



IV Colóquio de Matemática
da Região Norte

TÓPICOS NA INTERSEÇÃO ENTRE A TEORIA DOS GRAFOS E ÁLGEBRA

ABEL AHBID AHMED DELGADO ORTIZ
THIAGO G. VELANGA MOREIRA



UNIFAP



SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Tópicos na interseção entre a Teoria dos Grafos e Álgebra

Tópicos na interseção entre a Teoria dos Grafos e Álgebra

Copyright © 2016 Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz e Thiago G. Velanga Moreira

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Hilário Alencar

Vice- Presidente: Paolo Piccione

Diretores: João Xavier

José Espinar

Marcela de Souza

Walcy Santos

Editor Executivo

Hilário Alencar

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Comitê Científico

Eduardo Teixeira – UFC

Giovany Malcher Figueiredo – UFPA

João Xavier Cruz Neto – UFPI

José Nazareno Vieira Gomes – UFAM

Sandra Augusta Santos – UNICAMP

Eliane Leal Vasquez – UNIFAP (Coordenadora Geral)

Marcel Lucas Picanço Nascimento – UNIFAP

Comitê Organizador Local (UNIFAP)

Eliane Leal Vasquez

Gilberlandio Jesus Dias

Guzmán Eulálio Isla Chamilco

João Socorro Pinheiro Ferreira

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Naralina Viana Soares da Silva

Sergio Barbosa de Miranda

Simone de Almeida Delphim

Capa: Pablo Diego Regino

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / email: lojavirtual@sbm.org.br

ISBN (eBook) 978-85-8337-112-0



IV Colóquio de Matemática
da Região Norte

TÓPICOS NA INTERSEÇÃO ENTRE A TEORIA DOS GRAFOS E ÁLGEBRA

**ABEL AHBID AHMED DELGADO ORTIZ
THIAGO G. VELANGA MOREIRA**

**1ª EDIÇÃO
2016
MACAPÁ**



UNIFAP



SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sumário

1	Noções de Álgebra Abstrata	1
1.1	Relações de equivalência e partições	1
1.2	Teoria dos números: pré-requisitos	5
1.3	Noções elementares da teoria dos grupos	6
1.3.1	Primeiras definições e exemplos	6
1.3.2	Resultados básicos sobre grupos	7
1.4	Subgrupos	9
1.5	Noções elementares da teoria de anéis	12
2	O grafo unitário de Cayley	15
2.1	Grafos: breve introdução	15
2.1.1	Terminologia básica	15
2.1.2	Entendendo a estrutura de um grafo	17
2.1.3	Subgrafos	21
2.2	Automorfismos de grafos	24
2.3	Grafos de Cayley	25
2.3.1	Propriedades gerais	26
2.3.2	Grafos unitários de Cayley	28
3	Introdução à Teoria dos Hipergrafos	33
3.1	Hipergrafos	33
3.2	Representações de um hipergrafo	34
3.2.1	Representação pictórica	34
3.2.2	Representação matricial	34
3.2.3	Representação bipartida de um hipergrafo	35
3.3	Exemplos de hipergrafos	37
3.3.1	Sistemas de Steiner	37
3.3.2	Espaços lineares	37
3.4	Ciclos em um hipergrafo	38
3.5	Isomorfismo de hipergrafos	39
3.6	Hipergrafos de Cayley	39

4	Sigrafos (ou grafos de arestas rotuladas com sinais)	43
4.1	Sigrafos	43
4.2	O Teorema de Estrutura	45
4.3	Sigrafos unitários de Cayley	47
4.4	Sihipergrafos	49

Prefácio

A ideia por trás desta proposta é introduzir tópicos de matemática que vêm sendo objeto de pesquisas na atualidade, porém, com pré-requisitos que não vão além de um conhecimento básico em demonstrações matemáticas formais e de alguma exposição a disciplinas em nível de graduação como, por exemplo, Aritmética Elementar e Álgebra Abstrata [18], [10], [8] e [7]. Para este fim, a Teoria dos Grafos e sua generalização, a Teoria dos Hipergrafos, prestam-se muito bem. Por um lado, tem-se que a maioria de seus tópicos são de natureza elementar e, por outro, observamos que tais tópicos têm sido frequentemente revitalizados pelos problemas decorrentes dos avanços tecnológicos, fornecendo assim novos focos de pesquisa [14].

Da interação dessas teorias com a Álgebra Abstracta e a Teoria Elementar dos Números, nasce a possibilidade de criar novos conceitos e conectar ideias conhecidas a outras novas.

Para desenvolver este minicurso no espírito explicitado acima, os autores têm escolhido artigos escritos dentro do marco da Teoria dos Grafos de Arestas Rotuladas com Sinais, ou simplesmente, Sigrafos (Signed Graphs) [22]. Um sigrafo é um grafo no qual suas arestas estão rotuladas com sinal positivo $+$ ou negativo $-$. Nós consideraremos grafos cujo conjunto de vértices é o $\mathbb{Z}_n$, o anel dos inteiros módulo n . O conjunto de arestas, bem como seus sinais, determinam-se de acordo com a propriedade que cada vértice tem enquanto elemento desse anel, [21].

1. $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$;
2. $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$;
3. $\bigcup_{x \in A} [x] = A$.

Demonstração. 1. Suponha que $[x] = [y]$, vamos mostrar que $x \sim y$. Temos que

$$\begin{aligned} x \in [x] = [y] &\Rightarrow x \in [y] \\ &\Rightarrow x \sim y. \end{aligned}$$

Suponha que $x \sim y$, vamos mostrar que $[x] = [y]$. Mostraremos que

$$[x] \subset [y] \tag{1.1}$$

e

$$[y] \subset [x]. \tag{1.2}$$

Seja $a \in [x]$, vamos mostrar que $a \in [y]$. Temos

$$a \in [x] \Rightarrow a \sim x$$

e, temos por hipótese que $x \sim y$. Como $\sim$ é uma relação de equivalência, temos que

$$a \sim y \Rightarrow a \in [y]$$

Isso mostra (1.1). Para mostrar (1.2),

$$a \in [y] \Rightarrow a \sim y$$

Como $x \sim y$, por simetria vale que $y \sim x$. Assim,

$$\begin{aligned} (a \sim y \text{ e } y \sim x) &\Rightarrow a \sim x \\ &\Rightarrow a \in [x] \end{aligned}$$

obtendo (1.2). Logo, obtemos a igualdade $[x] = [y]$, provando o primeiro item.

2. Suponha que

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset$$

e seja $a \in [x] \cap [y]$. Então,

$$\begin{aligned} a \in [x] \text{ e } a \in [y] \\ \Rightarrow [a \sim x \text{ e } a \sim y] \\ \Rightarrow [x \sim a \text{ e } a \sim y] \\ \Rightarrow x \sim y. \end{aligned}$$

Pelo item (1), segue que $[x] = [y]$.

agora a transitividade da relação. Sejam dados $x, y, z \in A$ arbitrários. Suponha que $x \sim y$ e $y \sim z$. Então, existem $B_1, B_2 \in \mathbb{P}$ tais que

$$\begin{cases} x, y \in B_1 \\ y, z \in B_2 \end{cases} \implies y \in B_1 \cap B_2.$$

Segue da condição (i) da definição **1.1.6** que $B_1 = B_2$. Pondo $B = B_1 = B_2$, obtemos que $x, z \in B$, com $B \in \mathbb{P}$. Daí, vem que $x \sim z$. Falta mostrar a igualdade

$$A/\sim = \mathbb{P}.$$

Por definição, temos que

$$A/\sim = \{[x]; x \in A\}.$$

Seja dado $C \in A/\sim$. Existe $x \in A$ tal que

$$C = [x] = \{y \in A; y \sim x\}.$$

Como $x \in A = \bigcup_{B \in \mathbb{P}} B$, existe $B = B_x \in \mathbb{P}$ tal que $x \in B_x$. Afirmamos que $C = B_x \in \mathbb{P}$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in B_x &\Rightarrow y, x \in B_x, \text{ com } B_x \in \mathbb{P} \\ &\Rightarrow y \sim x \\ &\Rightarrow y \in [x] = C. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} y \in C = [x] &\Rightarrow y \sim x \\ &\Rightarrow \exists B' \in \mathbb{P}; y, x \in B'. \end{aligned}$$

Como $x \in B_x$, segue que $B_x \cap B' \neq \emptyset$, com $B_x, B' \in \mathbb{P}$. Então, segue da condição (i) da definição **1.1.6** que $y \in B' = B_x$, donde vem que $C = B_x \in \mathbb{P}$. Reciprocamente, seja $C \in \mathbb{P}$. Existe $x \in C$, para algum $x \in A$ (pois C é subconjunto não vazio de A). Mostraremos que $C = [x] \in A/\sim$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in C &\Rightarrow y, x \in C, \text{ com } C \in \mathbb{P} \\ &\Rightarrow y \sim x \\ &\Rightarrow y \in [x]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} y \in [x] &\Rightarrow y \sim x \\ &\Rightarrow \exists B \in \mathbb{P}; y, x \in B. \end{aligned}$$

Como $x \in C$, segue que $x \in B \cap C$ onde $B, C \in \mathbb{P}$. Novamente pela condição (i) da definição **1.1.6**, $y \in B = C$, mostrando que $C = [x] \in A/\sim$. Portanto, concluímos que

$$A/\sim = \mathbb{P}.$$

Prova da Unicidade: Suponhamos que existem duas relações de equivalência $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sobre A tais que

$$A/\mathcal{R}_1 = \mathbb{P} = A/\mathcal{R}_2.$$

Mostraremos que

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2.$$

Basta mostrar que

$$y\mathcal{R}_1x \Leftrightarrow y\mathcal{R}_2x,$$

para todos $x, y \in A$. De fato, sejam dados $x, y \in A$ quaisquer e, ponha

$$E_1 = \{z \in A; z\mathcal{R}_1x\} \text{ e } E_2 = \{z \in A; z\mathcal{R}_2x\}.$$

Então, $E_1 \in A/\mathcal{R}_1$ e $E_2 \in A/\mathcal{R}_2$. Segue da hipótese que $E_1, E_2 \in \mathbb{P}$ e, como $x \in E_1 \cap E_2$, segue que $E_1 = E_2$. Assim,

$$\begin{aligned} y\mathcal{R}_1x &\Leftrightarrow y \in E_1 = E_2 \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}_2x \end{aligned}$$

para todos $x, y \in A$. Concluimos que

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2.$$

☐

Podemos então enunciar agora o **Teorema Fundamental das Classes de Equivalência**

Teorema 1.1.8. *Seja A um conjunto não vazio.*

(1) Se $\sim$ define uma relação de equivalência sobre A então o conjunto quociente

$$A/\sim := \{[x]; x \in A\}$$

das classes de equivalência de $\sim$ forma uma partição de A .

(2) Se $\mathbb{P}$ é uma partição de A então, existe uma única relação de equivalência $\sim$ sobre A cujas classes de equivalências são exatamente os elementos da partição $\mathbb{P}$. Isto é,

$$A/\sim = \mathbb{P}.$$

Demonstração. É consequência imediata das proposições 1.1.5 e 1.1.7.

☐

1.2 Teoria dos números: pré-requisitos

Nesta seção nos limitamos a apontar alguns fatos da teoria dos números que se farão presentes nas demonstrações das propriedades dos grafos unitários de Cayley. Seguiremos o livro de Milies e Pitta Coelho [19].

Sejam a e b inteiros ambos não nulos. Denotemos por $D(a, b)$ o conjunto de todos os divisores comuns de a e b .

Exercício 1.2.1. *Mostre que $D(a, b)$ possui um elemento máximo.*

Definição 1.2.2. O elemento máximo do conjunto $D(a, b)$ é chamado **máximo divisor comum** de a e b e denota-se por $\text{mdc}(a, b)$, ou simplesmente (a, b) . Isto é,

$$\text{mdc}(a, b) = \max D(a, b).$$

Definição 1.2.3. Dizemos que dois inteiros a e b são **relativamente primos** se

$$\text{mdc}(a, b) = 1.$$

Exercício 1.2.4. Sejam a e b inteiros. Mostre que

1. Se $a|b$ e $(b, c) = 1$, então $(a, c) = 1$;
2. $(a, c) = (b, c) = 1$ se, e somente se, $(ab, c) = 1$.

Definição 1.2.5. Para cada inteiro $n \geq 1$, indicaremos por $\phi(n)$ o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são relativamente primos com n . A função assim definida chama-se **função ϕ de Euler**.

Teorema 1.2.6. Se $n \geq 2$ é um inteiro cuja fatoração em primos é

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \text{ onde } p_1 < p_2 < \dots < p_s,$$

então,

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

1.3 Noções elementares da teoria dos grupos

1.3.1 Primeiras definições e exemplos

Definição 1.3.1. Seja $\mathfrak{g}$ um conjunto não vazio. Um **grupo** é um par ordenado $(\mathfrak{g}, *)$, onde $*$ é uma operação binária definida sobre $\mathfrak{g}$, tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tem-se $x * (y * z) = (x * y) * z$ (Associativa);
2. Existe $e \in \mathfrak{g}$ tal que $x * e = e * x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ (Identidade de $\mathfrak{g}$);
3. Para todo $x \in \mathfrak{g}$ existe $x' \in \mathfrak{g}$ tal que $x * x' = e = x' * x$ (Existência do elemento inverso).

Se o grupo $\mathfrak{g}$ verifica a propriedade comutativa:

$$x * y = y * x$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é chamado grupo **comutativo**. Um grupo possuindo um número finito de elementos é chamado **finito** e, caso contrário, **infinito**.

Exemplo 1.3.2. Seja A um conjunto não vazio e seja S_A o conjunto de todas as funções bijetoras de A em A . Temos que $(S_A, \circ)$ é um grupo, onde $\circ$ denota a composição de funções, e é denominado grupo **das permutações** do conjunto A . No caso especial em que $A = \{1, 2, \dots, n\}$, S_A é denotado por S_n .

1.3.2 Resultados básicos sobre grupos

Proposição 1.3.3. *Seja $(g, *)$ um grupo, então o elemento identidade é único.*

Exercício 1.3.4. Prove a proposição 1.3.3.

Proposição 1.3.5. *Em um grupo $(\mathfrak{g}, *)$:*

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$x * b = y * b \Rightarrow x = y.$$

Isto é, vale a lei do corte.

