\ \mathcal{P}_0 = -cy \\ v_0''(x) = -c \\ v_0(-r) = v(r) = 0\,, \end{cases} \tag{6.8}$$

cuja solução é trivial, como vemos abaixo: De (6.8_3)

$$v_0''(x) = -c \quad \Rightarrow \quad v_0'(x) = -cx + k_1 \quad \Rightarrow \quad v_0(x) = -\frac{c}{2}x^2 + k_1 x + k_2\,;$$

agora de (6.8_4)

$$\begin{cases} v_0(-r) &= -\frac{c}{2}r^2 - k_1 r + k_2 = 0 \\ \\ v_0(r) &= -\frac{c}{2}r^2 + k_1 r + k_2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad k_1 = 0 \ \text{ e } \ k_2 = \frac{cr^2}{2}\,.$$

Com isto obtemos

$$v_0 = \frac{cr^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\,.$$

Assim provamos o seguinte teorema

Teorema 6.7. *A solução do Problema de Poiseuille para $n = 2$ é*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{P}_0(x,y) & = & -cy \\ v_0(x,y) & = & \left(0, \dfrac{cr^2}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{r^2}\right)\right). \end{array}\right. \tag{6.9}$$

Conhecida como solução de Poiseuille.

6.5 Solução de Poiseuille para $n = 3$

Para o caso $n = 3$ temos

$$\Omega = \mathbf{B}_r \times \mathbb{R} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le r\right\}.$$

A resolução do sistema (6.7) consiste na resolução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrll} \Delta v_0 & = & -c & \text{em} & \mathbf{B}_r \\ v_0 & = & 0 & \text{em} & \partial\mathbf{B}_r\,. \end{array}\right. \tag{6.10}$$

Nesta seção apresentaremos duas soluções em ordem crescente de desenvolvimento da teoria básica de EDPs: Para a primeira solução (a mais simples) usaremos apenas a noção básica de EDOs; Para a segunda aplicaremos o método das soluções radiais. Depois aplicaremos a função de Green do disco unitário junto com a solução de (6.10) para determinar o valor da integral para $x \neq 0$

$$\int_{\mathbf{B}} \ln \frac{\|x\|\|x-y\|}{\|x - \|x\|^2 y\|}\, dy\,.$$

O ponto principal desta seção é a prova do seginte teorema.

Teorema 6.8. *A solução do Problema de Poiseuille para $n = 3$ (onde escrevemos $(x_1, x_2, x_3) = (x, x_3)$ para $x = (x_1, x_2)$) é*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{P}_0(x, x_3) = -cx_3 \\ v_0(x, x_3) = \left(0, 0, \dfrac{cr^2}{4}\left(1 - \dfrac{\|x\|^2}{r^2}\right)\right) \\ c = c_p\phi\,, \quad c_p = \dfrac{8}{\pi r^4}\,. \end{array}\right.$$

Conhecida como solução de Hagen-Poiseuille.

6.5.1 Primeira Resolução (EDO)

Para a primeira resolução, devido a simplicidade da equação (6.10_1), que escrevemos na forma aberta

$$\Delta v_0 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} = -c\,,$$

da vivência do Cálculo, supomos uma solução v_0 da forma

$$v_0(x_1, x_2) = a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 + b_2 x_2^2 + b_1 x_2 + b_0\,. \tag{6.11}$$

Daí

$$\Delta v_0 = -c \quad \Rightarrow \quad 2(a_2 + b_2) = -c \quad \Rightarrow \quad a_2 + b_2 = -\frac{c}{2}\,.$$

Em seguida, usando a condição de fronteira (6.10_2), obtemos

$$\begin{cases} v_0(r,0) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0 + b_0 = 0 & (I) \\ v_0(-r,0) = a_2 r^2 - a_1 r + a_0 + b_0 = 0 & (II) \\ v_0(0,r) = b_2 r^2 + b_1 r + a_0 + b_0 = 0 & (III) \\ v_0(0,-r) = b_2 r^2 - b_1 r + a_0 + b_0 = 0 & (IV)\,. \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} (I) - (II) \;\Rightarrow\; a_1 = 0 \\ (III) - (IV) \;\Rightarrow\; b_1 = 0 \\ (I) + (II) \;\Rightarrow\; a_0 + b_0 = -a_2 r^2 \\ (III) + (IV) \;\Rightarrow\; a_0 + b_0 = -b_2 r^2\,, \end{cases}$$

e assim

$$a_2 = b_2 = -\frac{c}{4} \quad \Rightarrow \quad a_0 + b_0 = \frac{cr^2}{4}\,.$$

Portanto

$$v_0 = -\frac{c}{4}x_1^2 + \frac{cr^2}{4} - \frac{c}{4}x_2^2 = \frac{cr^2}{4}\left(1 - \frac{\|x\|^2}{r^2}\right)\,,$$

isto é,

$$v_0 = \frac{cr^2}{4}\left(1 - \frac{\|x\|^2}{r^2}\right)\,. \tag{6.12}$$

A solução (6.12) é conhecida por *solução de Hagen-Poiseuille*.

