

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORDESTE



V Colóquio de Matemática
da Região Nordeste

ALGUNS RESULTADOS SOBRE SUPERFÍCIES CMC'S NO PROBLEMA DE BORDO LIVRE

MARIA ANDRADE
EDNO PEREIRA



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

SBM

ALGUNS RESULTADOS SOBRE SUPERFÍCIES CMC'S NO PROBLEMA DE BORDO LIVRE

Alguns resultados sobre superfícies CMC's no problema de bordo livre

Copyright © 2023 Maria Andrade e Edno Pereira

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice- Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita

Diretores: Walcy Santos

Jorge Herbert Soares de Lira

Daniel Gonçalves

Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Ronaldo Garcia

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Capa: Pablo Diego Regino

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)

ISBN (eBook) 978-85-8337-213-4

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Andrade, Maria

Alguns resultados sobre superfícies CMC's
no problema de bordo livre [livro eletrônico] :
V Colóquio de Matemática da Região Nordeste /
Maria Andrade, Edno Pereira. -- Rio de Janeiro, RJ :
Sbm, 2023. -- (Coleção colóquios de matemática)
PDF

Bibliografia.

ISBN 978-85-8337-213-4

1. Estabilidade 2. Geometria 3. Matemática
I. Pereira, Edno. II. Título. III. Série.

23-161522

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino 510.7

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORDESTE



V Colóquio de Matemática
da Região Nordeste

ALGUNS RESULTADOS SOBRE SUPERFÍCIES CMC'S NO PROBLEMA DE BORDO LIVRE

MARIA ANDRADE
EDNO PEREIRA

1ª EDIÇÃO
2023
RIO DE JANEIRO



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

SBM

*Para meus filhos Pedro e Clara, e meu esposo Pietro (M.A.).
À minha amada esposa Dafne (E. P.).*

SUMÁRIO

Prefácio	v
1 Conceitos Básicos de Geometria Riemanianna	1
1.1 Geometria das subvariedades	1
2 Alguns problemas de estabilidade	5
2.1 Introdução	5
2.2 Preliminares	6
2.3 Problema isoperimétrico	7
2.4 Teorema Barbosa e do Carmo	11
2.5 Alguns resultados estabilidade e bordo livre	11
3 Resultados de gap para superfícies mínimas de fronteira livre na bola unitária Euclidiana	19
3.1 Introdução	19
3.2 Resultados de Gap	21
3.3 Exemplos	24
4 Resultados de Gap para superfícies CMC de fronteira livre na bola Euclidiana	27
4.1 Introdução	27
4.2 Resultados de Gap	28
4.3 Exemplos	33

5	Resultados de Gap para superfícies CMC's de fronteira livre na bola Euclidiana com uma métrica conforme radialmente simétrica	37
5.1	Introdução	37
5.2	Preliminares	39
5.3	Demonstração do teorema principal	47
5.4	Exemplos	49
6	Alguns problemas da área e conclusão	57
6.1	Alguns problemas da área	57
6.2	Conclusão	58
Apêndices		
A	Resultados auxiliares	61
Referências		73

PREFÁCIO

Essas notas foram elaboradas como material de apoio ao minicurso *Alguns resultados sobre superfícies de curvatura média constante no problema de bordo livre* ministrado pelos autores no V Colóquio de Matemática da Região Nordeste realizado entre os dias 07 e 11 de novembro de 2022 na Universidade Federal da Paraíba.

As superfícies de curvatura média constante (CMC) e em particular, superfícies mínimas, é um tema clássico na Matemática e tem atraído a atenção de diversos pesquisadores ao longo de décadas nas áreas da própria Matemática: EDP, Topologia, Análise Geométrica além da Física. Ademais, as superfícies CMC's de fronteira livre tem despertado o interesse de muitos matemáticos nos últimos anos. Dada a importância da temática, decidimos escrever estas notas com a intenção de divulgar alguns resultados da área. Certamente é apenas uma pequena contribuição para estimular, principalmente, aos jovens nesta linda e rica área que envolve problemas relevantes.

Agradecemos ao comitê organizador e ao comitê científico pela oportunidade de participar do evento. Maria Andrade é parcialmente suportada pelo CNPq processo 403349/2021-4 e FAPITEC/SE/BRASIL. Por fim, agradecemos pelo interesse e participação de todos os inscritos no minicurso.

ARACAJU, SÃO JOÃO DEL REI, OUTUBRO de 2022

Maria Andrade
Edno Pereira

CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA RIEMANIANNA

Aqui apresentaremos alguns conceitos básicos de geometria Riemanianna necessários à apresentação do minicurso.

1.1. GEOMETRIA DAS SUBVARIEDADES

Seja Σ^k de subvariedade de uma variedade Riemanniana (M^{k+m}, g) . Em cada ponto p de Σ^k o espaço tangente $T_p M$ se decompõe como

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus (T_p \Sigma)^\perp.$$

A conexão Riemanniana de Σ^k com respeito à métrica induzida de M^{k+m} é dada por

$$\nabla_Y X = (\bar{\nabla}_Y X)^\top,$$

em que $X, Y \in T_p \Sigma$.

Um conceito importante associado à geometria de Σ^k , induzida pela geometria de (M^{k+m}, g) , é o conceito de segunda forma fundamental dada a seguir.

Definição 1.1. Seja Σ^k uma subvariedade de M^{m+k} . A segunda forma fundamental de Σ^k em M^{k+m} é uma aplicação bilinear simétrica definida como

$$B(X, Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Em um ponto $p \in \Sigma^k$, escolha um vetor normal unitário $N \in (T_p\Sigma)^\perp$. Podemos então definir uma forma bilinear simétrica em Σ^k da seguinte maneira:

$$\Pi_N(X, Y) := g(B(X, Y), N).$$

Sendo B uma aplicação bilinear simétrica, a aplicação linear

$$A_N : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma,$$

chamada de operador forma, definida por $g(A_N(X), Y) = g(B(X, Y), N)$ é auto adjunta. A equação de Weingarten relaciona Π_N com a derivada covariante de (M^{k+m}, g) através da expressão:

$$\Pi_N(X, Y) = -g(\bar{\nabla}_X N, Y).$$

Desse modo, concluímos que a aplicação A_N é dada por

$$A_N(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^\top.$$

Observação 1.2. Como as aplicações B , Π_N e A_N acima estão univocamente determinadas, costumamos usar a expressão *segunda forma fundamental* para ser referir a qualquer uma delas. Escolhendo um vetor normal unitário $N \in (T_p\Sigma)^\perp$, as aplicações A_N e Π_N são chamadas de segunda forma fundamental de Σ^k segundo o vetor normal N . Quando $m = 1$, existe apenas uma escolha (a menos de sinal) para N , e assim, escreveremos apenas A e Π para denotar A_N e Π_N respectivamente.

Seja Σ^k uma subvariedade de M^{k+m} e seja $\{E_1, \dots, E_k\}$ uma base ortonormal de $T_p\Sigma$. Definimos o vetor curvatura média de Σ^k em p da seguinte maneira,

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n B(E_i, E_i)$$

e o quadrado da norma da segunda forma fundamental por,

$$|B|^2 = \sum_{i,j=1}^k |B(E_i, E_j)|^2.$$

Consideremos agora uma subvariedade Σ^k de M^{k+1} de codimensão um. O traço do tensor Π , que é equivalente ao traço da aplicação linear auto adjunta A associada, é

$$H := \text{traço}(A) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \Pi_{ji}$$

chamado de curvatura média de Σ^n em p . Dizemos que Σ^k é uma hipersuperfície CMC (ou de curvatura média constante) se $H \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

O tensor livre de traço definido como

$$\mathring{A}(X, Y) = \Pi(X, Y) - \frac{H}{n} g(X, Y),$$

é chamado de tensor de umbilicidade (ou umbilicalidade) de Σ^n . Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p \Sigma$, definimos o quadrado da norma da segunda forma fundamental por

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\Pi(E_i, E_j)|^2,$$

e de forma semelhante,

$$|\mathring{A}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\mathring{A}(E_i, E_j)|^2 = \left(|A|^2 - \frac{H^2}{n} \right)$$

Observação 1.3. Fixe $p \in \Sigma$. Se $|A|^2(p) = 0$, então as curvaturas principais de Σ , definidas como sendo os autovalores $\{k_1, \dots, k_n\}$ de A , são todas nulas em p . De forma semelhante, se $|\mathring{A}|^2(p) = 0$, então $k_i = \frac{H}{n}$ $i = 1, \dots, n$, ou seja, as curvaturas principais nesse caso são todas iguais. Se $|A|^2 \equiv 0$ em Σ^n , dizemos que Σ^n é totalmente geodésica, e se $|\mathring{A}|^2 \equiv 0$, dizemos que Σ^n é totalmente umbílica.

Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo suave. Definimos o divergente de X sobre Σ como uma função $\text{div}_\Sigma X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} X, E_i),$$

em que $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Definimos o gradiente de f como sendo um vetor $\nabla f \in T_pM$ que cumpre

$$g(\nabla f, v) = v(f) \quad \forall v \in T_pM.$$

Sejam $\Sigma^k \hookrightarrow M$ uma imersão isométrica e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em M . O gradiente de f restrito a Σ denotado por $\nabla^\Sigma f$ é dado pela projeção de $\nabla^M f$ sobre $T_p\Sigma$. Já o laplaciano de f restrito a Σ , denotado por $\Delta_\Sigma f$, é definido por

$$\Delta_\Sigma f = \operatorname{div}_\Sigma(\nabla^\Sigma f).$$

Em termos de um referencial geodésico $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{X}(U)$, em que U é uma vizinhança de p em Σ temos

$$\Delta_\Sigma f = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f)).$$

O hessiano da função f restrita a Σ é definido como um tensor simétrico

$$(Hess_\Sigma f(p))(X, Y) = XY(f) - (\nabla_X Y)(f),$$

em que X, Y são campos tangentes a Σ e ∇ é a conexão riemanniana de Σ na métrica induzida pela imersão isométrica. De maneira equivalente podemos também definir $Hess_\Sigma f$ da seguinte forma

$$(Hess_\Sigma f(p))(X, Y) = g(\nabla_X \nabla^\Sigma f, Y).$$

ALGUNS PROBLEMAS DE ESTABILIDADE

2.1. INTRODUÇÃO

A teoria de superfícies mínimas originou com Lagrange que em 1762 considerou o problema de encontrar uma superfície de área mínima com fronteira dada por uma curva fechada sem auto interseções. Ele encontrou a Equação de Euler-Lagrange para o problema, porém não encontrou nenhuma solução além do plano. Em 1776 Jean Baptiste Marie Meusnier descobriu que o catenoide e o helicóide satisfazem a equação encontrada por Lagrange e além disso nada mais é do que a curvatura média igual a zero. Atualmente são conhecidas diversas superfícies mínimas no espaço Euclidiano. Estudar a teoria de superfícies mínimas envolve diversas áreas da Matemática: Análise Complexa, Equações Diferenciais Parciais, Geometria Conforme, Topologia, Cálculo das Variações, etc.

Assim como as hipersuperfícies mínimas, as hipersuperfícies com curvatura média constante, CMC, são os pontos críticos de um problema variacional, mais precisamente seja $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, é possível mostrar que x tem curvatura média constante se, e só se, x é um ponto crítico da n -área todas as variações com suporte compacto que preservam o volume.

Dizemos, então, que uma imersão $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ com curvatura média constante é estável se, e só se, o funcional área, denotado por $A(t)$, satisfaz $A''(0) \geq 0$ para toda variação com suporte compacto que preserve volume.

Dessa forma, surgiu naturalmente a pergunta: *quais são as superfícies compactas sem bordo com $H = \text{constante}$?* Como o único exemplo que se conhecia até então era a esfera, ficou conhecida a conjectura de Hopf: *a esfera é a única superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante.* Alguns resultados nesta direção serão comentados a seguir. H. Hopf, em 1951, provou que se M tem a topologia da esfera, então M é a esfera. Em 1956, Alexandrov, [2] mostrou que se M é mergulhada em $\mathbb{R}^3$, ou seja, não tem auto-intersecções, então M também é, neste caso, uma esfera. Em 1984, J. Barbosa e M. do Carmo [9] provaram o seguinte resultado: *Sejam M^n uma variedade compacta e $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então x é estável se, só se, $x(M^n)$ é uma esfera.* Tal trabalho abriu portas para diversos problemas interessantes.

Além disso, um interessante e importante problema variacional em Geometria Diferencial é o problema de bordo livre (*free boundary*) para hipersuperfícies com CMC, que é descrito da seguinte maneira: Dada uma variedade compacta (M^{n+1}, g) com bordo não vazio, o problema consiste em encontrar pontos críticos do funcional área entre todas as hipersuperfícies compactas $\Sigma \subset M$ com $\partial\Sigma \subset \partial M$ que divide M em dois subconjuntos de volumes prescritos. Pontos críticos para este problema são hipersuperfícies com CMC $\Sigma \subset M$ tais que o ∂M é ortogonal ao longo $\partial\Sigma$ e eles são conhecidos como hipersuperfícies com CMC com bordo livre, (ver [28], [33], [31] e [30] entre outros).

2.2. PRELIMINARES

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados importantes para o entendimento do minicurso.

Um resultado importante e clássico no contexto de superfície é o famoso Teorema de Gauss Bonnet, em que faz uma bela ligação entre a geometria e a topologia, mais precisamente se Σ é uma superfície com bordo $\partial\Sigma$, então

$$\int_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k dl = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde K é a curvatura Gaussiana de Σ , k é a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ e $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ .

Teorema 2.1. (*Teorema da divergência*) *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada e compacta. Se X é um campo vetorial, então*

$$\int_M \operatorname{div}(X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle ds,$$

onde ν é o vetor unitário normal apontando para fora da fronteira ∂M . Em particular,

$$\int_M f \Delta h dM = - \int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle dM + \int_{\partial M} f \frac{\partial h}{\partial \nu} ds.$$

2.3. PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Um problema bastante conhecido, chamado de problema isoperimétrico, é enunciado da seguinte forma: Dentre todas as superfícies fechadas, isto é, compactas e sem bordo do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ que envolve um dado volume, qual delas tem a menor área? Naturalmente a questão sugere uma abordagem de natureza variacional: Caracterizar uma superfície fechada em $\mathbb{R}^3$ que é ponto crítico do funcional área para variações que preservam o volume dado.

Nesta seção, discutiremos alguns resultados importantes para então provarmos o Teorema de Barbosa-do Carmo 1982 [9]. As demonstrações de alguns resultados serão omitidas, mas poderão ser vistas no livro de López [24].

Definição 2.2. Uma variação da imersão $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $X : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a aplicação $x_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ dada por $x_t(p) = X(p, t)$ são imersões para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, e para $t = 0$, $x_0 = x$. O campo variacional da variação $\{x_t\}$ é definido por:

$$\xi(p) = \frac{\partial X(p, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad p \in M.$$

Observação 2.3. Dizemos que uma variação de x é admissível se a aplicação diferenciável $x(t, \cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaz $x_t(p) = x(p)$ para todo $p \in \partial M$. Suponha M compacta e denote $M_t := x_t(M)$. Considere os funcionais :

$$A(t) = \int_M dM_t \quad (2.1)$$

e

$$V(t) = -\frac{1}{3} \int_M \langle N_t, x_t \rangle dM_t \quad (2.2)$$

em que dM_t denota o elemento de área em M induzido por x_t e N_t denota o vetor normal unitário de x_t . Desse modo, $A(t)$ representa a área de M_t e $V(t)$ pode ser interpretado como sendo o volume algébrico (ou volume com sinal) compreendido entre M_t e o cone sobre ∂M_t com vértice na origem.

Proposição 2.4 (Primeira variação de área). *O funcional área $A(t)$ é diferenciável em $t = 0$ e*

$$A'(0) = - \int_M H \langle N, \xi \rangle dM + \int_{\partial M} \langle \nu, \xi \rangle ds, \quad (2.3)$$

onde ν é o vetor co-normal unitário apontando para fora de M ao longo de ∂M e H é a curvatura média da imersão.

Demonstração. A prova pode ser obtida em López [24] no apêndice A. □

Definição 2.5. Dizemos que M é uma superfície com curvatura média constante (CMC) se a função curvatura média H é constante. No caso, em que $H = 0$ em M , dizemos que M é uma superfície mínima.

Exemplo 2.6. O cilindro $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = r^2\}$ e a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ são superfícies com curvatura média constante. Já o plano, catenoide e o helicóide são superfícies mínimas.

Como consequência da primeira variação de área obtemos a seguinte caracterização para superfícies mínimas:

Teorema 2.7. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície compacta. Então a imersão é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para qualquer variação admissível.*

Demonstração. Se $H = 0$, então segue de (2.3) que $A'(0) = 0$. Reciprocamente, seja $f \in C^\infty(M)$ uma função tal que $f > 0$ no $\text{int}(M)$ e $f = 0$ em ∂M . Considere

$$x_t(p) = x(p) + tf(p)H(p)N(p),$$

a qual é admissível e $\xi = fHN$. Então,

$$0 = A'(0) = \int_M H \langle N, \xi \rangle dM = \int_M H^2 f dM,$$

como $f > 0$ no $\text{int}(M)$, segue que $H = 0$ em M . □

Ou seja, uma superfície compacta é mínima se, e somente se é um ponto crítico do funcional área para qualquer variação admissível.