Demonstração.

$$a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y).$$

Pela associatividade,

$$(a' * a) * x = (a' * a) * y.$$

Finalmente, pela existência do elemento identidade,

$$x = e * x = e * y = y.$$

☐

Exercício 1.3.6. *Demonstre a segunda propriedade da Proposição 1.3.5.*

Corolário 1.3.7. *Em um grupo $(\mathfrak{g}, *)$ cada elemento tem um único inverso.*

Demonstração. Suponha que para $a \in \mathfrak{g}$,

$a * x = e_g$ e $a * y = e_g$. Então, $a * x = a * y$.

O resultado segue ao aplicar a Proposição 1.3.5.

9

Para $a \in \mathfrak{g}$ denotaremos seu inverso por a^{-1} .

Corolário 1.3.8. *Para $a \in \mathfrak{g}$, tem-se que $(a^{-1})^{-1} = a$.*

Demonstração. Segue ao aplicar a Proposição 1.3.5 (lei do corte) à seguinte equação:

$$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e = a^{-1} * a$$

☐

Corolário 1.3.9. *Para todos $a, b \in \mathfrak{g}$, tem-se que $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.*

Proposição 1.3.10. Em um grupo $(\mathfrak{g}, *)$ fixe o elemento $a \in \mathfrak{g}$ e defina a seguinte função em $\mathfrak{g}$,

$$f_a(x) = a * x, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Então, f_a é bijetora.

Demonstração. A injetividade resulta da contrapositiva da primeira propriedade da Proposição 1.3.5. Dado $z \in \mathfrak{g}$, pondo $x = (a^{-1} * z) \in \mathfrak{g}$, obtemos que

$$f_a(x) = f_a(a^{-1} * z) = a * (a^{-1} * z) = (a * a^{-1}) * z = e * z = z,$$

mostrando que f_a é bijetora. □

Exercício 1.3.11. Mostre que a conclusão da Proposição 1.3.10 é verdadeira também para f_a definida por

$$f_a(x) = x * a, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Definição 1.3.12. Seja $\mathfrak{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_d\}$ um grupo finito com $g_1 = e_{\mathfrak{g}}$. A **tabela do grupo** $\mathfrak{g}$ é a matriz de ordem $d \times d$ cuja entrada i, j é o elemento $g_i * g_j$ do grupo $\mathfrak{g}$.

Cada linha da tabela representa os valores que a função $f_a(x) = a * x$ assume. Similarmente, cada coluna representa os valores que a função $f_a(x) = x * a$ assume. Sendo f_a bijetora, cada elemento do grupo aparece em cada linha (coluna) uma única vez.

Exemplo 1.3.13. *Determine todos os grupos de três elementos.* (Adaptação de [20]). Seja a o elemento neutro. Então a primeira linha e a primeira coluna da tabela podem ser preenchidas como aparecem nas tabelas da esquerda e do centro. Agora, notemos que $b * b$ é diferente de b pois, do contrário, b apareceria duas vezes nessa linha. Assim $b * b = a$ ou $b * b = c$. Da mesma maneira $b * c$ é diferente de c e de b , logo $b * c = a$. Portanto, $b * b = c$.

Na última linha, na interseção com a penúltima coluna da tabela do meio, vemos que só falta colocar a e, na interseção da última linha com a última coluna, b . A tabela segue agora completa.

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b		
c	c		

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c		

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Exercício 1.3.14. Mostre que S_n tem $n!$ elementos.

Exercício 1.3.15. Mostre que S_n é não abeliano para $n \geq 3$.

Definição 1.3.16. *Seja $(\mathfrak{g}, *)$ um grupo. Um subconjunto B de $\mathfrak{g}$ é dito um **conjunto de geradores** para o grupo $\mathfrak{g}$ se para todo $g \in \mathfrak{g}$, existem $h_1, h_2, \dots, h_n$ elementos de B tais que $g = h_1^{a_1} * h_2^{a_2} * \dots * h_n^{a_n}$, onde $a_i \in \{1, -1\}$.*

Definição 1.3.17. Um grupo $(G, *)$ é dito cíclico, se $G = \langle h \rangle = \{h^i, i \in \mathbb{Z}\}$, for some $h \in G$, onde $h^i = \underbrace{h * h * \dots * h}_{i\text{-vezes}}$.

1.4 Subgrupos

Definição 1.4.1. *Seja $(\mathfrak{g}, *)$ um grupo e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{h}$ for um grupo com a operação $*$, dizemos que $\mathfrak{h}$ é **subgrupo** de $\mathfrak{g}$.*

Proposição 1.4.2. *Seja $(\mathfrak{g}, *)$ um grupo e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{h} \neq \emptyset$. $\mathfrak{h}$ é um subgrupo de $\mathfrak{g}$ se, e somente se,*

1. $a * b \in \mathfrak{h}$, para todos $a, b \in \mathfrak{h}$;
2. $a^{-1} \in \mathfrak{h}$, para todo $a \in \mathfrak{h}$.

Proposição 1.4.3. *Se $\mathfrak{h}$ é um subconjunto finito não vazio de um grupo $\mathfrak{g}$ e se*

$$a * b \in \mathfrak{h},$$

para todos $a, b \in \mathfrak{h}$ então, $\mathfrak{h}$ é um subgrupo de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.4.4. Para qualquer $N \leq \mathfrak{g}$ e qualquer $g \in \mathfrak{g}$ o conjunto

$$gN = \{g * n \mid n \in N\}$$

é chamado de **classe lateral à esquerda de N em $\mathfrak{g}$** e, analogamente,

$$Ng = \{n * g \mid n \in N\}$$

é chamado de *classe lateral à direita de N em $\mathfrak{g}$* .

Definição 1.4.5. *Seja H um subgrupo de $\mathfrak{g}$, o **normalizador** de H em $\mathfrak{g}$ é o conjunto*

$$N_{\mathfrak{g}}(H) = \{g \in \mathfrak{g} : gHg^{-1} = H\}.$$

Definição 1.4.6. Um subgrupo H de $\mathfrak{g}$ é **normal** em $\mathfrak{g}$, se $gHg^{-1} = H$, para todo $g \in \mathfrak{g}$. Utilizaremos a notação $H \triangleleft \mathfrak{g}$ para indicar que H é subgrupo normal de $\mathfrak{g}$.

Teorema 1.4.7. *Se A e B são subgrupos de um grupo $\mathfrak{g}$, o conjunto*

$$AB := \{ab; a \in A \text{ e } b \in B\}$$

é um subgrupo de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, $AB = BA$.

Corolário 1.4.8. Se A e B são subgrupos de $\mathfrak{g}$ e $A \leq N_{\mathfrak{g}}(B)$, então AB é um subgrupo de $\mathfrak{g}$. Em particular, se $B \trianglelefteq \mathfrak{g}$, então $AB \leq \mathfrak{g}$, para todo $A \leq \mathfrak{g}$.

Definição 1.4.9. (1) Uma aplicação ϕ de um grupo $(\mathfrak{g}_1, *)$ em um grupo $(\mathfrak{g}_2, \star)$ é dita um **homomorfismo** se,

$$\phi(a * b) = \phi(a) \star \phi(b),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$.

(2) Dois grupos $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ são ditos **isomorfos** se existe um homomorfismo bijetor de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}^*$.

(3) Se ϕ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}_1$ em $\mathfrak{g}_2$, o **núcleo** (ou kernel) de ϕ é definido por

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in \mathfrak{g}_1 : \phi(x) = e_2\},$$

onde e_2 denota o elemento neutro de $\mathfrak{g}_2$.

O seguinte conceito de **ação de grupos** foi principalmente explorado em [7].

Definição 1.4.10. Uma **ação** de um grupo $(\mathfrak{g}, *)$ sobre um conjunto A é uma aplicação de $\mathfrak{g} \times A$ em A (denotamos $g \star a$, para todo $g \in \mathfrak{g}$ e $a \in A$) que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $g_1 \star (g_2 \star a) = (g_1 * g_2) \star a$, para todos $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$, $a \in A$;

(2) $1 \star a = a$, para todo $a \in A$.

Exercício 1.4.11. Seja $(\mathfrak{g}, \cdot)$ um grupo qualquer e seja $A = \mathfrak{g}$. Mostre que a aplicação definida por $g \star a := a \cdot g^{-1}$ para todos $g, a \in \mathfrak{g}$ é uma ação (à esquerda) do grupo $\mathfrak{g}$ sobre si mesmo.

Exercício 1.4.12. Seja $(\mathfrak{g}, \cdot)$ um grupo qualquer e seja $A = \mathfrak{g}$. Mostre que se $\mathfrak{g}$ não é abeliano (isto é, não comutativo) então a aplicação definida por $g \star a := a \cdot g$ para todos $g, a \in \mathfrak{g}$ **não** é uma ação (à esquerda) do grupo $\mathfrak{g}$ sobre si mesmo.

Exercício 1.4.13. Seja $(\mathfrak{g}, *)$ um grupo e seja A um conjunto que recebe a ação $\star$ de $\mathfrak{g}$. Para cada $g \in \mathfrak{g}$ fixo se obtém uma aplicação $\sigma_g : A \rightarrow A$ definida por $\sigma_g(a) = g \star a$. Mostre que

1. Para cada $g \in \mathfrak{g}$ fixo, a aplicação σ_g é uma permutação (isto é, uma bijeção) de A ;
2. A aplicação de $\mathfrak{g}$ em S_A definida por $g \mapsto \sigma_g$ é um homomorfismo (chamado a **representação via permutações associada à ação**). Reciprocamente,
3. Dado um homomorfismo qualquer $\phi : \mathfrak{g} \mapsto S_A$, definamos $g \star a = \phi(g)(a)$. Mostre que $\star$ é uma ação do grupo $\mathfrak{g}$ sobre A .

Observação 1.4.14. Alternativamente, pelo dito nos itens (2) e (3) do Exercício 1.4.13, um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ em S_A sempre pode ser definido via uma ação de $\mathfrak{g}$ sobre A e, reciprocamente, uma ação de um grupo $\mathfrak{g}$ sobre um conjunto A sempre pode ser definida via um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ em S_A .

Exercício 1.4.15. *Seja H um grupo agindo (com ação $\star$) sobre um conjunto A . Provar que a relação $\sim$ definida sobre A por*

$$a \sim b \quad \text{se, e somente se,} \quad a = h \star b \quad \text{para algum } h \in H$$

é uma relação de equivalência.

Pelo **Teorema Fundamental das Classes de Equivalência 1.1.8**, a relação do Exercício 1.4.15 nos fornece uma partição do conjunto A . Cada elemento $[a]$ desta partição (ou, equivalentemente, classe de equivalência de a com respeito à relação $\sim$) é chamada uma **órbita** de a sob a ação de H , a qual denotaremos por $\mathcal{O}(a)$.

Definição 1.4.16. *Seja $(g, \cdot)$ um grupo agindo (com ação $\star$) sobre um conjunto A não vazio. Diz-se que a ação $\star$ é **transitiva** se A possui uma única órbita.*

Proposição 1.4.17. *Seja $(g, \cdot)$ um grupo agindo (com ação $\star$) sobre um conjunto A não vazio. A ação $\star$ é transitiva se, e somente se, dados quaisquer dois elementos $a, b \in A$ existe $g \in G$ tal que $a = g \star b$.*

Demonstração. Suponha que $\star$ é transitiva e sejam dados $a, b \in A$. Então $\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b)$ e, portanto, $a \in \mathcal{O}(b)$. Por definição, existe $g \in \mathfrak{g}$ tal que $a = g \star b$. Reciprocamente, dada uma classe $\mathcal{O}(a) \subset A$ a hipótese nos garante que $b \sim a$ para todo $b \in A$. Portanto $A = \mathcal{O}(a)$, mostrando que a ação $\star$ é transitiva. $\square$

Definição 1.4.18. *Seja $(\mathfrak{g}, \cdot)$ um grupo agindo (com ação $\star$) sobre um conjunto A e fixe um elemento $a \in A$. O **estabilizador** de a em $\mathfrak{g}$ é o conjunto*

$$\mathfrak{g}_a = \{g \in \mathfrak{g} : g \star a = a\}.$$

Isto é, $\mathfrak{g}_a$ é o conjunto dos elementos de $\mathfrak{g}$ que fixam a .

Exercício 1.4.19. Prove que $\mathfrak{g}_a$ é um subgrupo de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.4.20. Uma ação de um grupo $\mathfrak{g}$ sobre um conjunto A é dita **semirregular** se $\mathfrak{g}_a = \{e\}$, para todo $a \in A$. Ou, equivalentemente, a identidade é o único elemento de $\mathfrak{g}$ que fixa todos os pontos de A .

Definição 1.4.21. Uma ação de um grupo $\mathfrak{g}$ sobre um conjunto A é dita **regular** se ela for transitiva e semirregular.

1.5 Noções elementares da teoria de anéis

Definição 1.5.1. Um *anel* $(A, +, \cdot)$ é um conjunto não vazio A munido de duas operações binárias internas, denotadas por $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente **soma** e **multiplicação**, que verificam os seguintes axiomas:

1. $(A, +)$ é um grupo abeliano;
2. A multiplicação $\cdot$ é associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todos $a, b, c \in A$;
3. (a) Para todo $x, y, z \in A$ tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + y \cdot z$, (distributiva à esquerda);
 (b) Para todo $x, y, z \in A$ tem-se $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$, (distributiva à direita);
4. Existe um **elemento identidade** em A (denotado por 1) tal que

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{para todo } a \in A.$$

5. O anel $(A, +, \cdot)$ é dito **comutativo** se a multiplicação for comutativa.

Definição 1.5.2. Um elemento $x \in A$ chama-se **invertível** se existe um elemento $y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

É comum denotar o conjunto dos elementos invertíveis de um Anel A por A^* . O seguinte resultado será de utilidade mais adiante e deixaremos ao leitor a tarefa de sua demonstração.