6.5.2 Segunda Resolução (Solução Radial)

O método empregado na seção anterior contou com uma “aposta"num tipo de solução para a equação (6.10_1). Felizmente a referida equação possui solução do tipo (6.11), como suposto. Todavia não é elegante resolver problemas por meio de tentativas, sem alguma fundamentação, de possíveis formas para a solução. Diante disto, nesta seção buscaremos razões pertinentes para a escolha de um dado tipo de solução (como tratado no problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco (veja [6] e [12])).

Olhando com mais cuidado para o operador Laplaciano Δ, detectamos uma propriedade fundamental que é a invariância por rotações, como veremos no lema a seguir.

Lema 6.9. *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ solução da equação de Laplace*

$$\Delta u = 0 . \tag{6.13}$$

Então $v(x) = u(\mathbf{O}x)$ também é solução de (6.13), onde $\mathbf{O}$ é uma transformação ortogonal, ou seja, uma matriz ortogonal.

Prova. Faremos a prova para o caso $n = 2$, o caso geral é análogo. Temos

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 . \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Daí, tomando a mudança de variáveis $\begin{cases} \xi = ax_1 + bx_2 \\ \eta = cx_1 + dx_2 \end{cases}$ obtemos

$$v(x_1, x_2) = u(\mathbf{O}x) = u(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) = u(\xi, \eta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1} &= u_\xi \xi_{x_1} + u_\eta \eta_{x_1} = a u_\xi + c u_\eta \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} &= a u_{\xi\xi} \xi_{x_1} + a u_{\xi\eta} \eta_{x_1} + c u_{\eta\xi} \xi_{x_1} + c u_{\eta\eta} \eta_{x_1} \\ &= a^2 u_{\xi\xi} + ac(u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi}) + c^2 u_{\eta\eta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} &= {}^2 u_{\xi\xi} + bd(u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi}) + d^2 u_{\eta\eta} ; \end{aligned}$$

donde vem

$$\begin{aligned} \Delta v &= (a^2 + b^2) u_{\xi\xi} + (ac + bd)(u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi}) + (c^2 + d^2) u_{\eta\eta} \\ &\overset{\text{(I)}}{=} u_{\xi\xi}(\xi, \eta) + u_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \Delta u \overset{(6.13)}{=} 0 . \end{aligned}$$

□

A invariância por rotação do Laplaciano e a geometria de Ω conduzem-nos a buscar solução *radial* para o problema, isto é, solução que é função apenas da distânica à origem. Em símbolos,

$$v_0(x_1, x_2) = f(t), \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} .$$

Assim temos

$$\mathbf{B} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$$
$$\frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{x_1}{t} , \quad \frac{\partial t}{\partial x_2} = \frac{x_2}{t} ; \quad t \neq 0 .$$

Com isto

$$\frac{\partial v_0}{\partial x_1} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{x_1}{t}f'(t)$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial v_0}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{t}f'(t)\right) = \frac{x_1^2}{t^2}f''(t) + \left(\frac{t^2 - x_1^2}{t^3}\right)f'(t)$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} = \frac{x_2^2}{t^2}f''(t) + \left(\frac{t^2 - x_2^2}{t^3}\right)f'(t)\,.$$

Daí para $t \neq 0$,

$$\Delta v_0 = f''(t) + \frac{1}{t}f'(t)^{1}\,.$$

E assim propomos a resolução da EDO

$$f''(t) + \frac{1}{t}f'(t) = -c\,, \quad t \neq 0\,. \tag{6.14}$$

Tomando $g(t) = f'(t)$, temos que (6.14) fica $g'(t) + \frac{1}{t}g(t) = -c$, que é uma EDO linear de primeira ordem e tem solução $g(t) = -\frac{ct}{2} + \frac{k_1}{t}$, onde k_1 é uma constante. Disto segue que $f'(t) = -\frac{ct}{2} + \frac{k_1}{t}$ e consequentemente

$$f(t) = -\frac{ct^2}{4} + k_1 \ln t + k_2\,,$$

onde k_2 é uma constante. Retornando para x obtemos

$$u(x) = -\frac{c\|x\|^2}{4} + k_1 \ln\|x\| + k_2\,, \quad x \in \mathbf{B}_r \setminus \{0\}\,. \tag{6.15}$$