O próximo resultado nos mostra que o funcional volume é diferenciável em $t = 0$.

Proposição 2.8. *(Primeira variação do volume). O funcional volume $V(t)$ definido em (2.2) é diferenciável em $t = 0$ sendo*

$$V'(0) = - \int_M \langle N, \xi \rangle dM \tag{2.4}$$

Demonstração. Veja [24], Apêndice A. □

Dizemos que uma variação *preserva volume* se o funcional $V(t)$ é constante. Em particular $V'(0) = 0$. O próximo teorema fornece uma caracterização das superfícies CMC's como pontos críticos do funcional área para variações que preservam volume.

Teorema 2.9. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície compacta M . Então, M tem curvatura média constante se, e somente se, $A'(0) = 0$ para toda variação admissível que preserva volume.*

Demonstração. Veja [24], Teorema 2.1.7. □

A demonstração do teorema acima é semelhante à demonstração do Teorema 2.7. Todavia, o fato da curvatura média H não ser necessariamente nula

faz com que seja necessário uma condição adicional sobre a variação: preservar volume. Note que função do integrando em (2.4) aparece na expressão de $A'(0)$ em (2.3).

Definição 2.10. Seja M uma superfície compacta e seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão CMC. A imersão é dita ser estável se $A''(0) \geq 0$ para toda variação admissível que preserva volume, ou seja

$$A''(0) \geq 0, \forall f \in \mathcal{F} := \left\{ f \in C^\infty(M); \int_M f dA = 0 \right\}.$$

Proposição 2.11 (Segunda variação de área). *Seja M uma superfície compacta e seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante H . Se $\{x_t\}$ é a variação admissível preservando volume com $f = \langle N, \xi \rangle$, então*

$$A''(0) = - \int_M f(\Delta f + |\sigma|^2 f) dM. \quad (2.5)$$

onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami em M .

O operador $L(f) = \Delta f + |\sigma|^2 f$ é chamado de Operador de Jacobi. Se $f = 0$ em ∂M e como $\operatorname{div}(f \nabla f) = f \Delta f + |\nabla f|^2$, então o teorema da divergência nos dá:

$$A''(0) = \int_M (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) dM.$$

Exemplo 2.12. A esfera redonda, um disco planar ou uma calota esférica são estáveis. A prova destes fatos podem ser vistas em [24] nas páginas 22 e 23.

O próximo resultado é fundamental para provar o teorema de Barbosa do Carmo.

Lema 2.13. 1. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com CMC, então*

$$\Delta \langle N, x \rangle = -2H - |B|^2 \langle N, x \rangle$$

2. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão, então*

$$\Delta |x|^2 = 4 + 4H \langle N, x \rangle.$$

3. *Se $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão umbílica, M compacta, então M é a esfera.*

Demonstração. A prova pode ser obtida em López [24]. □

2.4. TEOREMA BARBOSA E DO CARMO

Nesta seção, demonstraremos o belo Teorema de Barbosa-do Carmo [9], no caso de superfícies. O caso geral pode ser encontrado com todos os detalhes em [26] ou [24].

Teorema 2.14 (Barbosa - Do Carmo). *A única superfície compacta, fechada sem bordo, CMC, estável em $\mathbb{R}^3$ é a esfera redonda.*

Demonstração. Seja M uma superfície CMC, compacta, estável em $\mathbb{R}^3$. Inicialmente, vamos encontrar uma função teste f , ou seja, $\int_M f dM = 0$. De fato, pelo item 2 do Lema 2.13, temos que $f = 1 + H\langle N, x \rangle$, satisfaz esta propriedade, pois basta integrar $\Delta|x|^2 = 4 + 4H\langle N, x \rangle$. Por outro lado, integrando $\Delta\langle N, x \rangle = -2H - |B|^2\langle N, x \rangle$, temos que

$$\int_M (2H + |B|^2 u) = 0, \text{ onde } u = \langle N, x \rangle.$$

Usando novamente o Lema 2.13 o item 1, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} A(M_t)|_{t=0} &= - \int_M f(\Delta_M f + |B|^2 f) dM \\ &= - \int_S (1 + Hu)(-2H^2 - |B|^2 Hu + |B|^2(1 + Hu)) dM \\ &= \int_M (2H^2 - |B|^2) dM \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $|B|^2 \geq 2H^2$ e vale a igualdade se, e somente se M é umbílica.

Como M é estável, então $\frac{d^2}{dt^2} A(M_t)|_{t=0} \geq 0$. Assim, $\frac{d^2}{dt^2} A(M_t)|_{t=0} = 0$. O que implica que, M é umbílica. Pelo Lema 2.13 item 3, temos que M é uma esfera. $\square$

2.5. ALGUNS RESULTADOS ESTABILIDADE E BORDO LIVRE

Nesta seção, abordaremos alguns resultados que envolvem estabilidade e o problema de bordo livre.

Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana com $\partial M \neq \emptyset$. Dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma^n \subset M^{n+1}$, com $\partial\Sigma \neq \emptyset$, é uma imersão própria (ou está propriamente imersa) se Σ é uma imersão e além disso, $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(M)$ e $\partial\Sigma \subset \partial M$. Nesse contexto, uma variação admissível de Σ é uma aplicação diferenciável $\varphi : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\varphi_t : \Sigma \times \{t\} \rightarrow M$ é uma imersão própria de Σ em M de modo que $\varphi(p, 0) = p$, para todo $p \in \Sigma$. Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ façamos $\Sigma_t := \varphi(\Sigma \times \{t\})$ e denote por ξ o campo variacional de φ , isto é, $\xi(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, p)$, $p \in \Sigma$. Considere agora os funcionais:

$$V(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t \quad (2.6)$$

e

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \varphi^* dM.$$

Isto é, $V(t)$ denota o volume de Σ_t na métrica induzida de M e $W(t)$ representa o volume com sinal compreendido entre Σ_t e Σ . Dizemos que φ é uma variação admissível que preserva volume se $W(t) = W(0) = 0$ para todo t . A primeira formula de variação para V e W fornece (veja Proposição 14 em [3] e Lema 2.1 em [9])

$$V'(0) = \int_{\Sigma} Hg(N, \xi) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} g(\nu, \xi) d(\partial\Sigma) \quad (2.7)$$

$$W'(0) = \int_{\Sigma} g(\xi, N) d\Sigma. \quad (2.8)$$

em que ν denota o vetor normal exterior à $\partial\Sigma$ e N denota o campo normal a Σ em uma orientação escolhida.

Definição 2.15. Uma imersão própria $\Sigma \subset M$ de uma hipersuperfície é dita ser *CMC de fronteira livre* em M se a curvatura média H de Σ é constante e Σ encontra ∂M ortogonalmente. No caso particular em que $H = 0$ dizemos que Σ é uma hipersuperfície *mínima de fronteira livre* em M .

As fórmulas de variação (2.7), (2.8) acima captam dois conceitos importantes da hipersuperfície Σ com respeito à geometria de M : sua curvatura média, e o ângulo de contato entre Σ e ∂M . Isso justifica a importância da caracterização dada a seguir.

Proposição 2.16. *Uma imersão própria de uma hipersuperfície $\Sigma \subset M$ é ponto crítico do funcional $V(t)$ em (2.6) se, e somente se, é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em M . Ademais, se restringirmos Σ apenas a variações admissíveis que preservam volume, Σ será ponto crítico de $V(t)$ se, e somente se, é CMC de fronteira livre em M .*

Em 1995, Ros e Vergasta [31] provaram um resultado interessante, entre outros, que afirma que uma superfície, Σ , compacta, orientável, estável com bordo livre na bola fechada $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ deve ser um equador planar, uma calota esférica ou uma superfície de gênero 1 com no máximo duas componentes no bordo. Mais precisamente, foi provado o seguinte resultado.

Teorema 2.17 (Ros - Vergasta - 95, [31]). *Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada. Se $\Sigma \subset \mathbb{B}$ é uma imersão CMC, compacta, orientável, estável com bordo livre. Então $\partial\Sigma$ é mergulhado e tem somente as três possibilidades*

1. Σ é um disco totalmente geodésico.
2. Σ é uma calota esférica;
3. Σ tem gênero 1 com no máximo duas componentes no bordo.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser vista em [31]. □

Surge então a seguinte pergunta: Sob as condições do Teorema de Ros-Vergasta é possível eliminar o item 3? Em 2017, este questionamento teve resposta positiva. Nunes [29], usando um balanceamento modificado do tipo Hersch, provou que Σ não pode ter gênero 1. Foi provado o seguinte resultado:

Teorema 2.18 (Nunes - 17, [29]). *Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada. Se $\Sigma \subset \mathbb{B}$ é uma imersão CMC, compacta, orientável, estável com bordo livre. Então, Σ tem gênero zero.*

Como consequência dos teoremas de Ros-Vergasta 2.17 e Nunes 2.18, foi obtida a classificação completa de superfícies imersas compactas, CMC, estáveis com bordo livre na bola fechada de $\mathbb{R}^3$.