Proposição 1.5.3. *A^* é um grupo multiplicativo.*

Exercício 1.5.4. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel, então para todos $a, b \in A$ vale*

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
2. $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$;
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;
4. $(-1) \cdot a = -a$;
5. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Exercício 1.5.5. Prove a proposição 1.5.3

Exemplo 1.5.6. (1) O anel dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um exemplo de anel comutativo onde 1 e -1 são seus únicos elementos invertíveis. Assim, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ é o grupo dos elementos invertíveis do anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$;

(2) Seja n um inteiro positivo fixo. Definimos

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{se, e somente se,} \quad n|(a - b).$$

Esta relação, chamada **congruência módulo n** , define uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{Z}$. Pelo Teorema Fundamental das Relações de Equivalência 1.1.8, o conjunto $\mathbb{Z}$ é particionado em n classes de equivalência. Sobre o conjunto destas classes, denotada por $\mathbb{Z}_n = \{ [0], [1], \dots, [n-1] \}$, vamos definir uma operação de soma da seguinte maneira:

$$[x] + [y] = [z],$$

onde z é o resto da divisão de $x+y$ por n . E também definimos uma operação de multiplicação de modo análogo:

$$[x] \cdot [y] = [z],$$

onde z é o resto da divisão de $x \cdot y$ por n . Deixamos como exercício mostrar que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo.

Os exercícios seguintes serão amplamente utilizados em demonstrações de vários resultados ao longo do texto. Para maiores detalhes, recomendamos [18], [10] e [8].

Exercício 1.5.7. *Sejam $a, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Então existe $b \in \mathbb{Z}$ com $ab \equiv 1 \pmod{n}$ se, e somente se, $\text{mdc}(a, n) = 1$ (Isto é, os elementos $[a]$, $0 \leq a < n$, invertíveis no anel $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ são aqueles tais que $\text{mdc}(a, n) = 1$).*

Exercício 1.5.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Seja $m \in \mathbb{N}$. Mostre que $[m]$ gera o grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$ se, e somente se, $[m]$ é um elemento invertível do anel $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.*

Exercício 1.5.9. Considere o anel $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ dos inteiros módulo n , e seja $n = p^\alpha$ uma potência de um primo p . Então, um elemento $x \in (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ é invertível se, e somente se, x não é múltiplo de p .

Demonstração. Se x é múltiplo de p , digamos $x = kp$, então, $\text{mdc}(x, n) \geq p > 1$. Pelo Exercício 1.5.7, x não é invertível em $\mathbb{Z}_n$. Reciprocamente, se x não é múltiplo de p então, a decomposição de x em fatores primos

$$x = p_1 \cdots p_m,$$

onde $m \geq 1$ é um natural e $p_1 \leq \dots \leq p_m$ são primos, deve ser tal que $p_i \neq p$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, se d é um divisor comum de x e n , então $d = 1$. Caso contrário, d teria duas decomposições distintas em fatores primos, contrariando o Teorema Fundamental da Aritmética. Novamente, pelo Exercício 1.5.7, segue que x é invertível em $\mathbb{Z}_n$. $\square$

Capítulo 2

O grafo unitário de Cayley

Neste capítulo iniciamos com as definições e propriedades básicas da Teoria dos Grafos com o intuito de apresentar o grafo unitário de Cayley sobre o anel $\mathbb{Z}_n$ dos inteiros módulo n . A terminologia e notação utilizada diferem na literatura existente e aproveitamos aqui a oportunidade para estabelecer como nossa aquela que é mais frequentemente utilizada. No decorrer deste trabalho, faremos apenas uso dos grafos simples, assim não discutiremos grafos mais gerais como aqueles que contemplam laços, arestas paralelas e orientações entre as arestas. O conteúdo deste capítulo está baseado nos seguintes livros muito conhecidos: *Graph and Digraphs* [5] e *Graph Theory* [11].

2.1 Grafos: breve introdução

2.1.1 Terminologia básica

Definição 2.1.1. Um **grafo** (simples) é um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto não vazio de objetos chamados **vértices** e E é um conjunto (possivelmente vazio) de objetos chamados **arestas**. Cada aresta (elemento de E) é um subconjunto com dois vértices de V . O conjunto de vértices de G é denotado por $V(G)$, quando quisermos explicitar o grafo com vértices. Similarmente, o conjunto de arestas denota-se $E(G)$.

Se $a = \{u, v\}$ é uma **aresta** de um grafo G , então u e v são ditos vértices **adjacentes** (ou, que u é adjacente a v) enquanto que u e a são ditos **incidentes**. Ainda mais, se a_1 e a_2 são arestas distintas de G incidentes com um vértice comum, então a_1 e a_2 são chamadas arestas adjacentes. É conveniente daqui em diante denotar uma aresta por uv ao invés de $\{u, v\}$.

A cardinalidade do conjunto de vértices de um grafo G é chamada **ordem** de G e denotada por $n(G)$ ou, mais simplesmente, por n , quando se entende de maneira clara qual é o grafo em consideração. Analogamente, a cardinalidade do conjunto de arestas de um grafo G é chamado **tamanho** de G e é denotado frequentemente por $m(G)$ (ou m , por simplicidade). Um (n, m) -**grafo** tem, portanto, ordem n e tamanho m .

É habitual definir, ou descrever, um grafo por meio de um diagrama no qual cada vértice é representado por um ponto e cada aresta $e = uv$ é representada por um segmento de linha ou curva que une os pontos correspondentes a u e v .

O **grau** de um vértice v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas de G incidentes com v . Diremos que um vértice $v \in V(G)$ é **par (ímpar)** se o número de arestas incidentes a v for par (ímpar). Um vértice de grau zero em G é chamado **isolado** e um vértice de grau um, **terminal**. O **grau mínimo** de G é o menor grau dentre todos os vértices de G e é denotado por $\delta(G)$. O **grau máximo** é definido similarmente e é denotado por $\Delta(G)$.

Figura 2.1: Representação de um grafo. As letras representam os vértices e as arestas estão representadas pelas linhas entre as letras.

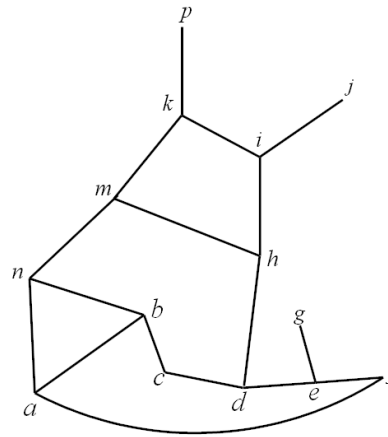
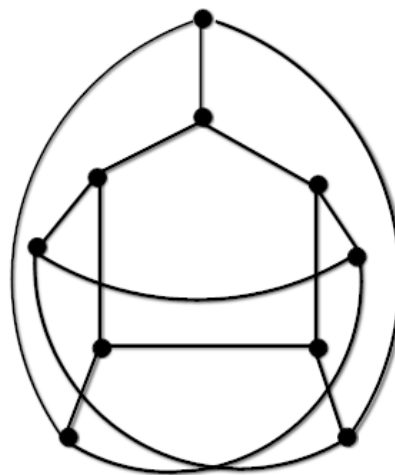


Figura 2.2: O grafo de Petersen.



Exemplo 2.1.2. Designado em homenagem ao matemático Danes Julis Petersen por **grafo de Petersen**, esta estrutura combinatória possui 10 vértices e 15 arestas, como podemos observar na figura 2.2. Este grafo aparece como contra-exemplo à diversas conjecturas importantes em diferentes temas da teoria dos grafos [2]. Um fato que ilustra a importancia desta configuração é o livro [13], inteiramente dedicado a ele .

Um grafo G com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ pode ser representado por meio de matrizes. Uma matriz $A(G) = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n é chamada **matriz de adjacência** de G de G quando

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \in E(G); \\ 0, & \text{se } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Assim, a matriz de adjacência de um grafo G é uma matriz simétrica com zeros na diagonal principal. Uma outra matriz é a matriz quadrada de ordem n chamada **matriz de incidência** $B(G) = [b_{ij}]$, onde

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } e_j \text{ são incidentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.1.2 Entendendo a estrutura de um grafo

Percurso, cadeia e caminho

Para entender a estrutura de um grafo, imaginemos primeiramente que em nosso grafo podemos tomar um percurso contínuo, primeiro caminhando através da aresta e_1 , depois pela aresta e_2 e assim por diante. Ou seja, o ponto terminal de e_i é o ponto inicial de e_{i+1} . Temos várias maneiras de realizar este percurso, por exemplo, poderíamos repetir uma aresta ou visitar duas vezes um mesmo vértice.

Definição 2.1.3. Um **percurso** (ou, **passeio**) é uma sequência alternante de vértices e arestas $x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k$ iniciando e terminando com vértices tais que $e_i = x_{i-1}x_i$, para cada $1 < i < k + 1$. O percurso será **fechado** se $x_1 = x_k$. Uma **cadeia** (ou, **trilha**) é um percurso sem repetição de arestas e, um **caminho**, é um percurso sem repetição de arestas e vértices. É comum denotar um percurso iniciando no vértice x_1 e terminando no vértice x_k por $x_1 - x_k$, ou ainda, ignorando as arestas, como $x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$. Para um caminho, utilizaremos a notação P_{x_1, x_k} .

Definição 2.1.4. Um caminho em um grafo G é dito **hamiltoniano** se passar por todos os vértices de G .

Definição 2.1.5. Um *ciclo* é uma sequência de vértices e arestas

$$x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k$$

tal que

1. $k \geq 3$;
2. $x_1 x_2 \dots x_{k-1}$ é um caminho;
3. $x_k = x_1$.

Definição 2.1.6. Uma *corda* em um ciclo é uma aresta que conecta dois vértices não consecutivos.

Definição 2.1.7. Um ciclo em um grafo G é dito **hamiltoniano** se $x_1x_2 \dots x_{k-1}$ é um caminho hamiltoniano.

Dois grafos frequentemente compartilham a mesma estrutura, diferentes somente na maneira em que seus vértice e arestas são rotulados ou pela maneira em que foram desenhados. Para fazer esta ideia mais precisa introduzimos o conceito de isomorfismo.

Isomorfismo de grafos

Definição 2.1.8. Um grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ é isomorfo a um grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ se existe uma função

$$\phi : V_1 \rightarrow V_2$$

tais que

1. ϕ é bijetora;
2. Para todos $v, w \in V_1$, $\{v, w\} \in E_1$ se, e somente se, $\{\phi(v), \phi(w)\} \in E_2$.

Nesse caso, escrevemos $G_1 \cong G_2$ e dizemos que G_1 é **isomorfo** a G_2 (ou, que G_1 e G_2 são **isomorfos**). Uma outra alternativa é dizer que existe uma bijeção ϕ de $V(G_1)$ sobre $V(G_2)$ que preserva a adjacência; isto é $vw \in E(G_1)$ se, e somente se, $\phi(v)\phi(w) \in E(G_2)$.

É fácil ver que ser "isomorfo a" é uma relação de equivalência em grafos; portanto, esta relação particiona a coleção de todos os grafos em classes de equivalência de tal maneira que dois grafos são não isomorfos se, e somente se, eles pertencem a diferentes classes de equivalência.

Como ϕ é bijetora, G_1 e G_2 têm a mesma ordem. Como vértices adjacentes de G_1 são levados a vértices adjacentes em G_2 e vértices não adjacentes de G_1 são levados a vértices não adjacentes em G_2 , os grafos G_1 e G_2 têm o mesmo tamanho. Uma vez que cada vértice v em G_1 e seu vértice imagem devem ter o mesmo grau em seus respectivos grafos, os graus de vértices de G_1 são exatamente os graus dos vértices de G_2 (contando multiplicidades). Assim, temos o seguinte teorema,

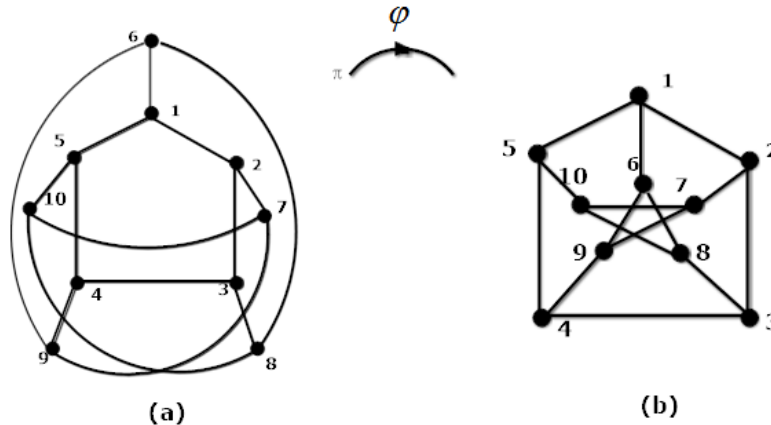
Exemplo 2.1.9. Se modificamos as linhas representando arestas da figura 2.3 obtemos a representação mais conhecida do grafo de Petersen.

Teorema 2.1.10. *Sejam G_1 e G_2 dois grafos isomorfos, então eles compartilham*

2.1. GRAFOS: BREVE INTRODUÇÃO

19

Figura 2.3: Grafos de Petersen isomorfos.



1. O mesmo número de vértices, ou seja, a mesma ordem;
2. O mesmo número de arestas, ou seja, o mesmo tamanho;
3. A mesma sequência de graus.

Apesar dessas condições serem necessárias para que G_1 e G_2 sejam isomorfos, elas não são suficientes. A seguir, um contra-exemplo ao teorema 2.1.10.

Exemplo 2.1.11. Seja $G_1 = (V_1, E_1)$ com $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $E_1 = \{ab, bc, ac, cd, de, df\}$ e, seja $G_2 = (V_2, E_2)$ com $V_2 = \{x, y, w, z, s, t\}$ e $E_2 = \{xy, xw, xz, zw, zy, st\}$. Notemos que eles têm a mesma ordem, o mesmo tamanho e compartilham a mesma sequência de graus: 2,2,3,3,1,1. No entanto, eles não são isomorfos como se observa na figura 2.4. O grafo em 2.4-(b) mostra uma aresta solta, o que não acontece em 2.4-(a).