Tomando $k_1 = 0$ em (6.15) eliminamos a descontinuidade em $x = 0$ e assim propomos

$$v_0 = -\frac{c\|x\|^2}{4} + k_2 \tag{6.16}$$

como solução de $\Delta v_0 = -c$, em $\mathbf{B}_r$.
Obviamente, já temos $\Delta v_0 = -c$, em $\mathbf{B}_r \setminus \{0\}$, assim devemos provar que $\Delta v_0(0) = -c$; Mas, isto é imediato de (6.16).

Por fim impomos a condição de fronteira $v_0|_{\partial \mathbf{B}_r} = 0$, donde obtemos

$$0 = -\frac{cr^2}{4} + k_2 \implies k_2 = \frac{cr^2}{4}\,.$$

[1]Rigorosamente, há diferença entre o que foi feito aqui e o que foi feito para a obtenção de (4.4); lá foi feita mudança de variáveis, enquanto aqui não. É claro que poderíamos ter aplicado, diretamente, (4.4) aqui.

Portanto

$$v_0 = \frac{cr^2}{4}\left(1 - \frac{\|x\|^2}{r^2}\right),$$

e obtemos novamente (6.12).

6.5.3 Aplicação da Solução para o Cálculo de uma Integral

Nas duas resoluções apresentadas supusemos a forma da solução, e efetuamos cálculos elementares para obter a solução (6.12). Porém poderíamos seguir a teoria de Green e então chegaríamos a uma integral de difícil resolução; como nas duas subseções anteriores obtivemos a solução, então segue da teoria que a integral complicada é igual à solução já obtida, e assim efetuamos o cálculo de uma integral complicada. Isto é o que será feito nesta seção, ou seja, obteremos a integral complicada para a qual já temos resposta.

Em nosso caso, para $r = 1$, temos (6.7) igual a (5.1) para $g = 0$, $f = -c$ e $U = \mathbf{B}$. Portanto, uma candidata a solução do nosso problema é dada por (5.6)

$$v_0(x) = -c\int_{\mathbf{B}} G(x,y)\,dy\,,$$

onde $G(x,y)$ é a função de Green para o disco dada por (5.19) e pela Observação 5.4.2. A função de Green para o disco unitário é

$$\begin{aligned} G(x,y) &= F(x-y) - F\left(\|x\|\left(y - \frac{x}{\|x\|^2}\right)\right) = F(x-y) - F\left(\frac{x - \|x\|^2 y}{\|x\|}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\|x-y\| - \ln\frac{\|x - \|x\|^2 y\|}{\|x\|}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\|x\|\|x-y\|}{\|x - \|x\|^2 y\|}\,, \end{aligned}$$

onde $x \neq 0$ e $x \neq y$, $x, y \in \mathbf{B}$; e para $x = 0$, $x \neq y$, $y \in \mathbf{B}$ temos da Observação 3 da Seção 5.4 que $G(0,y) = F(y) = \ln\|y\|$.

Para o caso de $r > 0$ arbitrário, temos $x \in \mathbf{B}_r$ e então fazemos $x = ry,\ y \in \mathbf{B}$ e tomamos $u(x) = u(ry) = v(y)$, daí facilmenmte obtemos

$$\begin{cases} \Delta_y v(y) = r^2 \Delta_x u(x) = -r^2 c \\ \\ v|_{\partial\mathbf{B}} = u|_{\partial\mathbf{B}_r} = 0\,. \end{cases}$$

Desta feita, resolvemos o problema em $\mathbf{B}$ e depois obtemos a solução para $\mathbf{B}_r$ tomando

$$u(x) = u\left(r\frac{x}{r}\right) = v\left(\frac{x}{r}\right).$$

Precisamos então obter para $x \in \mathbf{B}$

$$v(x) = r^2 c\int_{\mathbf{B}} G(x,y)\,dy = -\frac{r^2 c}{2\pi}\int_{\mathbf{B}} \ln\frac{\|x\|\|x-y\|}{\|x - \|x\|^2 y\|}dy\,,$$

ou seja, precisamos calcular a integral

$$\int_{\mathbf{B}} \ln \frac{\|x\|\|x-y\|}{\|x-\|x\|^2 y\|}\,dy\,. \tag{6.17}$$

Ora, a integral (6.17) é de difícil resolução. Todavia conhecemos a solução do problema (6.7), daí pelo teorema de unicidade de solução mais a caracterização da solução via função de Green temos de (5.6) que