Corolário 2.19 (Nunes - 17, [29]). *Os discos totalmente umbílicos são as únicas superfícies imersas compactas, CMC, estáveis com bordo livre na bola fechada de $\mathbb{R}^3$.*

O Corolário 2.19 pode ser visto como um resultado análogo ao Teorema de Barbosa e do Carmo [9] para superfícies imersas, compactas, estáveis, CMC no espaço Euclidiano.

O Teorema 2.18 é uma consequência do resultado mais geral.

Teorema 2.20 (Nunes - 17, [29]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio compacto convexo. Suponha que a segunda forma fundamental $II^{\partial\Omega}$ de $\partial\Omega$ satisfaça a seguinte condição*

$$kh \leq II^{\partial\Omega} \leq (3/2)kh,$$

para alguma constante $k > 0$, onde h denota a métrica induzida em $\partial\Omega$. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície imersa, orientável, compacta e estável com bordo livre, então Σ tem gênero zero e o $\partial\Sigma$ tem no máximo duas componentes conexas.

Um dos pontos chaves da demonstração deste resultado é o seguinte resultado:

Proposição 2.21 (Nunes - 17, [29]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio compacto convexo. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície imersa, orientável, compacta e estável com bordo livre, então*

$$\mathcal{Q}^0(\phi, \phi) = \int_{\Sigma} (|\nabla\phi|^2 - |A|^2\phi^2) da \geq 0$$

para toda ϕ tal que $\phi = 0$ no $\partial\Sigma$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser vista em [29]. □

A seguir daremos uma ideia da demonstração do Teorema 2.20, os detalhes podem ser vistos em [29].

Demonstração. (Ideia da prova do Teorema 2.20) Sabemos por um resultado de A. Gabard [17] que existe uma aplicação conforme $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{D}^2$ de grau no máximo $g + r$, onde $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco fechado unitário, g e r denotam o gênero de Σ e número de componentes conexas de $\partial\Sigma$. Como $\mathbb{D}^2$ é conformemente equivalente ao hemisfério $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de raio um, podemos admitir que a aplicação $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_+^2$ e usando um difeomorfismo conforme de $\mathbb{S}_+^2$, podemos supor que

$$\int_{\Sigma} \varphi_i da = 0, \quad i = 1, 2.$$

Como a imersão é estável, temos que

$$\int_{\Sigma} (|\nabla \varphi_i|^2 - |A|^2 \varphi_i^2) da - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Omega}(N, N) \varphi_i^2 dl \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Visto que $\varphi(\partial\Sigma) = \partial(\mathbb{S}_+^2)$, segue $\varphi_3|_{\partial\Sigma} = 0$. Portanto, de (2.9), obtemos que

$$\int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Omega}(N, N) dl + \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} |A|^2 \varphi_i^2 da \leq \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} |\nabla \varphi_i|^2 da.$$

Usando a Proposição 2.21, tem-se que

$$\int_{\Sigma} |A|^2 \varphi_3^2 da \leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi_3|^2 da.$$

Logo,

$$\int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Omega}(N, N) dl + \int_{\Sigma} |A|^2 da \leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 da. \quad (2.10)$$

Como a energia de Dirichlet é menor do que $4\pi(g + r)$, ou seja,

$$\int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 da \leq 4\pi(g + r) \quad (2.11)$$

e desde que $|A|^2 = H^2 - 2K$, onde K é a curvatura Gaussiana de Σ , de (2.10), segue

$$\int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Omega}(N, N) dl + \int_{\Sigma} (H^2 - 2K) da \leq 4\pi(g + r). \quad (2.12)$$

Usando o Teorema de Gauss-Bonnet e (2.12), temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Omega}(N, N)dl + \int_{\Sigma} H^2 da &\leq 4\pi(g + r) + 2 \int_{\Sigma} K da \\ &\leq 4\pi(g + r) + 4\pi(2 - 2g - r) - 2 \int_{\partial\Sigma} k_g dl, \end{aligned}$$

onde k_g é a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$. Logo,

$$\int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Omega}(N, N)dl + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g dl + \int_{\Sigma} H^2 da \leq 4\pi(2 - g). \quad (2.13)$$

Como $II^{\partial\Omega}(N, N) \geq k$, então a desigualdade (2.13), torna-se

$$4\pi(2 - g) \geq \int_{\Sigma} H^2 da + 3kL(\partial\Sigma),$$

onde usamos que $k_g = II^{\partial\Omega}(T, T) \geq k$, onde T denota um vetor tangente unitário a $\partial\Sigma$. Usando a hipótese que $II^{\partial\Omega} \geq (3/2)kh$ e o Corolário 5.8 de [34] o qual fornece

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 da + \frac{3}{2} kL(\partial\Sigma) \geq 2\pi, \quad (2.14)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, Σ é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica, caso em que a demonstração estaria completa.

Agora, suponha que a desigualdade em (2.14) ocorra. Daí, usando (2.13), teríamos que $4\pi(2 - g) > 4\pi$, isto é, $g < 1$, donde o gênero de Σ é zero.

Seguindo as ideias de Ros e Vergasta no Teorema 5 [31], teremos que $r < 3$. Logo, Σ tem gênero zero e $\partial\Sigma$ tem no máximo duas componentes conexas. Os detalhes também podem ser obtidos em [32]. $\square$

Ros e Vergasta [31] estudaram hipersuperfícies estáveis, CMC com bordo livre na bola $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Eles provaram, entre outros resultados, o seguinte Teorema

Teorema 2.22 (Ros-Vergasta[31]). *Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma bola fechada. Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}$ uma hipersuperfície com bordo livre, estável CMC com bordo*

mergulhado em $\mathbb{B}$. Se $L \geq A(\Sigma)$, onde L denota o comprimento do bordo $\partial\Sigma$ e $A(\Sigma)$ é a área de Σ . Então, Σ é totalmente geodésica ou estrelada com respeito ao centro da bola.

Motivado por este resultado e também pelo trabalho de Nunes [29], Barbosa [7] mostrou que a condição $L \geq A$, é sempre satisfeita sob as condições do Teorema de Ros-Vergasta. Mais precisamente, ele provou o seguinte resultado.

Teorema 2.23 (Barbosa, [7]). *Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma bola unitária fechada. Se $\Sigma \subset \mathbb{B}$ é uma hipersuperfície estável, CMC, com bordo livre na bola B , então*

$$\frac{nH^2}{2} \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) da + nA(\Sigma) \leq L \leq nA(1 + H) \quad (2.15)$$

onde a orientação de Σ é tal que $H \geq 0$. A igualdade do lado esquerdo de (2.15) ocorre se, e somente se, Σ é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica. Em particular, se $\partial\Sigma$ é um mergulho, então Σ é totalmente geodésica ou estrelada com respeito ao centro da bola.

Demonstração. (Ideia da prova) A demonstração desse resultado consiste em um primeiro passo provar um lema de estabilidade do tipo Nunes, ou seja,

Lema 2.24 (Lema de estabilidade tipo Nunes [7]). *Seja B um domínio compacto convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$ e Σ uma hipersuperfície imersa, estável, CMC com bordo livre em B . Se $f \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Sigma$, então*

$$I(f, f) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) da \geq \frac{1}{n+1} \left(\frac{\int_{\Sigma} f da}{A(\Sigma)} \right)^2 \int_{\partial\Sigma} II(N, N) ds.$$

e a igualdade ocorre para uma função não nula f se, e somente se, Σ é totalmente geodésica. Em particular, se $f \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Sigma$, então

$$I(f, f) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - |A|^2 f^2) da \geq 0$$

No segundo passo, ver que a função suporte $u = \langle x, N \rangle$ de Σ , onde x é a imersão de Σ em B satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma u &= -nH - u|A_\Sigma|^2 & \text{em } \Sigma, \\ u &= 0, & \text{no } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.16)$$

Depois, calculando o divergente da componente tangencial $x - uN$ de x , temos que

$$\operatorname{div}(x - uN) = n + nHu.$$

Agora pelo Teorema da divergência, segue que

$$L = n \left(A(\Sigma) + \int_\Sigma H u da \right)$$

e usando que $u = 0$ em $\partial\Sigma$ e o Lema de estabilidade do Tipo Nunes, segue que

$$nH \int_\Sigma u da = \int_\Sigma (|\nabla u|^2 - |A|^2 u^2) da \geq 0.$$

Em particular, obtém-se que $L \geq nA(\Sigma)$. Agora, seguindo as ideias desenvolvidas em [31], prova-se que $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ em Σ . Por fim, pelo princípio do máximo para funções subharmônicas, obteremos que u é estritamente positiva em $\operatorname{int}(\Sigma)$ e $u = 0$ no $\partial\Sigma$. Analisando o sinal da função $u - \frac{H}{2}(1 - |x|^2)$, pelo princípio do máximo, segue o resultado. $\square$

RESULTADOS DE GAP PARA SUPERFÍCIES MÍNIMAS DE FRONTEIRA LIVRE NA BOLA UNI- TÁRIA EUCLIDIANA

Neste capítulo, apresentaremos o resultado de gap para o quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma superfície mínima de fronteira livre na bola unitária Euclidiana tridimensional que foi obtido por Lucas Ambrozio e Ivaldo Nunes em [4].