Definição 2.1.12. Um grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ é **aresta-isomorfo** a um grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ se existe uma função

$$\phi : E_1 \rightarrow E_2$$

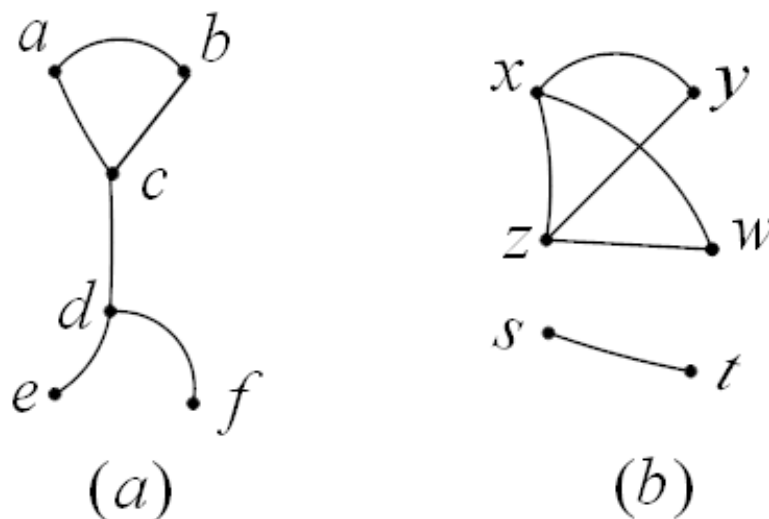
tais que

1. ϕ é bijetora;
2. Para todos $e, f \in E_1$ tem-se que $e \cap f \neq \emptyset$ se, e somente se, $\phi(e) \cap \phi(f) \neq \emptyset$.

Proposição 2.1.13. Se G_1 é isomorfo a G_2 então eles são também aresta-isomorfos.

Demonstração. Primeiro definimos $\phi_a : E_1 \rightarrow E_2$ assim: dada uma aresta $e = \{x, y\}$ ponha-se $\phi_a(e) = \{\phi(x), \phi(y)\}$. Sendo ϕ um isomorfismo, $\{\phi(x), \phi(y)\}$ é uma aresta de E_2 . Sendo G_2 um grafo simples só temos essa aresta conectando

Figura 2.4: Grafos não isomorfos.



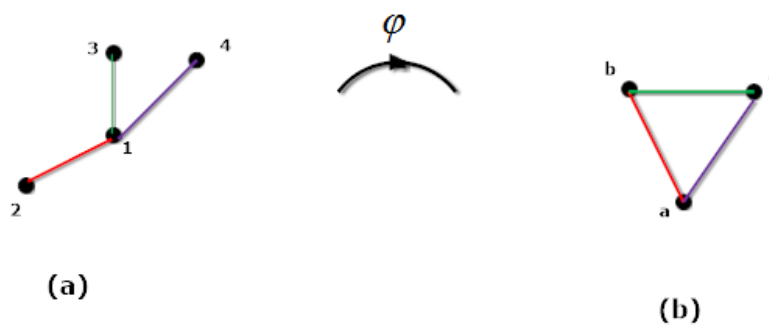
$\phi(x)$ a $\phi(y)$ e, portanto, ϕ_a é bem definida. Deixamos como exercício mostrar que ϕ_a é injetora e sobrejetora. O fato de que $\{x_1, y_1\}$ e $\{x_2, y_2\}$ são adjacentes em G_1 se, e somente se, $\{\phi(x_1), \phi(y_1)\}$ e $\{\phi(x_2), \phi(y_2)\}$ são adjacentes em G_2 segue da definição de ϕ . $\square$

Definição 2.1.14. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos não vazios nos quais existe um isomorfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$. O **isomorfismo induzido por ϕ** é aquele aresta-isomorfismo ϕ_a definido por

$$e = \{v, w\} \rightarrow \phi_a(e) = \{\phi(v), \phi(w)\}$$

A figura 2.5 ilustra o fato de que em geral dois grafos podem ser aresta-isomorfos porém não isomorfos.

Figura 2.5: Grafos aresta-isomorfos porém não isomorfos.



2.1.3 Subgrafos

Frequentemente um grafo sob estudo está contido dentro de um grafo maior. Consideremos agora várias instâncias disto.

Definição 2.1.15. Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, neste caso também dizemos que G é um **supergrafo** de H .

Definição 2.1.16. *Sejam H e G grafos. Diz-se que H é um subgrafo abrangente de G se $H \subset G$ e $V(H) = V(G)$.*

Entre os mais importantes subgrafos que iremos encontrar estão os **subgrafos induzidos**.

Definição 2.1.17. Se U é um subconjunto não vazio de $V(G)$, então o subgrafo $[U]$ de G **induzido** por U é o grafo onde $V([U]) = U$ e $E([U]) = \{\{a, b\} \in E(G) : a \in U, b \in U\}$.

Definição 2.1.18. Um subgrafo H de G é chamado **induzido por vértices** (ou, simplesmente, **induzido**) se $H = [U]$ para algum subconjunto U de $V(G)$.

Se $v \in V(G)$ e $|V(G)| \geq 2$, então $G - v$ denota o subgrafo induzido pelo conjunto $V(G) - \{v\}$. Em geral, se $V' \subset V(G)$, $[V(G) - V']$ é denotado por $G - V'$.

Definição 2.1.19. Se X é um subconjunto não vazio de $E(G)$, o subgrafo $[X]$ induzido por X é o grafo cujos vértices de G são incidentes com pelo menos uma aresta de X e cujo conjunto de arestas é X .

Definição 2.1.20. Um subgrafo H de G é chamado **induzido por arestas** se $H = [X]$ para algum subconjunto X de $E(G)$.

Se $e \in E(G)$, então $G - e$ é o subgrafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G) - \{e\}$.

Se u e v são vértices não adjacentes de um grafo G , então $G + \mathbf{f}$, onde $\mathbf{f} = uv$, denota o grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup \{\mathbf{f}\}$, claramente $G \subset G + \mathbf{f}$.

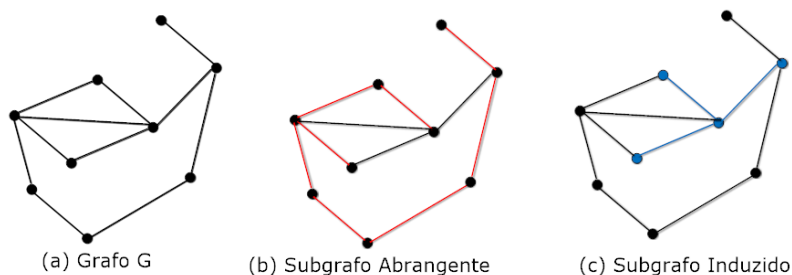
Existem certas classes de grafos que aparecem com tanta frequência que merecem atenção especial e, em alguns casos, notação especial. Descreveremos agora os mais proeminentes destes.

Definição 2.1.21. 1. [9] Um **polígono** (ou, **grafo ciclo**) (C_n) é um grafo com n vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.

2. Um grafo G é **regular de grau r** se $d(v) = r$, para todo vértice v de G . Tal grafo é chamado **r -regular**.

(a) Um grafo é **completo** se cada par de seus vértices são adjacentes. Um (n, m) -grafo completo é um grafo regular de grau $n - 1$. Denotamos este grafo por K_n .

Figura 2.6: Subgrafos do grafo G .



(b) Um grafo **cúbico** é um grafo 3-regular.

(c) Um grafo **par** é um grafo regular de grau par.

3. O **complementar** $\overline{G}$ de um grafo G é o grafo cujo conjunto de vértices $V(G)$ é tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se, e somente se, estes vértices são não adjacentes em G . Daqui em diante, se G é um (n, m) -grafo, então $\overline{G}$ é um $(n, \overline{m})$ -grafo.

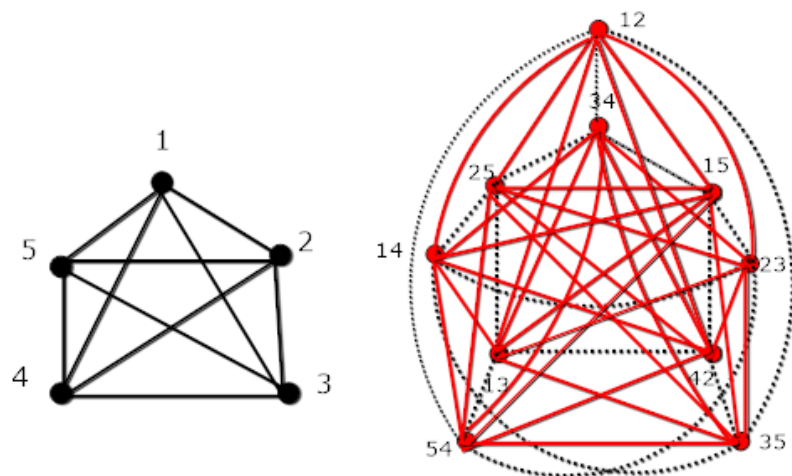
4. O grafo **linha** de um grafo G , denotado por $L(G)$, é definido como:

$$V(L(G)) = E(G)$$

$e, e \in E(L(G))$, se, e somente se, $e = \{a, b\}$, $a \cap b \neq \emptyset$.

O grafo linha representa a adjacência entre as arestas do grafo G .

Figura 2.7: O grafo completo K_5 , o grafo linha de K_5 e o grafo de Petersen.



Exercício 2.1.22. Prove que o grafo completo K_n possui $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Proposição 2.1.26. *Seja G um grafo. A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas. Isto é,*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

O seguinte teorema é utilizado mais adiante.

Teorema 2.1.27. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não possui ciclos de comprimento ímpar.*

O teorema 2.1.27 possui a seguinte variação:

Corolário 2.1.28. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém um percurso fechado de comprimento ímpar.*

2.2 Automorfismos de grafos

Seja V um conjunto não vazio. O conjunto de todas as permutações de V (confira com o Exemplo 1.3.2) também é denotado por $Sym(V)$ ou, $Sym(n)$, quando $|V| = n$. Lembremos que $Sym(V)$ é um grupo com a composição de funções. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e finito e suponha a existência de um isomorfismo ϕ de G em G , então ϕ é uma permutação dos elementos de V que preserva a adjacência. Neste caso, dizemos que ϕ é um **automorfismo do grafo** G . O conjunto de todos os automorfismos de G é um subgrupo de $Sym(V)$, o qual é denotado por $Aut(G)$.

Observação 2.2.1. *Note que o homomorfismo $\phi : Aut(G) \rightarrow Sym(V)$ definido por $\phi(f) = f$ é uma ação do grupo dos automorfismos do grafo G sobre o conjunto dos vértices do grafo (confira com a Observação 1.4.14).*

Exemplo 2.2.2. 1. *Seja G o grafo completo K_n . Então, $Aut(K_n) = Sym(n)$. De fato, seja ϕ uma permutação de V , temos que mostrar que $\phi \in Aut(K_n)$. Só temos que mostrar que se $uv \in E(K_n)$, então $\phi(u)\phi(v) \in E(K_n)$. Sendo ϕ uma bijeção de V em V , segue que $\phi(u)$ e $\phi(v)$ estão em V . Logo $\phi(u)\phi(v)$ é uma aresta de K_n , pois este grafo é completo.*

2. *Seja G o grafo ciclo (C_n) . Então, $Aut(C_n) = D_{2n}$.*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

De fato, suponha que o grafo ciclo corresponda à sequência

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k,$$

com $v_k = v_1$. Seja $\phi : V \rightarrow V$ a função definida por $\phi(v_i) = v_{i+1}$, $1 \leq v_i \leq k-1$, $\phi(v_k) = v_1$. Para ver que ϕ é um automorfismo, basta mostrar

que se conecta o vértice u com o vértice v então $\phi(u)\phi(v)$ é uma aresta de G . Devemos ter que u e v são vértices consecutivos, digamos, $u = v_i$ e $v = v_{i+1}$. Note que, por definição, $\phi(u) = v_{i+1}$ e $\phi(v) = v_{i+2}$. Assim, e_{i+1} é uma aresta do grafo ciclo (C_n) conectando $\phi(u)$ a $\phi(v)$. Note que ϕ é uma rotação. Considere agora a função π definida por $\pi(v_1) = v_1$, $\pi(v_2) = v_n$, $\pi(v_3) = v_{n-1}$. Pode-se mostrar que esta função é um automorfismo. Lembremos que $\text{gen}\{\phi, \pi\} = D_{2n}$. Assim $D_{2n} \subseteq \text{Aut}(C_n)$. Ora, é fácil ver que qualquer automorfismo de (C_n) só pode ser uma composição de uma rotação com uma reflexão.

3. Seja G o grafo determinado pelo caminho P_n . Então $\text{Aut}(P_n)$ é um grupo de cardinalidade 2.

Proposição 2.2.3. *Seja G um grafo simples. Então, $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\overline{G})$.*

O conjunto de todos os automorfismos induzidos do grafo G é um subgrupo, denotado por $Aut(G)^*$, do grupo de permutações das arestas de G , $S(E(G))$.

Proposição 2.2.4. *Seja G um grafo simples. Então, $\text{Aut}(G)^* = \text{Aut}(L(G))$.*

Teorema 2.2.5. *Seja G um grafo conexo com $|V(G)| \geq 3$. Então $\text{Aut}(G)^* = \text{Aut}(G)$ se, e somente se G não é K_4 ou $K_4 - v$ ou o grafo formado pela união de (C_3) com K_2 tal que $|V((C_3)) \cap V(K_2)| = 1$*

Definição 2.2.6. Um grafo G é **transitivo pelo vértice** se para cada par de vértices v e w , existe $\phi \in \text{Aut}(G)$ tal que $\phi(v) = w$.

Observação 2.2.7. Note que a definição 2.2.6 está nos dizendo que $\text{Aut}(G)$ atua transitivamente sobre $V(G)$.

2.3 Grafos de Cayley

Os grafos de Cayley apareceram com o intuito de dar uma representação gráfica a grupos abstratos e, assim, poder estudar suas estruturas. Os grafos de Cayley têm aplicações em vários ramos da Engenharia. Por exemplo, os grafos de Cayley obtidos ao usar grupos de permutações são importantes na Engenharia Elétrica e na Engenharia da Computação, pois a simetria é fundamental em todos os desenhos de redes desses grafos. Em especial, os gerados por um produto de dois ciclos disjuntos, possuem todas as propriedades de simetria conhecidas.

Um especial tipo de grafo de Cayley é central neste curso e, para entender os temas apresentados nos capítulos seguintes, apresentaremos seus aspectos mais relevantes.