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{B}} \ln \frac{\|x\|\|x-y\|}{\|x-\|x\|^2 y\|}\,dy$$

é a única solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u &= 1 \quad \text{em} \quad \mathbf{B} \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathbf{B}\,, \end{cases}$$

que já sabemos ser $\frac{1}{4}\left(1-\|x\|^2\right)$. Assim obtemos

$$\int_{\mathbf{B}} \ln \frac{\|x\|\|x-y\|}{\|x-\|x\|^2 y\|}\,dy = \frac{\pi}{2}\left(1-\|x\|^2\right)\,.$$

6.6 A Constante de Poiseuille

De início vê-se uma informação implícita na fórmula da solução do Problema de Poiseuille, que é a presença do fluxo ϕ[2]. Note que nas fórmulas da solução abaixo (omitindo os índices):

$$\begin{aligned} n=2 \quad &, \quad \mathbf{v}_0(x,y) = \left(0, \frac{cr^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\right) \\ n=3 \quad &, \quad \mathbf{v}_0(x,x_3) = \left(0,0,\frac{cr^2}{4}\left(1-\frac{\|x\|^2}{r^2}\right)\right) \end{aligned}$$

não figura explicitamente o fluxo ϕ. O que acontece é que a constante c presente nas fórmulas das soluções é função explícita de ϕ. Isto é o que propomos mostrar nesta seção, mais especificamente mostraremos que $c = c_p\phi$, onde $c_p = c_p(\Sigma, n) = c_p(r, n)$ é denominada *constante de Poiseuille*.

Proposição 6.10. *Existe uma correspondência biunívoca entre a constante c, presente nas soluções acima, e o fluxo ϕ. Mais precisamente, existe uma constante positiva $c_p = c_p(\Sigma, n)$ tal que*

$$c = c_p\phi\,. \tag{6.18}$$

[2] O fluxo ϕ não aparece na fórmula da solução

Prova. Primeiro observamos que se $\mathbf{v}_0$ satisfaz (6.7) então

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}_0|_{1,2}^2 &= \int_\Omega |\nabla_3 \mathbf{v}_0|^2 = \int_\Sigma |\nabla_2 v_0|^2 = \int_\Sigma \nabla v_0 \cdot \nabla v_0 = -\int_\Sigma (\Delta v_0)\, v_0 \\
&\overset{(6.7_3)}{=} c\int_\Sigma v_0 = c\phi,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$|\mathbf{v}_0|_{1,2}^2 = c\phi\,.$$

Assim, como $|\mathbf{v}_0|_{1,2}^2 = f(c, r, x)$, temos que realmente ϕ compõe a solução. Com isto mostramos que ϕ está implícita na solução $\mathbf{v}_0$. Resta agora a relação (6.18). Um descuido poderia nos levar, devido à equação acima, a tomar $c_p = \dfrac{|\mathbf{v}_0|_{1,2}}{\phi}$ e assim teríamos (6.18), todavia $|\mathbf{v}_0|_{1,2}$ é função de c, ao passo que c_p não o é. A solução deste empasse passa pela linearidade da equação (6.7_3):

$$\Delta_{x'} v_0 = -c \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_{x'}\psi = -1\,,$$

onde

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{r^2}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{r^2}\right) & , \quad n = 2 \\[2ex] \dfrac{r^2}{4}\left(1 - \dfrac{|x|^2}{r^2}\right) & , \quad n = 3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 = c\psi\,,$$

com ψ independente de c. Agora

$$c\phi = |v_0|_{1,2}^2 = |c\psi|_{1,2}^2 = c^2|\psi|_{1,2}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{\phi}{|\psi|_{1,2}^2}\,.$$

Portanto

$$c_p = \frac{1}{|\psi|_{1,2}^2}\,.$$

□

Para finalizar essa questão da constante de Poiseuille, vamos determiná-la para os casos $n = 2, 3$.