3.1. INTRODUÇÃO

Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana com $\partial M \neq \emptyset$, e considere uma imersão própria de uma hipersuperfície $\Sigma \subset M^{n+1}$. Dizemos que Σ é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em M se o vetor curvatura média de Σ tem comprimento nulo e $\partial\Sigma$ encontra ∂M ortogonalmente. Vimos na Proposição 2.16 que Σ é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre se, e somente se, Σ é ponto crítico do funcional área para qualquer variação admissível de Σ .

Considerando $M := \mathbb{B}_1^3$, isto é, a bola unitária Euclidiana centrada na origem, um exemplo trivial de superfície mínima de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$, é o *disco equatorial plano* obtido da intersecção de $\mathbb{B}_1^3$ com um plano passando pela origem. Um exemplo não trivial é o *catenoide crítico* obtido pela rotação de uma porção da catenária $y = a \cosh(x/a)$ para um valor apropriado de $a > 0$ e $x \in [-T_0, T_0]$ em torno do eixo x .

Os estudos sobre superfícies mínimas de fronteira livre concentram-se basicamente na obtenção de resultados de existência e rigidez. Por exemplo, a

existência de um disco mínimo de fronteira livre em domínios convexos de $\mathbb{R}^3$ foi obtido por Struwe [33] e por Gruter-Jost em [18, 19]. A existência de uma superfície mínima de fronteira livre com topologia de um anel em uma classe de domínios convexos do $\mathbb{R}^3$ foi garantida por [25].

Considerando agora a bola unitária Euclidiana $\mathbb{B}_1^3$, os resultados de existência para uma superfície mínima de fronteira livre $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3$ é garantido para variados tipos topológicos. Por exemplo, Fraser-Schoen [16] mostraram a existência de superfícies mínimas de fronteira livre $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3$ com gênero zero e n componentes no bordo para qualquer $n \geq 3$. Posteriormente, Folha-Pacard-Zolotareva [14] mostraram a partir de um n suficientemente grande, existe uma superfície mínima de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$ de gênero $g = 1$ e n componentes no bordo. Para qualquer valor do gênero $g \geq 1$ a existência de uma superfície mínima de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$ foi garantida por Ketover em [21].

Para resultados de rigidez, citamos o clássico Teorema de Nitsche [28] que afirma que *o disco equatorial plano é a única superfície mínima de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$ com a topologia de um disco*. Na verdade, o Teorema de Nitsche afirma algo a mais: *as superfícies CMC's de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$ com topologia de disco são os caps esféricos e os discos equatoriais planos*.

Na próxima seção apresentaremos um importante resultado de rigidez obtido por Ambrozio-Nunes [4] no contexto de superfícies mínimas de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$ o qual servirá de inspiração para os resultados apresentados nos próximos capítulos. Antes, mencionamos o clássico teorema Chern-do Carmo-Kobayashi [12] que, em certo sentido, se assemelha com o Teorema de Ambrozio-Nunes.

Teorema 3.1 (Chern-do Carmo-Kobayashi'1970, [12]). *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima fechada imersa isometricamente na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Suponha que a segunda forma fundamental A de Σ^n satisfaça*

$$|A|^2 \leq n.$$

Então, ocorre uma das duas situações;

$$1) |A|^2 \equiv 0 \text{ e } \Sigma^n \text{ é um equador } \mathbb{S}^n \text{ de } \mathbb{S}^{n+1},$$

2) ou $|A|^2 \equiv n$ e Σ^n é um toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n} := \mathbb{S}_{\lambda_1}^m \times \mathbb{S}_{\lambda_2}^{n-m}$, em que $\lambda_1 = \sqrt{\frac{m}{n}}$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{n-m}{n}}$ e $1 \leq m \leq n-1$.

3.2. RESULTADOS DE GAP

Teorema 3.2. (Ambrozio-Nunes, [4]) *Seja Σ uma superfície mínima, compacta de fronteira livre em $\mathbb{B}^3$. Suponha que a desigualdade*

$$|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2 \quad (3.1)$$

seja satisfeita em todo ponto $x \in \Sigma$. Então, precisamente uma das situações ocorre:

- i) $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \equiv 0$ e nesse caso, Σ é o disco plano equatorial;
- ii) ou $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 = 2$ em algum ponto $x \in \Sigma$ e nesse caso Σ é o catenoide crítico.

A prova do teorema acima é baseada em nos seguintes lemas:

Lema 3.3. *Seja $f : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|^2/2$. Sob as condições do Teorema 3.2 temos que o hessiano de f restrita a Σ é positivo semi-definido, isto é,*

$$\text{Hess}_\Sigma f(p)(Y, Y) \geq 0, \forall Y \in T_p \Sigma \text{ e } p \in \Sigma \quad (3.2)$$

Demonstração. Denote por $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^3$ e por ∇ a conexão de Σ induzida por $\bar{\nabla}$. Então,

$$\begin{aligned} \text{Hess}_\Sigma f(x)(Y, Z) &= \frac{1}{2} (YZ(|\vec{x}|^2) - (\nabla_Y Z)(|\vec{x}|^2)) \\ &= (Y \langle Z, \vec{x} \rangle - \langle \nabla_Y Z, \vec{x} \rangle) \\ &= (\langle Z, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z, \vec{x} \rangle) \\ &= (\langle Z, Y \rangle + \langle A(Y), Z \rangle \langle \vec{x}, N \rangle). \end{aligned}$$

Seja $\{E_1, E_2\}$ um frame local ortonormal tal que $A(E_i) = k_i E_i$ em que k_i denota a i -ésima curvatura principal de Σ . Segue diretamente que os autovalores do hessiano $\text{Hess}_\Sigma f$ são dados por

$$\lambda_1 = 1 + k_1 \langle \vec{x}, N \rangle \text{ e } \lambda_2 = 1 + k_2 \langle \vec{x}, N \rangle \quad (3.3)$$

Podemos checar facilmente que a hipótese (3.1) garante que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$, isto é, λ_1 e λ_2 tem o mesmo sinal. Como Σ é mínima, decorre que $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$, e portanto, λ_1 e λ_2 são ambos não negativos, de onde segue (4.2) $\square$

Lema 3.4. *Sob as condições do Teorema 3.2, considere conjunto*

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma; |p| = \min_{x \in \Sigma} |x|\}. \quad (3.4)$$

Então, precisamente uma das seguintes situações ocorre;

i) $\mathcal{C}$ contém um único ponto $p \in \Sigma$ e nesse caso, Σ é o disco plano equatorial;

ii) ou $\mathcal{C}$ é uma geodésica simples fechada e nesse caso, Σ é homeomorfa a um anel.

Demonstração. Primeiro, mostraremos que o conjunto $\mathcal{C}$ é totalmente convexo. De fato, suponha que sejam dados pontos $p, q \in \mathcal{C}$ e uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. A condição 3.1 no Lema 3.3 garante que $\text{Hess}_\Sigma f \geq 0$ e portanto $(f \circ \gamma)''(t) \geq 0$, isto é, $(f \circ \gamma)$ é uma função convexa no intervalo $[0, 1]$. Como $(f \circ \gamma)$ atinge o mínimo em $t = 0$ e em $t = 1$, devemos ter $(f \circ \gamma)(t) \equiv \min_\Sigma f$ e portanto, $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$.

Note que o gradiente de f em $\mathbb{B}^3$ é dado por $\bar{\nabla} f(x) = x$. Assim, a direção de crescimento de f aponta na direção radial. Como $\mathcal{C}$ é o conjunto de mínimo de f em Σ , devemos ter $\mathcal{C} \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$, isto é, $\mathcal{C}$ está contido no interior de Σ .