Definição 2.3.1. *Seja $(\mathfrak{g}, \cdot)$ um grupo, e seja B um subconjunto de $\mathfrak{g}$ tal que a identidade do grupo $1_{\mathfrak{g}} \notin B$. Suponha que $B^{-1} = \{b^{-1} : b \in B\} = B$. O **grafo de Cayley** $X' := \text{Cay}(\mathfrak{g}, B)$ é um grafo não orientado possuindo o conjunto de vértices $V(X') = \mathfrak{g}$ e o conjunto de arestas $E(X') = \{ab : a \cdot b^{-1} \in B, a, b \in \mathfrak{g}\}$. Chama-se B o **conjunto conector**.*

2.3. GRAFOS DE CAYLEY

27

Teorema 2.3.6. $X' = \text{Cay}(\mathfrak{g}, B)$ é conexo se, e somente se, B é um conjunto gerador de $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Faremos a prova numa só direção. Suponha que $X' = \text{Cay}(\mathfrak{g}, B)$ é conexo, temos que mostrar que $\text{gen}(B) = \mathfrak{g}$. Assim, dado $g \in \mathfrak{g}$ arbitrário, vamos exibir um número finito de elementos $h_1, h_2, \dots, h_k$ de B tais que $g = h_1 h_2 \dots h_k$. Por hipótese, existe um caminho em X' que une $1_{\mathfrak{g}}$ com g^{-1} . Sejam $v_1, v_2, \dots, v_k$ os vértices de $V(X')$ tais que $1_{\mathfrak{g}} v_1 v_2 \dots v_k g^{-1}$. Então, existem $h_1, h_2, \dots, h_k$ em B tais que

$$1_{\mathfrak{g}} v_1^{-1} = h_1$$

,

$$v_1 v_2^{-1} = h_2,$$

$$v_2 v_3^{-1} = h_3,$$

$$\dots = \dots,$$

$$v_k g = h_k.$$

Multiplicando os termos membro a membro, obtemos

$$g = (1_{\mathfrak{g}} v_1^{-1})(v_1 v_2^{-1})(v_2 v_3^{-1}) \dots (v_k g) = h_1 h_2 \dots h_k,$$

como queríamos. □

Teorema 2.3.7. $\text{Aut}(X')$ contém um subgrupo regular isomorfo a $\mathfrak{g}$.

Demonstração. O conjunto $H = \{\sigma_g \in \text{Aut}(X') : g \in \mathfrak{g}\}$ é um subgrupo de $\text{Aut}(X')$ (veja Exercício 2.3.8). Se $\sigma_g(v) = v$, então

$$v \cdot g^{-1} = \sigma_g(v) = v \Rightarrow g = 1_{\mathfrak{g}}.$$

Logo, a identidade de H é o único elemento que fixa v , para qualquer v em $V(X')$, mostrando que a ação de H sobre $V(X')$ é semirregular. Por outro lado a órbita de qualquer elemento $v \in V(X')$ é o próprio $V(X')$, assim esta ação é transitiva. Segue que H é um subgrupo regular de $\text{Aut}(X')$. Finalmente, é fácil provar que a aplicação definida por $\sigma_g \mapsto g$ é um isomorfismo de H em $\mathfrak{g}$. □

Exercício 2.3.8. Prove que H é um subgrupo isomorfo a $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.3.9. Seja G um grafo tal que $\text{Aut}(G)$ contenha um subgrupo H que atua regularmente sobre $V(G)$, então $G = \text{Cay}(H, S)$ para algum conjunto conector S .

2.3.2 Grafos unitários de Cayley

Definição 2.3.10. Para $n > 1$, seja $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ o anel dos inteiros módulo n . O grafo unitário de Cayley X_n é o grafo tendo como conjunto de vértices $V(X_n) = \mathbb{Z}_n$ e, se U_n denota o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis do anel $\mathbb{Z}_n$, então dois vértices $a, b \in \mathbb{Z}_n$ são adjacentes se, e somente se, $a - b \in U_n$.

A primeira observação a ser feita é notar que X_n é realmente um grafo de Cayley. De fato, basta aplicar a Definição 2.3.1 com $(g, \cdot) = (\mathbb{Z}_n, +)$ e $B = U_n$, uma vez que U_n contém todos os seus inversos aditivos.

Lembremos que U_n é o conjunto dos inteiros relativamente primos a n . Assim, a cardinalidade de U_n é $\phi(n)$, onde ϕ é a função de Euler. Além disso, os vértices a e b são adjacentes se, e somente se, $\text{mdc}(a - b, n) = 1$.

Sendo U_n um conjunto de geradores, segue da Proposição 2.3.6 e do Exercício 2.3.2 que $X_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, U_n)$ é conexo e $\phi(n)$ -regular. Estes fatos são resumidos na seguinte proposição:

Proposição 2.3.11. O grafo unitário de Cayley $X_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, U_n)$ é um grafo de Cayley conexo e $\phi(n)$ -regular.

Proposição 2.3.12. $|E(X_n)| = n \frac{\phi(n)}{2}$.

Demonstração. Como X_n é $\phi(n)$ -regular, segue da Proposição 2.1.26 que

$$2|E(X_n)| = \sum_{v \in V(X_n)} d_{X_n}(v) = \sum_{v \in V(X_n)} \phi(n) = n\phi(n).$$

□

Corolário 2.3.13. Se $n = p$, um número primo, então $X_n = K_p$ o grafo completo de n vértices.

Demonstração. Se $n = p$ então, usando o Teorema 1.2.6, temos que $\phi(n) = p - 1$. □

Proposição 2.3.14. X_n é multipartido com p_1 conjuntos, onde

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}, \quad \text{com } p_1 < p_2 < \dots < p_s,$$

é a fatoração de n em primos.

Demonstração. Para cada $0 \leq i \leq p_1$ definimos o seguinte conjunto bipartido

$$A_i = \{x \in V(X_n) : x \equiv i \pmod{p_1}\}.$$

Estes são conjuntos de vértices independentes, pois $x \in A_i$ implica $x - i = kp_1$, para algum inteiro k . Logo, $\text{mdc}(x - i, n) \neq 1$ e, portanto, $x - i \notin U_n$. Daí, dados dois vértices $x, y \in A_i$ tem-se que $x - y \notin U_n$, isto é, x e y não são adjacentes.

2.3. GRAFOS DE CAYLEY

29

Além disso, os conjuntos A_i são classes de equivalência da relação de congruência mod p_1 . Assim,

$$A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{p_1-1} = V(X_n).$$

Até aqui temos mostrado que nosso grafo multipartido poderia ter p_1 subconjuntos ou menos, pois pode ocorrer o caso em que vértices na classe A_i não sejam adjacentes com os vértices de outra classe. Por outro lado, o conjunto $\{0, 1, \dots, p_1 - 1\}$ é um clique de p_1 elementos, mostrando que o número de conjuntos do grafo multipartido é p_1 ou maior. Segue que este número deve ser p_1 . $\square$

Corolário 2.3.15. *Seja $n = p^\alpha$ com p primo e $\alpha \geq 2$. Então, X_n é p -partido onde os conjuntos partes são as classes de equivalência mod p . Além disso, estas classes são conjuntos maximais de vértices independentes.*

O seguinte resultado é devido a [6]. A prova que fornecemos é devida a [17].

Proposição 2.3.16. [17] *Se n é par então X_n é um grafo bipartido.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.27, basta mostrar que X_n não tem ciclo ímpar. Para ver isto, seja $(i_1, i_2, \dots, i_r, i_1)$ um ciclo em X_n . Então, $i_1 i_2, \dots, i_r i_1$ são arestas em X_n de modo que $i_s - i_{s+1} \in U_n$ para $1 \leq s \leq r - 1$. Sendo n par, $i_s - i_{s+1}$ e $i_r - i_1$ devem ser ambos ímpares (caso contrário, não seriam invertíveis), para $1 \leq s \leq r - 1$. Isto é, um dos i_s e i_{s+1} é ímpar e o outro é par para $1 \leq s \leq r - 1$ e, o mesmo é válido para i_1 e i_r . Portanto, $i_1, i_2, \dots, i_r, i_1$ alterna a paridade. Isto mostra que uma metade de $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ são pares e, a outra metade, são ímpares. Segue que o ciclo dado é um ciclo par e, do Teorema 2.1.27 vem que o grafo é bipartido. $\square$

Teorema 2.3.17. [17] *Para cada $u \in U_n$, o ciclo $C_n^u = (0, u, 2u, \dots, nu = 0)$ é de Hamilton em X_n .*

Demonstração. Seja $u \in U_n$. Então, $0 < u < n$ e $(u, n) = 1$ implica que u é um gerador do grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$. Em consequência, $0, u, 2u, \dots, (n-1)u$ são todos distintos e $\{u, 2u, \dots, nu\} = \mathbb{Z}_n$. Para $1 \leq r \leq n$ temos que

$$(r+1)u - ru = u \in U_n.$$

Assim, para cada r tal que $1 \leq r \leq n$ temos que

$$\{(r+1)u, ru\} \in E(X_n).$$

Consequentemente, X_n contém o ciclo de Hamilton C_n^u . $\square$

Corolário 2.3.18. *Para cada $u \in U_n$, o subgrafo de X_n determinado por C_n^u é igual ao subgrafo de X_n determinado por C_n^{n-u} .*

Demonstração. Note que no grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$, $nt = 0$, para cada t inteiro. Daí, para qualquer r , $0 \leq r \leq n$,

$$(n - r)s = ns - rs = 0 - rs = rn - rs = r(n - s).$$

Assim, o ciclo

$$C_n^u = (0, u, 2u, \dots, nu = 0)$$

é reverso de

$$C_n^{n-u} = (0, n - u, 2(n - u), \dots, (n - 1)(n - u), 0).$$

□

Teorema 2.3.19. [17] Para $n \geq 3$, X_n tem uma decomposição em $\frac{\phi(n)}{2}$ ciclos de Hamilton de arestas disjuntas.

Demonstração. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Mostraremos primeiro que $s \neq n - s$, para todo $s \in U_n$.

Caso 1: $s = 1$. Neste caso $n - s \geq 2$. Logo, $n - s > 1 = s$.

Caso 2: $s \neq 1$. Suponhamos que fosse $s = n - s$. Logo, $n = 2s$ e

$$\text{mcd}(s, n) = \text{mcd}(s, 2s) = s \neq 1.$$

Isto é um absurdo pois, por hipótese, $n - s = s \in U_n$ e, portanto, $\text{mcd}(n - s, n) = 1$. Em todo caso, tem-se $s \neq n - s$, para todo $s \in U_n$. Isto indica que U_n pode ser particionado em $\frac{\phi(n)}{2}$ pares de números distintos $\{s, n - s\}$. Pelo Corolário 2.3.18, os ciclos de Hamilton C_n e C_n^{n-s} correspondentes a cada par são os mesmos. Assim, os $\frac{\phi(n)}{2}$ distintos pares produzem $\frac{\phi(n)}{2}$ ciclos de Hamilton. Falta mostrar que estes ciclos são, dois a dois, arestas disjuntas.

Sejam $s, t \in U_n$, com $t \neq s$ e $t \neq (n - s)$. Mostremos que os ciclos de Hamilton C_s e C_t são arestas disjuntas. Notemos que os ciclos de Hamilton C_s e C_t tem a seguinte forma:

$$C_s = (0, s, 2s, \dots, (n - 1)s, ns = 0) \quad \text{e} \quad C_t = (0, t, 2t, \dots, (n - 1)t, nt = 0).$$

Por contradição, suponhamos que existe uma aresta $\{it, (i + 1)t\}$ em C_t tal que

$$\{it, (i + 1)t\} = \{js, (j + 1)s\} \text{ ou } \{it, (i + 1)t\} = \{k(n - s), (k + 1)(n - s)\},$$

para algum $0 \leq j \leq n - 1$ ou $0 \leq k \leq n - 1$. Então,

$$\{it, (i + 1)t\} = \{js, (j + 1)s\}$$

$$\Rightarrow it = js \quad \text{e} \quad (i + 1)t = (j + 1)s$$

$$\Rightarrow t = s,$$

o qual é uma contradição. Similarmente,

2.3. GRAFOS DE CAYLEY

31

$$\begin{aligned}
 (it, (i+1)t) &= (k(n-s), (k+1)(n-s)) \\
 \Rightarrow it &= k(n-s) \quad \text{e} \quad (i+1)t = (k+1)(n-s) \\
 \Rightarrow t &= n-s,
 \end{aligned}$$

o qual também é uma contradição.

Concluimos que os $\frac{\phi(n)}{2}$ distintos pares produzem $\frac{\phi(n)}{2}$ ciclos de Hamilton disjuntos pelas arestas. Como cada ciclo de Hamilton tem n arestas, o número total de arestas contribuídas pelos $\frac{\phi(n)}{2}$ ciclos de Hamilton é $n\frac{\phi(n)}{2}$ que é o número total de arestas em X_n . $\square$

Capítulo 3

Introdução à Teoria dos Hipergrafos

3.1 Hipergrafos

Neste capítulo apresentamos as definições e propriedades básicas da Teoria dos Hipergrafos.

Definição 3.1.1. *Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto finito de objetos chamados **hipervértices** e seja $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_m\}$ uma família finita de subconjuntos de V chamados **hiperarestas**. O par $H = (V, \mathcal{E})$ é chamado **hipergrafo**. No que segue, utilizaremos vértices por hipervértices e arestas por hiperarestas.*

1. A **ordem** e o **tamanho** de um hipergrafo referem-se, respectivamente, à cardinalidade do conjunto de vértices e à cardinalidade do conjunto de arestas. Usualmente, denota-se por $|V|$ e $|\mathcal{E}|$ a ordem e o tamanho de um hipergrafo, respectivamente.
2. Dois vértices em um hipergrafo são ditos **adjacentes** se existir uma aresta que os contenham e dizemos que duas arestas são **adjacentes** se sua interseção é não vazia. Dizemos que um vértice v é **incidente** a uma aresta $\mathbf{E}$ se $v \in \mathbf{E}$. É lícito dizer também que $\mathbf{E}$ é incidente a v ou que $\mathbf{E}$ e v são ambos incidentes.
3. Um vértice não incidente a aresta nenhuma de $\mathcal{E}$ é denominado **isolado**. Daí que, se $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2 \cup \dots \cup \mathbf{E}_n = V$, diz-se de H um **hipergrafo sem vértices isolados**.
4. Se $V = \emptyset$ e $\mathcal{E} = \emptyset$ H é denominado um **hipergrafo vazio**.
5. $V \neq \emptyset$ e $\mathcal{E} = \emptyset$ H é denominado um **hipergrafo trivial**.
6. O **grau** de uma aresta $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ é sua cardinalidade. Assim, $\text{grau}(\mathbf{E}) = |\mathbf{E}|$. Um conjunto unitário em $\mathcal{E}$ denomina-se um **laço**. Assim, laços são arestas de cardinalidade igual a 1.