Proposição 6.11. *Para um canal de raio r temos as constantes de Poiseuille:*

$$c_p = \begin{cases} \dfrac{3}{r^3} & , \quad n = 2 \\[2ex] \dfrac{8}{\pi r^4} & , \quad n = 3\,. \end{cases}$$

Prova. Para $n = 2$ temos

$$
\begin{aligned}
\phi &= \int_{\Sigma} v_0 \, dx = \int_0^r \frac{cr^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) dx = \frac{cr^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{3r^2}\right)_0^r = \frac{cr^2}{2}\left(r - \frac{r}{3}\right) \\
&= \frac{r^3}{3} c = \frac{r^3}{3} c_p \phi \, .
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
c_p = \frac{3}{r^3} \, .
$$

Para $n = 3$ temos

$$
\begin{aligned}
\phi &= \int_{\Sigma} v_0 \, dx = \int_{D_r} \frac{cr^2}{4}\left(1 - \frac{|x|^2}{r^2}\right) dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(\frac{cr^2}{4} - \frac{t^2}{4}\right) t \, d\theta \, dt \\
&= \frac{\pi c}{2} \int_0^r \left(r^2 t - t^3\right) dt = \frac{\pi c}{2}\left(\frac{r^2 t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right)_0^r = \frac{\pi c}{2}\left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right) \\
&= \frac{\pi r^4}{8} c = \frac{\pi r^4}{8} c_p \phi \, .
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
c_p = \frac{8}{\pi r^4} \, .
$$

□

Para finalizar escreveremos as soluções com ϕ explícito.

$$
\mathbf{v}_0(x, x_n) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{3\phi}{2r}\left(1 - \dfrac{x^2}{r^2}\right)\right) & , \quad n = 2 \\[2ex] \left(0, 0, \dfrac{2\phi}{\pi r^2}\left(1 - \dfrac{|x|^2}{r^2}\right)\right) & , \quad n = 3 \, . \end{cases}
$$

Referências Bibliográficas

[1] APOSTOL, T. M. *Cálculo II*; Editora Reverté, Barcelona, 1988.

[2] BRICARD, R. *Cálculo Vetorial*; Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1958.

[3] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*; 2ª ed., SBM (Textos Universitários), Rio de Janeiro, 2006.

[4] DIAS, G. J., SANTOS, M. M. Steady flow for shear thickening fluids with arbitrary fluxes. *Journal of Differential Equations*, 252, 3873-3898, 2012.

[5] EVANS, L.C.. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[6] FIGUEIREDO, D. G.; *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*; 3ª ed. IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1977.

[7] FIGUEIREDO, D. G. e NEVES, A. F.; *Equações Diferenciais Aplicadas*; 2ª ed. IMPA (Coleção Matemática Universitária), Rio de Janeiro, 2005.

[8] FREHSE, J., MÁLEK, J., STEINHAUER, M. An Existence Result for fluids with shear dependent viscosity-steady flows. *Nonlinear Anal.*, 30, 3041-3049, 1997.

[9] FREHSE, J., MÁLEK, J., STEINHAUER, M. On analysis of steady flows of fluids with shear-dependent viscosity based on the Lipschitz truncation method.. *SIAM J. Math. Anal.*, **34** (5), (2003) 1064-1083.

[10] GALDI, G. P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems. Second Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[11] IÓRIO, R.Jr. & IÓRIO, V. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*; IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1988.

[12] IÓRIO, V. *EDP: Um Curso de Graduação*; IMPA (Coleção Matemática Universitária), Rio de Janeiro, 1991.

[13] LADYZHENSKAYA, O.A. New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them. *Proc. Stek. Inst. Math.*, 102, 95-118, 1967.

[14] LADYZHENSKAYA, O.A. On some modifications of the Navier-Stokes equations for large gradients of velocity. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)*, 7, 126-154 (1968)

[15] LANG, S. *Cálculo*. Vol. 2. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

[16] LIMA, E. L.; *Curso de Análise*; Vol.2, 4ª ed. IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1981.

[17] LIONS, J.L. *Quelques Méthods de Resolution des Probláemes Aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[18] MARUSIC-PALOKA, E. Steady flow of a non-Newtonian fluid in unbounded channels and pipes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **10** (2000), no. 9, 1425-1445.

[19] MARUSIC-PALOKA, E. On the Stokes Paradox for Power-Law Fluids. *ZAMM. Z.. Angew. Math. Mech.*, 81, nº 1, 31-36,2001.

[20] RUZICKA, M. A Note on Steady flow of fluids with shear dependent viscosity. *Nonlinear Anal.*, 30, 3029-3039, 1997.

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Morais Filho

SBM

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

UNIFAP - 1990

ISBN 978-85-8337-111-3

9 788583 371113 >