Temos duas situações possíveis:

i) Existe um único ponto $p \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar que Σ é homeomorfa a um disco. De fato, suponha que existe uma classe de homotopia não trivial $[\alpha] \in \pi(\Sigma, p)$. A condição de fronteira livre garante que o bordo $\partial\Sigma$ é estritamente convexo, e portanto, podemos encontrar um loop geodésico $\gamma \in [\alpha]$. Sendo $\mathcal{C}$ totalmente convexo, devemos ter $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Por hipótese, $\mathcal{C} = \{p\}$ concluímos que $[\alpha]$ é a classe de homotopia trivial, contradição. Portanto, Σ é homeomorfa a um disco. Segue então do Teorema de Nitsche [28] que Σ é um disco equatorial plano.

ii) O conjunto $\mathcal{C}$ contém mais de um ponto. Vamos mostrar nesse caso que Σ é homeomorfa a um anel. De fato, note primeiramente que Σ não pode ser

homeomorfa a um disco, pois nesse caso o teorema de Nitsche garante que Σ é um disco equatorial plano, contrariando a hipótese que $\mathcal{C}$ contém mais de um ponto. Considere então uma classe de homotopia não trivial $[\alpha] \in \pi(\Sigma, p)$ em que $p \in \mathcal{C}$. Como anteriormente, podemos encontrar um loop geodésico tal que $\gamma \in [\alpha]$. Se mostrarmos que $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ então concluiremos que γ é uma geodésica simples fechada com $\mathcal{C} = \gamma([0, 1])$ e nesse caso, todo loop geodésico com base em p está contido em $\mathcal{C}$, e consequentemente, $\pi(\Sigma, p) = \mathbb{Z}$. Suponha então que $\gamma'(0) \neq \gamma'(1)$. Dado ε suficientemente pequeno, considere o conjunto U_ε das curvas β_δ que ligam os pontos $\gamma(1 - \delta)$ e $\gamma(\delta)$ com $0 < \delta < \varepsilon$. Como $\mathcal{C}$ é totalmente convexo, devemos ter $U_\varepsilon \subset \mathcal{C}$. Assim, o aberto $\text{int}(\mathcal{U}_\varepsilon)$ contrariando o fato de Σ ser uma superfície mínima. $\square$

Demonstração. (**Teorema 3.2**) Temos duas situações possíveis:

i) A desigualdade 3.1 é estrita, e nesse caso, a função $(f \circ \gamma)$ no Lema 3.4 anterior é estritamente convexa. Consequentemente, o conjunto $\mathcal{C}$ contém um único ponto e o item *i)* do Teorema 3.2 segue do item *i)* do Lema 3.4.

ii) Ocorre a igualdade em 3.1 em algum ponto $p \in \Sigma$. Decorre então do Teorema de Nitsche que Σ não é homeomorfa a um disco. Pelo Lema 3.4, Σ é homeomorfa a um anel sendo $\mathcal{C}$ uma geodésica simples fechada. Vamos mostrar então que Σ é um catenoide crítico. Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \Sigma$ uma parametrização de $\mathcal{C}$ pelo comprimento de arco e seja $R > 0$ tal que $R^2/2 = \inf_\Sigma f$. Considere agora a esfera $\mathbb{S}_R$ de raio R e centrada na origem. Como $\Sigma \subset \{x \in \mathbb{B}^3; |x| \geq R\}$ e $\gamma([0, l]) = \Sigma \cap \mathbb{S}_R$, temos que $T_{\gamma(t)}\Sigma = T_{\gamma(t)}\mathbb{S}_R$ para todo $t \in [0, l]$. Sendo γ uma geodésica em Σ , concluímos que γ é também uma geodésica em $\mathbb{S}_R$ e portanto, um grande círculo.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que o vetor unitário canônico e_3 do $\mathbb{R}^3$ é ortogonal ao plano π que contém o grande círculo $\gamma([0, l])$. Desse modo, $\{\gamma'(t), e_3\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}\Sigma$ para cada $t \in [0, l]$. Seja $V = x \wedge N(x)$ o campo vetorial sobre Σ , em que $\wedge$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Considere então a função de Jacobi $u(x) = \langle V, e_3 \rangle$, logo

$$\Delta_\Sigma u + |A|^2 u = 0, \text{ em } \Sigma, \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = u \text{ sobre } \partial \Sigma.$$

Note que $u|_\gamma \equiv 0$, isto é, $\gamma([0, l]) \subset u^{-1}(0)$ e consequentemente,

$$du(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \forall t \in [0, l]. \quad (3.5)$$

Como Σ é tangente a $\mathbb{S}_R$ ao longo de γ , temos que $T_{\gamma(t)}\Sigma$ é paralelo a $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}_R$ para cada t . Sendo $\gamma'(t)$ e e_3 direções principais $\mathbb{S}_R$ em $\gamma(t)$ decorre que $\gamma'(t)$ e e_3 são também direções principais de Σ em $\gamma(t)$ para qualquer que seja $t \in [0, l]$. Desse modo, devemos ter $dN_{\gamma(t)} \cdot e_3$ paralelo a e_3 e por essa razão,

$$du(\gamma(t)) \cdot e_3 = \langle e_3 \wedge N(\gamma(t)), e_3 \rangle + \langle \gamma(t) \wedge dN_{\gamma(t)} \cdot e_3, e_3 \rangle = 0. \quad (3.6)$$

Pelas identidades (3.5) e (3.6) segue que todo ponto sobre a curva γ é um ponto crítico de u . Desse modo, concluímos que a função u é identicamente nula, pois caso contrário teríamos uma contradição com o Teorema de S.Y Cheng [11]. Note que pela maneira como definimos a função u o fato dela ser identicamente nula implica que para cada ponto $p \in \Sigma$, o vetor posição x em p , o vetor normal $N(p)$ e o vetor e_3 estão sempre no mesmo plano, o que significa que a superfície Σ é de rotação.

Sendo Σ uma superfície mínima de rotação homeomorfa a um anel concluímos que Σ está contida em uma porção do catenoide. Além disso, sendo Σ mínima de fronteira livre na bola unitária Euclidiana, concluímos que Σ é o catenoide crítico. $\square$

3.3. EXEMPLOS

Considere $X : [-t_0, t_0] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma porção do catenoide dada por

$$X(t, \theta) = (a_0 \cosh(t) \cos(\theta), a_0 \cosh(t) \sin(\theta), a_0 t),$$

em que t_0 é a única solução positiva da equação $t \sinh(t) = \cosh(t)$ e $a_0 = (t_0 \cosh(t_0))^{-1}$. As constantes a_0 e t_0 são escolhidas de modo que $X([-t_0, t_0] \times [0, 2\pi])$ esteja contida na bola Euclidiana $\mathbb{B}^3$ encontrando o bordo $\partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente. Um cálculo simples fornece:

$$|A|^2 = \frac{2}{a_0^2 \cosh^4(t)} \text{ e } \langle x, N \rangle = a_0^2 \left(1 - \frac{t \sinh(t)}{\cosh(t)} \right)^2.$$

Consequentemente,

$$|A|^2 \langle x, N \rangle^2 = \frac{2}{\cosh^6(t)} (\cosh(t) - t \sinh(t))^2 \leq 2,$$

em particular, para $|t| \leq t_0$.

RESULTADOS DE GAP PARA SUPERFÍCIES CMC DE FRONTEIRA LIVRE NA BOLA EUCLIDIANA

Neste capítulo, vamos descrever como os resultados de Ambrozio-Nunes descritos no Capítulo 3 podem ser obtidos no contexto de superfícies CMC de fronteira livre na bola unitária Euclidiana.

4.1. INTRODUÇÃO

Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3$ uma imersão própria de uma superfície na bola Euclidiana, isto é, Σ é uma imersão tal que, $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\mathbb{B}_1^3)$ e $\partial\Sigma \subset \partial\mathbb{B}_1^3$. Suponha que Σ divida o volume de $\mathbb{B}_1^3$ em duas partes V_1 e V_2 . Agora, fixe V_i . Dizemos que Σ é uma *superfície CMC de fronteira livre* em $\mathbb{B}_1^3$ se o vetor curvatura média de Σ tem comprimento constante e $\partial\Sigma$ encontra o $\partial\mathbb{B}_1^3$ ortogonalmente. Decorre da Proposição 2.16 que Σ é CMC de fronteira livre se, e somente se, Σ é ponto crítico do funcional área de Σ para variações admissíveis que preservam o volume V_i .

Exemplos de superfícies CMC's ($H \neq 0$) de fronteira livre em $\mathbb{B}_1^3$ são mais raros e vamos limitar-nos a apresentar apenas dois: caps esféricos e porções de superfícies de Delaunay (veja seção 4.3).

Nosso objetivo agora é obter um resultado de rigidez para os exemplos no parágrafo anterior assim como Ambrozio-Nunes classificou o disco equatorial plano e o catenoide crítico no caso mínimo. A motivação para essa generalização é o teorema a seguir.