7. H é um **hipergrafo simples** se $\mathcal{E}$ for uma família com a propriedade seguinte: se $E_i, E_j \in \mathcal{E}$ são tais que $E_i \subseteq E_j$, então $i = j$. No caso de cada hiperaresta ter cardinalidade igual a 2, estamos diante de um grafo simples sem vértices isolados.
8. Um hipergrafo **k-uniforme** H é um hipergrafo simples no qual cada uma de suas arestas possui cardinalidade k . Para $0 \leq r \leq n = |V|$, o **hipergrafo completo r-uniforme** $K_n^r = (V, \mathcal{E})$ é aquele que possui como conjunto de arestas a coleção de todos os subconjuntos de V de cardinalidade r .
9. Uma **estrela** $H(v)$ com centro em v é a família de hiperarestas $(E_j)_{j \in J}$ contendo v (figura 2.8 item c).
10. Dada uma estrela $H(v) = (E_j)_{j \in J}$, o **grau** de v é $d(v) = |J|$. No entanto, para um laço $\{v\}$ o grau $d(v) = 2$ (pois, o início e o final do laço terminam no vértice v).
11. O número $\Delta(H) = \max\{d(v) : v \in V\}$ chama-se o **grau máximo** de um hipergrafo.

3.2 Representações de um hipergrafo

3.2.1 Representação pictórica

Um hipergrafo é representado graficamente limitando os vértices de uma aresta de cardinalidade maior que 2 por uma curva fechada. Se a cardinalidade for igual a 2, o par de hipervértices se conecta por uma linha reta ou curva, da mesma maneira como em grafos ordinários. Se uma hiperaresta é um conjunto unitário, ela se representa colocando um laço junto ao vértice. No exemplo seguinte apresentamos um hipergrafo junto com sua representação pictórica.

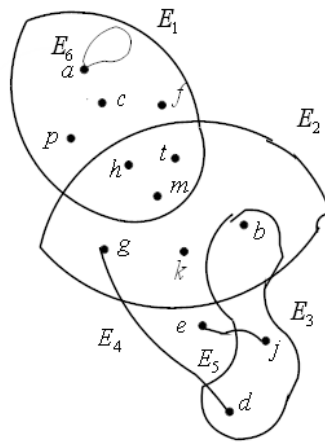
Exemplo 3.2.1. *Seja o hipergrafo $H = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, p, t, m\}$ e E é formado pelos subconjuntos $E_1 = \{a, c, f, h, p, t, m\}$, $E_2 = \{h, t, m, g, k, b\}$, $E_3 = \{d, b, j\}$, $E_4 = \{d, g\}$, $E_5 = \{e, j\}$ e $E_6 = \{a\}$. A representação pictórica deste hipergrafo é dada na figura 3.1.*

3.2.2 Representação matricial

Seja $H = (V, \mathcal{E})$ um hipergrafo, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_m\}$. A matriz com n linhas (representando os vértices) e m colunas (representando as arestas) de H é chamada **matriz de incidência** $I(H)$ de H . Suas entradas (i, j) estão definidas da seguinte maneira:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } \mathbf{E}_j \text{ s\~ao incidentes;} \\ 0, & \text{caso contr\'ario.} \end{cases}$$

Figura 3.1: Representação pictórica de um hipergrafo



Exemplo 3.2.2. A seguinte matriz representa o hipergrafo do exemplo 3.2.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

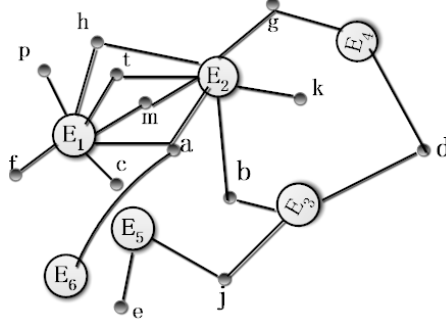
3.2.3 Representação bipartida de um hipergrafo

Definição 3.2.3. *Seja $H = (V, \mathcal{E})$ um hipergrafo. Define-se a representação bipartida de H como sendo o grafo $B(H) = (V \cup \mathcal{E}; E)$ com conjunto de vértices $V \cup \mathcal{E}$ e conjunto de arestas E definido do seguinte modo: um vértice $v \in V$ é adjacente a outro vértice $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ em $B(H)$ se, e somente se, o vértice v é incidente à aresta $\mathbf{E}$ em H .*

Note que $B(H)$ é um grafo bipartido (com partição V e $\mathcal{E}$ de seus vértices).

Definição 3.2.4. *Seja $H = (V, \mathcal{E})$ um hipergrafo. Se $\mathcal{E} = \mathcal{P}(V)$, então H chama-se **completo**.*

Figura 3.2: Representação bipartida de um hipergrafo



Definição 3.2.5. Seja $H = (V, \mathcal{E})$ um hipergrafo e seja dado um subconjunto não vazio $S \subseteq V$. O **rango** de S , denotado por $r(S)$, é o número

$$r(S) = \max\{|S \cap E_i|; E_i \in \mathcal{E}\}.$$

Definição 3.2.6. Seja $H = (V, \mathcal{E})$ um hipergrafo e seja V' um subconjunto de V . O conjunto de **arestas parciais** induzido por V' em H é

$$\mathcal{E}' = \{E_i \cap V' \neq \emptyset : E_i \in \mathcal{E}\}.$$

Definição 3.2.7. Seja $H = (V, \mathcal{E})$ um hipergrafo e seja V' um subconjunto de V . Chama-se **hipergrafo induzido** $H(V')$ de H por V' o hipergrafo $H(V') = (V', \mathcal{E}')$, onde

$$\mathcal{E}' = \{E_i \cap V' \neq \emptyset : E_i \in \mathcal{E}\}.$$

Noutras palavras, as arestas de $H(V')$ são as arestas parciais induzidas pelo conjunto de vértices $V' \subseteq V$.

Definição 3.2.8. Dado um subconjunto $V' \subseteq V$, o **sub-hipergrafo** H' de $H = (V, \mathcal{E})$ é o hipergrafo

$$H' = (V', \mathcal{E}'),$$

onde $\mathcal{E}'$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de V' . Note que, em particular, um hipergrafo induzido é um sub-hipergrafo.

Definição 3.2.9. O hipergrafo $H = (V, \mathcal{E})$ chama-se **bipartido** se existir uma partição do conjunto de vértices V em dois subconjuntos V_1 e V_2 tal que cada aresta de tamanho maior ou igual a 2 intersepta V_1 e V_2 .

Teorema 3.2.10. Seja H um hipergrafo com conjunto de graus de vértices $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ e conjunto de graus (cardinalidades) de arestas $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$. Então,

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^m k_j. \quad (3.1)$$

Demonstração. Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de hipervértices tais que $d(v_i) = r_i$. Denotemos o fato de que $v_i \in B_j$ pelo par ordenado (v_i, B_j) . Vamos contar estes pares de duas maneiras. Usando o fato de que o i -ésimo vértice está exatamente sobre r_i blocos, o lado esquerdo de 3.1 conta o número de pares. Similarmente, posto que B_j contém exatamente k_j hipervértices, o lado direito de 3.1 também conta o mesmo número de pares. $\square$

3.3 Exemplos de hipergrafos

Uma fonte de exemplos de hipergrafos é dada por uma estrutura combinatorial chamada desenho. Um desenho genérico é um par $(X, \mathcal{B})$ onde $X = \{x_1, \dots, x_v\}$ é um conjunto cujos elementos são chamados variedades, e $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ é um conjunto cujos elementos são chamados blocos. Para tornar uma tal estrutura interessante, é preciso impor sobre a mesma algumas restrições. Os exemplos aqui apresentados foram extraídos de [3].

3.3.1 Sistemas de Steiner

Definição 3.3.1. *Sejam t, k, n inteiros tais que $2 \leq t < k < n$. Um sistema de Steiner, denotado por $S(t, k, n)$, é um hipergrafo k -uniforme $(V, \mathcal{E})$ com n hipervértices tal que para cada subconjunto $T \subseteq V$, com $|T| = t$, existe exatamente uma hiperaresta $E \in \mathcal{E}$ tal que $T \subseteq E$.*

3.3.2 Espaços lineares

Um espaço linear é um hipergrafo no qual cada par de vértices distintos está contido precisamente em uma hiperaresta. Um hipergrafo contendo somente uma hiperaresta, sem hipervértices isolados, chama-se um espaço linear trivial.

Planos Projetivos

Definição 3.3.2. *O plano projetivo finito de rank r é um hipergrafo $H = (V, \mathcal{E})$ com $|V| = r^2 - r + 1$ hipervértices (pontos) e $r^2 - r + 1$ hiperarestas (retas) que cumpre os seguintes axiomas:*

1. Cada ponto pertence a exatamente r retas;
2. Cada reta contém exatamente r pontos;
3. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém;
4. duas retas distintas possuem exatamente um ponto em comum.

Exemplo: O plano de Fano

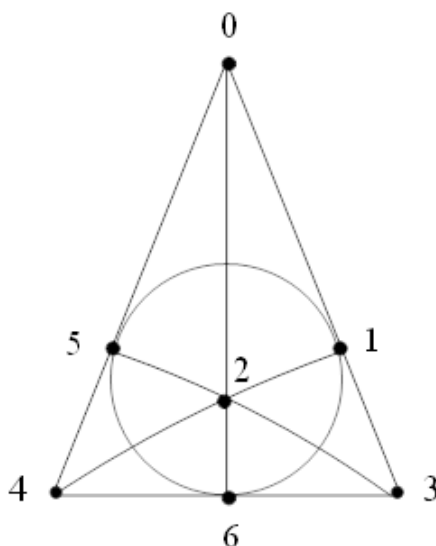
O plano de Fano é um plano projetivo finito de rank 3 o qual é também chamado o **hipergrafo de Fano** :

1. O conjunto de vértices é $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. O conjunto de hiperarestas é :

$$\mathcal{E} = \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 0\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 0, 2\}\}$$

Figura 3.3: O plano de Fano.



3.4 Ciclos em um hipergrafo

Em um hipergrafo $H = (V, \mathcal{E})$ uma cadeia de comprimento q é definido como sendo uma sequência $(x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, E_q, x_{q+1})$ tal que

1. $x_1, x_2, \dots, x_q$ são todos vértices distintos de H ;
2. $E_1, E_2, \dots, E_q$ são todas arestas distintas de H ;
3. $x_k, x_{k+1} \in E_k$ para $k = 1, 2, \dots, q$.

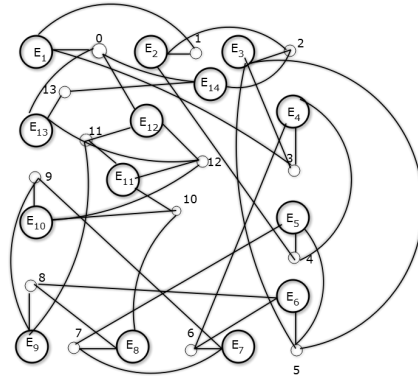
Se $q > 1$ e $x_{q+1} = x_1$, então esta cadeia é chamada **ciclo** de comprimento q .

3.6. HIPERGRAFOS DE CAYLEY

41

5. $E_5 = [4, 4\{1, 3\}] = \{4\} \cup \{4 + 1, 4 + 3\} = \{4, 5, 7\}$
6. $E_6 = [5, 5\{1, 3\}] = \{5\} \cup \{5 + 1, 5 + 3\} = \{5, 6, 8\}$
7. $E_7 = [6, 6\{1, 3\}] = \{6\} \cup \{6 + 1, 6 + 3\} = \{6, 7, 9\}$
8. $E_8 = [7, 7\{1, 3\}] = \{7\} \cup \{7 + 1, 7 + 3\} = \{7, 8, 10\}$
9. $E_9 = [8, 8\{1, 3\}] = \{8\} \cup \{8 + 1, 8 + 3\} = \{8, 9, 11\}$
10. $E_{10} = [9, 9\{1, 3\}] = \{9\} \cup \{9 + 1, 9 + 3\} = \{9, 10, 12\}$
11. $E_{11} = [10, 10\{1, 3\}] = \{10\} \cup \{10 + 1, 10 + 3\} = \{10, 11, 13\}$
12. $E_{12} = [11, 11\{1, 3\}] = \{11\} \cup \{11 + 1, 11 + 3\} = \{11, 12, 0\}$
13. $E_{13} = [12, 12\{1, 3\}] = \{12\} \cup \{12 + 1, 12 + 3\} = \{12, 13, 1\}$
14. $E_{14} = [13, 13\{1, 3\}] = \{13\} \cup \{13 + 1, 13 + 3\} = \{13, 0, 2\}$

Figura 3.5: Hipergrafo Unitário de Cayley com $n = 14$ e $X = \{\{1, 3\}\}$.