Teorema 4.1 (Alencar-do Carmo'1994, [1]). *Seja Σ^n uma hipersuperfície fechada de curvatura média constante $H > 0$ imersa isometricamente na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Suponha que o tensor de umbilicidade $\mathring{A} = \Pi - \frac{H}{n}g_{\Sigma^{n+1}}$ de Σ^n satisfaça*

$$|\mathring{A}|^2 \leq C(n, H),$$

em que $C(n, H)$ denota uma constante que depende apenas de n e H . Então, ocorre uma das duas situações;

- 1) $|\mathring{A}|^2 \equiv 0$ e Σ^n é totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{n+1}$,
- 2) ou $|\mathring{A}|^2 \equiv C(n, H)$ e Σ^n é um toro $\mathbb{T}_{n,H} := \mathbb{S}_{\lambda_1}^{n-1} \times \mathbb{S}_{\lambda_2}^1$, em que $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \sqrt{1 - r^2}$ e $0 < r < 1$.

4.2. RESULTADOS DE GAP

Apresentaremos agora o principal teorema desse capítulo.

Teorema 4.2 (Barbosa-Cavalcante-Pereira, [8]). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC compacta de fronteira livre tal que a condição*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2 \quad (4.1)$$

seja satisfeita sobre Σ . Então, uma das duas situações deve ocorrer;

- i) $|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \equiv 0$ e Σ é uma calota esférica,
- ii) ou $|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 = \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ é parte de uma superfície de Delaunay.

Lema 4.3. *Seja $f : \Sigma \subset \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|^2/2$. Sob as condições do Teorema 4.2 temos que o hessiano de f restrita a Σ é positivo semi-definido, isto é,*

$$\text{Hess}_{\Sigma} f(p)(Y, Y) \geq 0, \forall Y \in T_p \Sigma \text{ e } p \in \Sigma \quad (4.2)$$

No Lema 3.3 obtivemos os autovalores

$$\lambda_1 = 1 + k_1 \langle \vec{x}, N \rangle \text{ e } \lambda_2 = 1 + k_2 \langle \vec{x}, N \rangle \quad (4.3)$$

do hessiano $\text{Hess}_\Sigma f(x)$. A fim de concluir que $\text{Hess}_\Sigma f(x) \geq 0$, precisamos mostrar que λ_1 e λ_2 são ambos não negativos. Segue da condição 4.1 que,

$$\begin{aligned} 4\lambda_1\lambda_2 &= 4(1 + k_1 \langle \vec{x}, N \rangle)(1 + k_2 \langle \vec{x}, N \rangle) \\ &= 4 + 4H \langle \vec{x}, N \rangle + 4k_1k_2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \\ &= 4 + 4H \langle \vec{x}, N \rangle + 2(H^2 - |A|^2) \langle \vec{x}, N \rangle^2 \\ &= (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2 - 2|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que λ_1 e λ_2 possuem o mesmo sinal. A conclusão segue se mostrarmos que pelo menos um λ_i é não negativo. Faremos isso verificando que a função v , definida sobre Σ , dada por

$$v := \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle,$$

cumpra $v(p) \geq 0 \ \forall p \in \Sigma$. Vamos assumir que Σ não é totalmente umbílica (caso contrário, Σ será uma calota esférica e a verificação é um cálculo simples). Suponha que para algum ponto $p \in \Sigma$ tenhamos $v(p) < 0$. Como Σ encontra $\partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente, temos que $v = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle = 2 > 0$ sobre $\partial\Sigma$. Escolha $q \in \partial\Sigma$ e seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma^2$ uma curva suave em Σ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$ (veja fig. 4.1). Como v muda de sinal sobre α , existe um ponto p_0 sobre $\alpha([0, 1])$ tal que $v(p_0) = 0$ e mais, podemos escolher p_0 de maneira que para algum ε pequeno e t_0 tal que $\alpha(t_0) = p_0$ tenhamos $v(\alpha(t)) < 0$ para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ e $v(\alpha(t)) > 0$ para $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$. Como $0 = v(p_0) = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle$, devemos ter $\langle \vec{x}, N \rangle(p_0) \neq 0$ e assim, a desigualdade (4.1) diz que $|\mathring{A}|^2(p_0) = 0$ e portanto p_0 é um ponto umbílico de Σ . Como assumimos que Σ não é totalmente umbílica, p_0 é isolado (**Teorema 2.2.2**, [24]). Seja $\mathbb{D}_{r_0}(p_0)$ um disco geodésico de raio r_0 centrado em p_0 de modo que p_0 seja o único ponto umbílico em $\mathbb{D}_{r_0}(p_0)$. Podemos escolher ε suficientemente pequeno de modo que $\alpha(t) \in \mathbb{D}_{r_0}(p_0) \ \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Escolha $\tilde{r}_0 < r_0$ tal que $\alpha(t_0 - \varepsilon), \alpha(t_0 + \varepsilon) \notin \mathbb{D}_{\tilde{r}_0}(p_0)$. Considere o anel $\mathcal{A} = \mathbb{D}_{r_0}(p_0) \setminus \mathbb{D}_{\tilde{r}_0}(p_0)$ e seja β um caminho em $\mathcal{A}$ ligando os pontos $\alpha(t_0 - \varepsilon)$ e $\alpha(t_0 + \varepsilon)$. Como v muda de sinal ao longo de β , existe um ponto $\tilde{q} \in \mathbb{D}_{r_0}(p_0)$ tal que $v(\tilde{q}) = 0$ e assim $|\mathring{A}|^2(\tilde{q}) = 0$ o que contradiz a hipótese de p_0 ser o único ponto umbílico em $\mathbb{D}_{r_0}(p_0)$. Concluímos

assim que não existe um ponto $p \in \Sigma^2$ tal que $v(p) < 0$ e portanto $v \geq 0$ sobre Σ

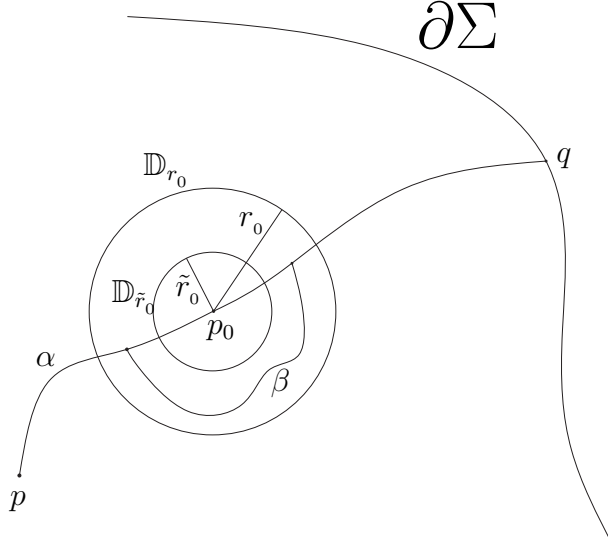


Figura 4.1: Análise do sinal da função v .

Lema 4.4. *Considere as mesmas condições do Teorema 4.2. Então, o conjunto*

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma : f(p) = \min_{\Sigma} f\}$$

é totalmente convexo, isto é, qualquer arco geodésico ligando dois pontos em $\mathcal{C}$ está inteiramente contido em $\mathcal{C}$.

Demonstração. Sejam $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$. A condição de fronteira livre garante que o bordo $\partial\Sigma$ é estritamente convexo. Logo, existe uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$. Considere então a função $h(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Como, $\text{Hess}_{\Sigma} f \geq 0$, devemos ter $h'' \geq 0$. Como h atinge um mínimo em $t = 0$ e $t = 1$, temos $h(t) \equiv \min_{\Sigma} f$ e portanto, $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. $\square$

Demonstração. (**Teorema 4.2**)

Vamos supor duas situações possíveis:

i) A desigualdade (4.1) é estrita. Vamos mostrar nesse caso que Σ é uma calota esférica. De fato, primeiro note que a desigualdade estrita em (4.1) implica que o hessiano $\text{Hess}_\Sigma f$ no Lema 4.4 é estritamente positivo e consequentemente, o conjunto $\mathcal{C}$ tem apenas um ponto. Afirmamos agora que Σ tem a topologia de um disco. Pois bem, suponha por contradição que existe um loop α não homotópico ao trivial e com base em $p \in \mathcal{C}$. Usando o fato de que o bordo de Σ é estritamente convexo podemos minimizar o comprimento na classe de homotopia $[\alpha]$ e encontrar um loop geodésico β em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ com base em p . Porém, como $\mathcal{C}$ é totalmente convexo devemos ter $\beta \subset \mathcal{C}$, absurdo! pois $\mathcal{C} = \{p\}$. Assim, $\pi_1(\Sigma, p) = 0$ e portanto, Σ tem a topologia de um disco. Pelo teorema de Nitsche [28], temos que Σ é totalmente umbílica e portanto é uma calota esférica.