Teorema 3.6.7. *Seja U_n o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis do anel $\mathbb{Z}_n$. Os ciclos de Hamilton C_n^u (confira notação no Teorema 2.3.17) onde $u \in U_n$ são hipergrafos unitários de Cayley.*

Demonstração. Consideremos o hipergrafo unitário de Cayley $H'_u = CH(\mathbb{Z}_n, X)$ onde $X = \{\{u\}\}$. Uma aresta deste hipergrafo é da forma

$$[g, g\{u\}] = \{g\} \cup \{g + u\} = \{g, g + u\}.$$

Pelo Exercício 1.5.8 temos que

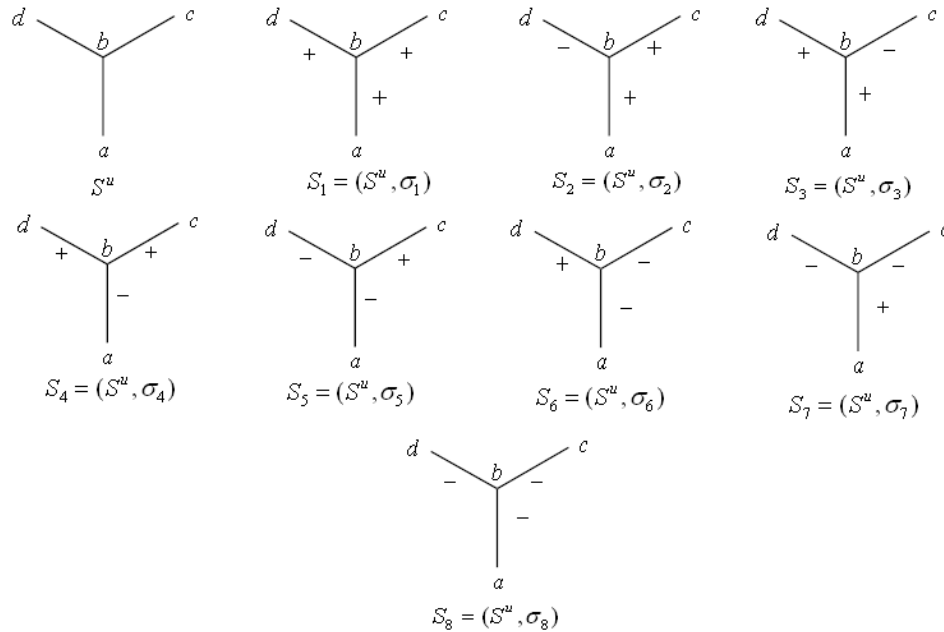
$$\forall g, 0 \leq g \leq n - 1, g = ku, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z},$$

e o resultado segue. □

44CAPÍTULO 4. SIGRAFOS (OU GRAFOS DE ARESTAS ROTULADAS COM SINAIS)

suporte de S , e σ é uma **função rotuladora de arestas** de E , $\sigma : E \rightarrow \{+, -\}$.

Figura 4.1: Todos os sigrafos tendo como suporte o grafo S^u .



Exemplo 4.1.2. Seja o grafo S^u com conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d\}$ e conjunto de aresta $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}\}$, o qual é suporte para os sigrafos S_i , $i = 1, \dots, 8$, mostrados na Fig. 4.1.

Uma aresta é dita **positiva** se ela está rotulada com sinal (+) e, negativa, se está rotulada com sinal (-). Denotamos por E^+ o conjunto de todas as arestas positivas do sigrafo e, por E^- , o conjunto de suas arestas negativas. Um caminho no qual o produto dos sinais de suas arestas é (+) é chamado um **caminho positivo**. Um **ciclo positivo** é definido de maneira similar. Um sigrafo é dito **totalmente positivo** se todas as suas arestas forem positivas. Um sigrafo totalmente positivo (ou totalmente negativo) é dito **homogêneo** e, caso contrário, é chamado **heterogêneo**.

Definição 4.1.3. Um sigrafo é dito **equilibrado** se todos os seus ciclos forem positivos.

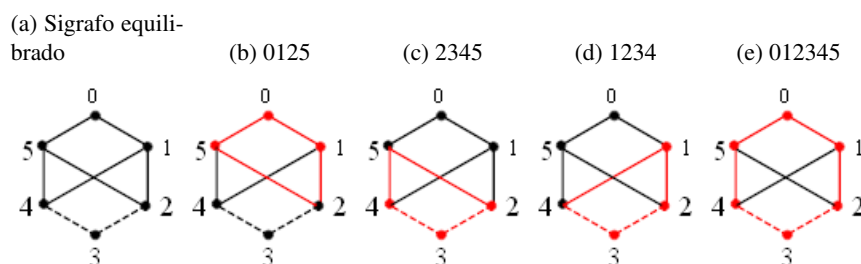
Se $G = (V, E)$ é um grafo denotemos por $-G$ o sigrafo totalmente negativo correspondente. Isto é, $-G = (G, \sigma)$ onde $\sigma(e) = -$, para todo $e \in E(G)$.

Proposição 4.1.4. $G = (V, E)$ é bipartido se, e somente se, $-G$ é equilibrado.

Demonstração. Se G é bipartido então, pelo Teorema ??, G não possui ciclos ímpares (número ímpar de arestas). Logo, todo ciclo em $-G$ é positivo e, por

definição, G é equilibrado. Reciprocamente, se $-G$ é equilibrado, então todos os seus ciclos são positivos. Como todas as suas arestas são negativas, um ciclo não pode possuir um número ímpar de arestas. Pelo Teorema ??, G é bipartido. $\square$

Figura 4.2: Sifrafo equilibrado



Na Fig 4.2 mostra-se, no sigrafo heterogêneo cujas arestas pontilhadas estão rotuladas negativamente, todos os seus ciclos. Note que cada um desses ciclos é positivo e, portanto, o sigrafo é equilibrado.

Um sigrafo S com conjunto de vértices $V(S^u) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ pode ser representado por meio de matrizes da seguinte maneira:

Definição 4.1.5. Uma matriz $A(G) = [a_{ij}]$ quadrada, de ordem n , é chamada *matriz de adjacência* de S quando

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \in E(G) \text{ e } \sigma(v_i v_j) = +; \\ -1, & \text{se } v_i v_j \in E(G) \text{ e } \sigma(v_i v_j) = -; \\ 0, & \text{se } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

4.2 O Teorema de Estrutura

Teorema 4.2.1. *Um sigrafo completo S é equilibrado se, e somente se, existe uma partição do conjunto de seus vértices $V(S)$ formada por dois subconjuntos V_1 e V_2 , possivelmente um deles vazio, tal que se $ab \in E^+$ então a e b pertencem ao mesmo subconjunto da partição e, se $ab \in E^-$ então a e b pertencem a diferentes conjuntos da partição.*

Demonstração. Fixe um vértice v_1 arbitrário de $V(S)$ e defina

$$V_1 = \{w \in V(S) : \sigma(v_1w) = +\} \cup \{v_1\}$$

e

$$V_2 = \{w \in V(S) : \sigma(v_1 w) = -\}.$$

46CAPÍTULO 4. SIGRAFOS (OU GRAFOS DE ARESTAS ROTULADAS COM SINAIS)

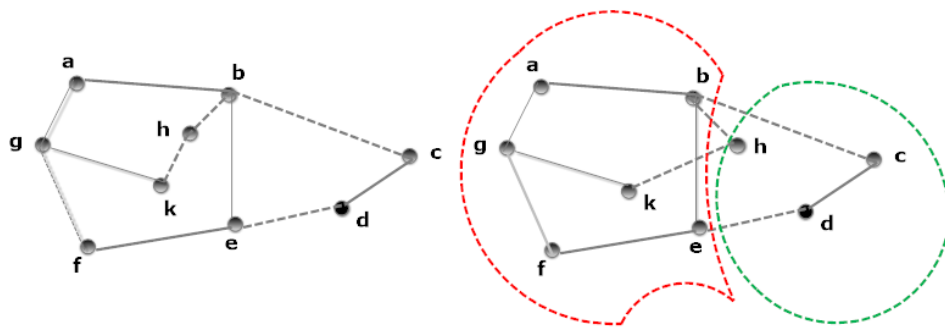
Em primeiro lugar mostremos que $V(S) = V_1 \cup V_2$. Antes disso, note que, por definição, esta união é disjunta. Seja $v \in V(S)$. Sendo o suporte um grafo completo, vv_1 é uma aresta do suporte. Se $\sigma(vv_1) = +$ então $v \in V_1$ e, caso contrário, $v \in V_2$. Em qualquer caso, $v \in V_1 \cup V_2$. Em segundo lugar, mostremos que se vw é uma aresta tal que $\sigma(vw) = +$, então os vértices v e w pertencem a um mesmo conjunto da partição. Ora, se $v \in V_1$ então $\sigma(vv_1) = +$. Como o ciclo v_1vw é positivo, devemos ter $\sigma(wv_1) = +$, donde vem que $w \in V_1$. Se $v \in V_2$ então $\sigma(vv_1) = -$. Como o ciclo v_1vw é positivo, devemos ter $\sigma(wv_1) = -$, donde vem que $w \in V_2$. Analogamente, prova-se que $\sigma(vw) = -$ implica que v e w pertencem a distintos conjuntos da partição. $\square$

Lema 4.2.2. *Seja S um sigrafo equilibrado. Considere um subgrafo S_1^u do suporte S^u , então o sigrafo S_1 é equilibrado.*

Teorema 4.2.3. *Um sigrafo é equilibrado se, e somente se, para cada par de vértices distintos v e w , todos os $v - w$ caminhos têm o mesmo sinal.*

Demonstração. Sejam $P = P_{v,w}$ e $Q = Q_{v,w}$ dois caminhos. Se eles não compartilham arestas e nem vértices, então formam um ciclo o qual, por hipótese, é positivo. Isto implica que tanto P como Q têm o mesmo sinal. Se eles compartilham arestas ou vértices, deletemos estas arestas e o que fica é uma coleção de ciclos, cada um deles positivo. Assim cada um dos subcaminhos têm o mesmo sinal. Colocando as arestas deletadas nos lugares correspondentes, vemos que os caminhos P e Q têm o mesmo sinal. $\square$

Figura 4.3: Partição do conjunto de vértices no Teorema de Estrutura



Teorema 4.2.4. *Um sigrafo S é equilibrado se, e somente se, existe uma partição do conjunto de seus vértices $V(S)$ formada por dois subconjuntos V_1 e V_2 , possivelmente um deles o conjunto vazio, tal que se $ab \in E^+$ então a e b pertencem ao mesmo subconjunto da partição e se $ab \in E^-$ então a e b pertencem a diferentes conjuntos da partição*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor S conexo por caminhos. Suponhamos, primeiramente, que S é um sigrafo equilibrado. Mostraremos

4.3. SIGRAFOS UNITÁRIOS DE CAYLEY

47

a existência de uma partição de $V(S)$ tal como estabelecida na conclusão do teorema. Sejam v e w dois vértices não adjacentes em $V(S)$. Pelo Teorema 4.2.3, todos os $P_{v,w}$ têm o mesmo sinal. Adicione uma aresta, possuindo o mesmo sinal, conectando os vértices v e w . O ciclo resultante é positivo e o grafo $S + vw$ é equilibrado. Repita o procedimento com os demais vértices até conseguir um sigrafo completo e equilibrado S' . Pelo Teorema de Estrutura 4.2.1, o conjunto de vértices possui uma partição P satisfazendo as condições da hipótese. Para provarmos a recíproca, vamos conectar os vértices não adjacentes do sigrafo S até obter um sigrafo completo e respeitando a partição da hipótese. Então, pelo Teorema 4.2.1, o supergrafo S' obtido a partir de S é equilibrado. Pelo Lema 4.2.2, S é equilibrado. $\square$

Teorema 4.2.5. *Seja S um sigrafo no qual cada ciclo sem corda 2.1.6 é positivo. Então, S é equilibrado.*

Demonstração. A prova é por contradição. Suponha que o sigrafo S não é equilibrado, então ele possui um ciclo negativo. Seja C o menor ciclo negativo de S . Pela hipótese, C deve possuir uma corda. Pela minimalidade de C , a corda dá origem a dois ciclos necessariamente positivos. Segue que C é positivo, o que é absurdo. $\square$

4.3 Sigrafos unitários de Cayley

Sigrafos cujos suportes são grafos unitários de Cayley aparecem pela primeira vez em [21]. Nesse artigo, apresenta-se uma caracterização para a noção de equilíbrio, a qual abordaremos logo após a seguinte definição:

Definição 4.3.1. *O sigrafo unitário de Cayley $S_n = (S_n^u, \sigma)$ é o sigrafo onde S_n^u é o grafo unitário de Cayley $X_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, U_n)$ e*

$$\sigma(ab) = \begin{cases} +, & \text{se } a \in U_n \text{ ou } b \in U_n; \\ -, & \text{se } a \notin U_n \text{ e } b \notin U_n. \end{cases}$$

Teorema 4.3.2. [21] *Se $n = p^\alpha$, onde p é primo, então o sigrafo unitário de Cayley $S_n = (S_n^u, \sigma)$ é totalmente positivo.*

Demonstração. Se $n = p^\alpha$ então, pelo Exercício 1.5.9, os elementos de U_n são precisamente os números menores que n não múltiplos de p . Suponha, por absurdo, que exista uma aresta negativa ab no grafo X_n . Pela Definição 4.3.1, existem inteiros α, β tais que $a = \alpha p$ e $b = \beta p$ são dois números menores que n e múltiplos de p . Agora, pela definição de aresta em grafo unitário de Cayley, $(\alpha - \beta)p = a - b \in U_n$. Um absurdo, pois $a - b$ é múltiplo de p . $\square$

Teorema 4.3.3. [21] *O sigrafo unitário de Cayley $S_n = (S_n^u, \sigma)$ é equilibrado se, e somente se, n é par ou $n = p^r$ para algum primo ímpar e r um inteiro positivo.*

48CAPÍTULO 4. SIGRAFOS (OU GRAFOS DE ARESTAS ROTULADAS COM SINAIS)

Demonstração. Suponha que a conclusão é falsa. Isto é, n é ímpar e tem fatores primos distintos. Assim, seja

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \text{ onde } p_1 < p_2 < \dots < p_s.$$

Caso 1: Existem primos gêmeos p_i e p_j , para algum par de índices $1 \leq i < j \leq s$. Neste caso, $p_j = p_i + 2$. Do fato que

$$(p_i + 1) - p_i = 1 \in U_n,$$

segue que p_i e $p_i + 1$ são adjacentes em S_n^u .

Também,

$$(p_i + 2) - p_i + 1 = 1 \in U_n.$$

Além do mais,

$$(p_i + 2) - p_i = 2 \in U_n$$

implica que $p_i + 2$ e p_i são adjacentes em S_n^u .

Consideremos o ciclo

$$C : (p_i, p_i + 1, p_i + 2).$$

Se $p_i + 1 \in U_n$, então C tem exatamente uma aresta negativa, a saber, $p_i p_j$. Por outro lado, se $p_i + 1 \notin U_n$ então as três aresta do ciclo são negativas. Logo, C é um ciclo negativo em S_n . Isto implica que S_n não é equilibrado.

Caso 2: Não existem primos p_i 's gêmeos.

Como $p_2 + (p_1 - 1) - p_2 = p_1 - 1 \in U_n$, temos que $p_2 + (p_1 - 1)$ e p_2 são adjacentes em S_n^u . Assim consideremos o ciclo de comprimento p_1 em S_n :

$$C' : (p_2, p_2 + 1, p_2 + 2, \dots, p_2 + (p_1 - 1), p_2).$$

Desde que $p_1 < p_2$, existe um vértice αp_1 em C' . Claramente, p_2 é adjacente a αp_1 (pois, $\alpha p_1 - p_2 < p_1$ e U_n contém todos os números menores que p_1). Agora, p_2 é adjacente a αp_1 com uma aresta negativa desde que $p_2 \notin U_n$ e $\alpha p_1 \notin U_n$. Isto implica que, ou ciclo

$$C : (p_2, p_2 + 1, p_2 + 2, \dots, \alpha p_1, p_2)$$

ou o ciclo

$$C : (\alpha p_1, \alpha p_1 + 1, \alpha p_1 + 2, \dots, p_2, p_2 + (p_1 - 1), \alpha p_1)$$

em S_n tem exatamente uma aresta negativa. Assim, C_1 ou C_2 é um ciclo negativo em S_n . Isto implica que S_n não é equilibrado.

Prova da recíproca:

Se $n = p^r$, então, pelo teorema 4.3.2 S_n é totalmente positivo e, portanto, equilibrado. Se n é par, então U_n não contém múltiplos de 2. Então pelo Teorema 2.1.27 S_n é bipartido onde todo ciclo possui um número par de arestas. Isto implica

que todo ciclo em S_n contém seus vértices consecutivos na forma alternada par-ímpar ou ímpar-par. Suponha que e_i denota um vértice par, e o_i denota um vértice ímpar. Assim, sem perda de generalidade, suponha que

$$C : (e_1, o_1, e_2, o_2, \dots, e_m, o_m, e_1)$$

é um ciclo em S_n com um número par de arestas. Note que $e_i \notin U_n$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, (pois e_i e n não são primos relativos).

Caso 1: Suponha $o_j \in U_n$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Então, por definição, todas as arestas em C são positivas.

Caso 2: Existe vértice $o_j \notin U_n$, para algum j .

Então C contém um par de arestas negativas $e_j o_j$ e $o_j e_{j+1}$, sempre que $o_j \in U_n$. Isto nos diz que as arestas negativas em C , caso existam, sempre aparecerão em quantidade par. Como o ciclo C é par, então é positivo. Sendo C arbitrário, concluímos que S_n é equilibrado. $\square$

4.4 Sihipergrafos

Uma maneira natural de estender a definição de hipergrafos para sihipergrafos é simplesmente estender a definição dada para sigrafos considerando como suporte um hipergrafo e, como conjunto de partida da função rotuladora σ , o conjunto de arestas desse hipergrafo. Assim temos:

Definição 4.4.1. Um *sihipergrafo* é um par $S_h = (S_h^u, \sigma)$ onde S_h^u é um hipergrafo $H = (V, \mathcal{E})$, chamado o hipergrafo **suporte** de S_h , e $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \{+, -\}$ é uma função do conjunto de arestas $\mathcal{E}$ no conjunto $\{+, -\}$, chamada a **função rotuladora das arestas com sinais** do sigrafo S_h .

Uma aresta $\mathbf{E} \subset V$ é **positiva** se $\sigma(\mathbf{E}) = +$. Um sihipergrafo é dito **totalmente positivo** se todas as suas arestas são positivas.

Definição 4.4.2. Um *sihipergrafo unitário de Cayley* é um par $Sh_n = (X_n, \sigma)$ onde X_n é um hipergrafo unitário de Cayley $CH(\mathbb{Z}_n, X)$ e σ é definida como segue

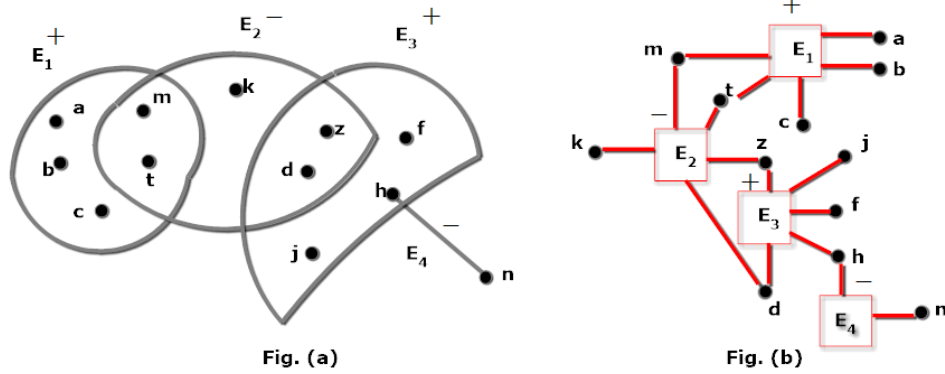
$$\sigma(\mathbf{E}) = \begin{cases} +, & \text{se } v \in U_n \cap \mathbf{E}, \text{ para algum } v \in \mathbf{E}; \\ -, & \text{se } v \notin U_n, \text{ para todo } v \in \mathbf{E}. \end{cases}$$

Teorema 4.4.3. $Sh_n = (X_n, \sigma)$ é totalmente positivo se n é uma potência de um primo ímpar.

Demonstração. Seja p^α uma potência de um primo ímpar. Logo, múltiplos de p não são elementos de U_n (note também que a recíproca é verdadeira, veja Exercício 1.5.9). Por definição, $X_n = CH(\mathbb{Z}_n, X)$, com $X \subset \mathcal{P}(U_n)$. Também por definição, uma hiperaresta é da forma $[g, g\mathbf{x}] = \{g\} \cup \{g + x : x \in \mathbf{x}\}$, onde $\mathbf{x} \in X$ e

50CAPÍTULO 4. SIGRAFOS (OU GRAFOS DE ARESTAS ROTULADAS COM SINAIS)

Figura 4.4: Representação Pictórica de um sihipergrafo



$g \in \mathbb{Z}_n$. Suponha, por absurdo, que o sihipergrafo possui uma hiperaresta negativa $[g, gx]$. Então, nenhum elemento dessa hiperaresta pertence a U_n . Em particular, $g \notin U_n$. Assim, g deve ser múltiplo de p , digamos, $g = \beta p$. Pelo mesmo motivo, existe $x \in \mathbf{x}$ e α inteiro tais que $g + x = \alpha p$. Então, temos que $x = (\alpha - \beta)p$, implicando que $x \notin U_n$. Isto é um absurdo, pois $\mathbf{x} \subset U_n$.

□

Teorema 4.4.4. *Seja $H = CH(\mathbb{Z}_n, X)$ tal que $n = 2^\alpha$, $\alpha \geq 2$ e $X = \{\mathbf{x}\}$, onde $\mathbf{x} = \{a, b\} \subset U_n$. Então, H é totalmente positivo.*

Demonstração. Note que um elemento $x \in U_n$ se, e somente se, x é ímpar (confira no Exercício 1.5.9). Suponha, por absurdo, que exista uma aresta negativa $\mathbf{E} = \{g\} \cup \{g + a, g + b\} = \{g, g + a, g + b\}$. Então, $g \notin U_n$ e, portanto, g é par. Logo, $g + a$ e $g + b$ são ambos ímpares e, portanto, pertencem a U_n . Então, $\sigma(\mathbf{E}) = +$, um absurdo.

□

Teorema 4.4.5. *Seja $H = CH(\mathbb{Z}_n, X)$ tal que $n = p^\alpha q^\beta$, onde p e q são primos gêmeos ímpares e $X = \{\mathbf{x}\}$, onde $\mathbf{x} = \{1, 2\} \subset U_n$. Então, H é totalmente positivo.*

Teorema 4.4.6. *Seja n um número ímpar cuja decomposição prima contém pelo menos dois primos distintos, e seja o sihipergrafo unitário de Cayley $Sh_n = (X_n, \sigma)$, onde $X_n = C_n^u$ e $u \in U_n$. Então, Sh_n é equilibrado.*

Demonstração. Relembre que, pelo Teorema 3.6.7, os ciclos de Hamilton C_n^u (confira notação no Teorema 2.3.17) onde $u \in U_n$ são hipergrafos unitários de Cayley. Primeiro observe que, efetivamente, existe aresta negativa no ciclo $X_n = C_n^u$. De fato, pelo Teorema 4.3.3, o hipergrafo unitário de Cayley X_n não é equilibrado. Assim, existe pelo menos uma aresta negativa no ciclo $X_n = C_n^u$. Agora, se o ciclo C_n^u contém uma hiperaresta negativa $\{u, v\}$ então, também contém a hiperaresta $\{-u, -v\}$ a qual, por sua vez, é também negativa. Assim o ciclo contém um número par de arestas negativas, implicando que o ciclo é positivo.

□

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradecemos à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo interesse em divulgar nosso trabalho. Manifestamos nossos agradecimentos ao comitê organizador do IV Colóquio de Matemática da Região Norte, pela oportunidade, bem como à Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), pela acolhida. Agradecemos também à Fundação de Amparo ao Desenvolvimento de Ações Científicas e Tecnológicas e à Pesquisa do Estado de Rondônia (FAPERO) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro. Um agradecimento especial do segundo autor à Mariana Maurício Velanga Moreira, pelo apoio e paciência.

52CAPÍTULO 4. SIGRAFOS (OU GRAFOS DE ARESTAS ROTULADAS COM SINAIS)

Referências Bibliográficas

- [1] C. BERGE *Graphs et hypergraphes*. Dunod, 1970.
- [2] P. O. BOAVENTURA NETO *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. Editora Edgard Blucher, 2006.
- [3] A. BRETTO. *Hypergraphs, an introduction*. Springer, Mathematical Engineering, 2013.
- [4] D. CARTWRIGHT e F. HARARY. Structural Balance: A generalization of Heider's theory. *Psychological Review*, 63:277–292, 1956.
- [5] G. CHARTRAND. *Graphs and Digraphs*. CRC press, 3 edition, 2010.
- [6] I. DEJTER e R.E. GIUDICI. On unitary Cayley graphs. *JCMCC* 18: 121-124, 1995.
- [7] S. DUMMIT e M. FOOT. *Abstract Algebra*. Jonh Willey and Sons, third edition, 2004.
- [8] A. GARCIA e Y. LEQUAIN. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [9] M. GOLDBARG. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier, 2012.
- [10] A. GONÇALVES. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA, 2007.
- [11] F. HARARY. *Graph Theory*, Addison Wesley, 1969.
- [12] F. HARARY. On the notion of balance of a signed graph. *Michigan Math. Journal* 2: 143-156, 1953.
- [13] D.A. HOLTON e J. SHEEHAN *The Petersen Graph*. Australian Mathematical Society, Lecture Series 7. Cambridge University press, 1993.
- [14] P. JÉGOU e S.N. NDIAYE. On the notion of cycles in hypergraphs. *Discrete Mathematics* 309: 6535-6543, 2009.

- [15] W. KLOTZ e T. SANDER. Some properties of unitary Cayley Graphs. *Electronic Journal of Combinatorics* 14:1 Research paper 45, 2007.
- [16] J. LEE e Y.S. KWON. Cayley hypergraphs and Cayley hypermaps. *Discrete Mathematics*, 333:540–549, 2013.
- [17] B. MAHESWA e L. MADHAVI. Enumeration Of Hamilton cycles and triangles in Euler Totient Cayley Grahs. *Graph Theory Notes of New York* LIX:28-31, 2010.
- [18] F. B. MARTINEZ, C. G. MOREIRA, N. SALDANHA e E. TENGAN. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Projeto Euclides, IMPA, 2011.
- [19] P. MILIES e S. PITTA COELHO. *Números: Uma introdução à Matemática*. Editora da Universidade de São Paulo, 2006.
- [20] A. PINZON. *Conjuntos y Estructuras*. Harla, 1986.
- [21] D. SINHA e P. GARG. On the unitary Cayley signed graph. *Electron. J. Combin.*, 2:18 P229,2011.
- [22] T. ZASLAVSKY. A mathematical bibliography of signed and gain graphs and allied areas. *Electronic J. Combin.*, Dynamic Surveys in Combinatorics (1998), No. DS8. Edn. 9, 3 Jun. 2015 (vi + 427 pp.).

- positiva, 49
- hipergrafo**, 33
 - k -uniforme, 34
 - trivial, 33
 - arestas parciais em, 36
 - bipartido, 36
 - ciclo em, 38
 - completo, 35
 - completo r -uniforme, 34
 - de Cayley, 39
 - de Fano, 38
 - grau máximo de, 34
 - incidente, 33
 - induzido, 36
 - matriz de incidência de, 34
 - ordem de, 33
 - rango de, 36
 - sem vértices isolados, 33
 - simples, 34
 - tamanho de, 33
 - unitário de Cayley, 40
 - vazio, 33
- hipervértices**, 33
 - adjacentes, 33
 - grau de, 34
- hipervértice**
 - isolado, 33
 - laço em, 33
- homomorfismo**
 - de grupos, 10
 - núcleo de, 10
- máximo divisor comum**, 6
- matriz**
 - de adjacência, 17
 - de incidência, 17
- número de estabilidade**, 23
- números relativamente primos**, 6
- partição**, 3
- percurso**, 17
 - fechado, 17
- plano de Fano**, 38
- polígono**, 21
- sigrafo**, 43
 - equilibrado, 44

- função rotuladora de arestas de, 44
- heterogêneo, 44
- homogêneo, 44
- matriz de adjacência de, 45
- suporte de, 44
- totalmente positivo, 44
- sihipergrafo**, 49
 - função rotuladora de arestas com sinais de, 49
 - suporte de, 49
 - totalmente positivo, 49
 - unitário de Cayley, 49
- sub-hipergrafo**, 36
- subgrafo**, 21
 - abrangente, 21
 - induzido por arestas, 21
 - induzido por vértices, 21
- subgrupo**, 9
 - normal, 9
 - normalizador, 9
- supergrafo**, 21
- suporte**, 44
- tamanho**, 15
- trilha**, 17
- vértices adjacentes**, 15
- vértice**, 16
 - ímpar, 16
 - isolado, 16
 - par, 16
 - terminal, 16

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 4 - Exercícios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Moraes Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Moraes Filho

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

- *Topologia e Análise no Espaço R^n* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguetto
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M. Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo



ISBN 978-85-8337-112-0



9 788583 371120 >