ii) A desigualdade (4.1) é satisfeita ocorrendo a igualdade em algum ponto $p \in \Sigma$. Vamos provar nesse caso que Σ é uma porção de uma superfície de Delaunay. De fato, se ocorre a igualdade em (4.1) para algum ponto em Σ então o conjunto $\mathcal{C}$ contém mais de um ponto. Para ver isso, basta notar que se $\mathcal{C}$ contém um único ponto, pelo mesmo argumento no item i) provamos que Σ é uma calota esférica. Contudo, podemos verificar facilmente que o lado direito da desigualdade (4.1) é estritamente positivo sobre uma calota esférica de fronteira livre em $\mathbb{B}^3$. Considere então uma geodésica minimizante $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ ligando dois pontos quaisquer em $\mathcal{C}$ e seja $c = \min_\Sigma f(x)$. Como $\gamma(t)$ é ponto crítico de $f|_\Sigma \forall t$, temos que $\nabla^\Sigma f|_\gamma = 0$ e sendo $\nabla^\Sigma f$ a projeção de $\nabla^{\mathbb{R}^3} f$ sobre $T_{\gamma(t)}\Sigma$, devemos ter $\nabla^{\mathbb{R}^3} f = aN$ sobre $\gamma(t)$ para alguma constante $a \neq 0$. Para x tal que $|x|^2/2 = c$ o campo vetorial $\nabla^{\mathbb{R}^3} f$ é normal à curva de nível $\mathbb{S}^2(\sqrt{2c}) = \{x \in \mathbb{R}^3; f(x) = c\}$ e sendo $\nabla^{\mathbb{R}^3} \varphi = aN$ sobre $\gamma(t)$ temos que N também é normal à esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{2c})$. Logo, $\gamma(t)$ é geodésica em $\mathbb{S}^2(\sqrt{2c})$ e portanto, um arco de círculo.

Seja E o vetor unitário normal ao plano que contém γ e considere a função $v(x) = \langle V, N \rangle$ em que V é o campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $V = \vec{x} \wedge E$. Como V é

um campo de Killing, a função v é solução da equação

$$\Delta_{\Sigma} v + |A|^2 v = 0, \quad (4.4)$$

isto é, v é uma função de Jacobi.

Como $N(\gamma(t))$ é paralelo à $\gamma(t)$, devemos ter $v(\gamma(t)) = \langle \gamma(t) \wedge E, N \rangle = 0$, e portanto,

$$dv(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{d}{dt}(v \circ \gamma)(t) = 0 \quad \forall t. \quad (4.5)$$

Como $\gamma'(t)$ e E são ortogonais em $T_{\gamma(t)}\Sigma$ e $\gamma'(t)$ é uma direção principal de Σ em $\gamma(t)$, concluímos que E é também uma direção principal de Σ em $\gamma(t)$. Assim, $dN_{\gamma(t)} \cdot E = kE$. Assim,

$$\begin{aligned} dv(\gamma(t)) \cdot E &= \langle d(x \wedge E) \cdot E, N \rangle + \langle x \wedge E, dN \cdot E \rangle \\ &= \langle E \wedge E, N \rangle + \langle x \wedge \vec{0}, N \rangle + \langle x \wedge E, kE \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dessa forma, $\gamma(t)$ é um ponto crítico da função $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \forall t$. Por S. Y. Cheng [11], (Teorema 2.5) os pontos críticos sobre as linhas nodais de uma solução não trivial de uma equação como (4.4) devem ser isolados, o que não ocorre nesse caso. Portanto, $v \equiv 0$, o que significa que o campo de killing V , que é induzido por rotações de $\mathbb{R}$, é tangente a Σ . $\square$

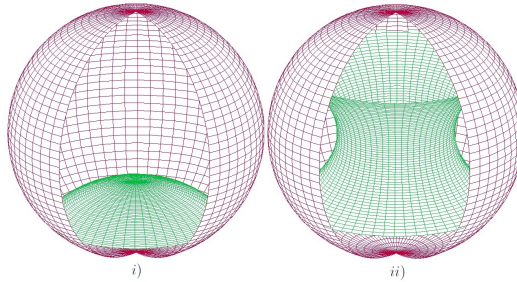


Figura 4.2: Superfícies caracterizadas no Teorema 4.2.

4.3. EXEMPLOS

Nesta seção, vamos apresentar alguns exemplos de superfícies nas condições do Teorema 4.2, isto é, superfícies CMC de fronteira livre na bola unitária Euclidiana satisfazendo a condição 4.1. Note que as calotas esféricas de fronteira livre na bola unitária Euclidiana são exemplos triviais do Teorema 4.2. Os candidatos naturais a exemplos não triviais, nesse sentido, são superfícies obtidas a partir de porções de superfícies de Delaunay.

As superfícies de Delaunay, isto é, superfícies CMC's de revolução imersas em $\mathbb{R}^3$ foram introduzidas e completamente caracterizadas por Delaunay em 1841 sendo divididas em cinco tipos: catenoides, ondulóides, nodoides, cilindros retos e esferas. Delaunay apresentou uma descrição geométrica da curva perfil de superfícies CMC de revolução como sendo uma rolete descrita pelo foco de uma cônica que rola sem deslizar sobre uma reta em um plano que contém a cônica, uma construção bastante engenhosa e com uma descrição analítica bastante técnica. Precisamente, para a rolete do foco de uma: elipse temos um ondulóide; hipérbole um nodoide; parábola um catenoide; e o centro de um círculo gera um cilindro reto.

Seja $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva no plano xz parametrizada pelo comprimento de arco com $x(s) > 0$. Suponha que a superfície Σ obtida pela rotação de β em torno do eixo z seja uma superfície de curvatura média constante $H > 0$, isto é, uma superfície de Delaunay. Em 1980, K. Kenmotsu [20] mostrou, como caso particular do seu estudo sobre superfícies de revolução com curvatura média prescrita, que para

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{H} \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2})}, \\ z(s) = \int_{\frac{3\pi}{2H}}^{s + \frac{3\pi}{2H}} \frac{1 + B \sin(Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(Ht)}} dt \end{cases} \quad (4.7)$$

temos a representação dos ondulóides ($0 < B < 1$), nodoides ($B > 1$) e cilindros retos ($B = 0$).

A fim de mostrar que uma porção de alguma superfície de Delaunay é de fato um exemplo para o Teorema 4.2 seguiremos os passos descritos abaixo.

Todos os detalhes podem ser consultados em [8].

Passo 1:

Vamos encontrar condições gerais sobre β de modo que Σ satisfaça a condição de gap (4.1). De fato, as condições são dadas no Lema a seguir.

Lema 4.5. *Suponha que as funções coordenadas a curva β satisfaça as seguintes condições:*

i)

$$\begin{cases} -1 \leq x''(s) \left(x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)} z(s) \right) & \text{quando } z'(s) \neq 0, \\ -1 \leq z(s) z''(s), & \text{se } z'(s) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

ii)

$$-x(s)x'(s)^2 \leq z'(s)x'(s)z(s). \quad (4.9)$$

Então, a condição de gap

$$|\overset{\circ}{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

é satisfeita sobre Σ .

Passo 2:

Encontrar condições sobre as funções coordenadas β de modo que a rotação da restrição de β a um intervalo $[s_1, s_2]$ seja uma superfície de fronteira livre em uma bola $\mathbb{B}_R^3$ com $R = |\beta(s_1)| = |\beta(s_2)|$. Nesse caso, as condições são descritas no lema a seguir.

Lema 4.6. *Seja β definida em um intervalo $s \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Defina $\mathcal{Z} = \{s \in [a, b]; z'(s) = 0\}$ e considere a função $g : [a, b] \setminus \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g(s) := x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)} z(s). \quad (4.10)$$

Sejam $s_1 < s_2$ pertencentes $[a, b]$ tais que:

$$i) \quad g(s_1) = g(s_2) = 0,$$

$$ii) \quad x^2(s_1) + z^2(s_1) = x^2(s_2) + z^2(s_2) =: R^2 \quad e$$

$$iii) \quad x^2(s) + z^2(s) < R^2 \text{ para todo } s \in (s_1, s_2).$$

Então, a rotação de $\beta|_{[s_1, s_2]}$ produz uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{B}_R^3$ de modo que $\partial\Sigma$ encontra $\partial\mathbb{B}$ ortogonalmente.

Resumidamente, se a rotação de uma curva $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$, $z'(s) \neq 0$, $s \in [s_1, s_2]$ $z'(s) \neq 0$ produz uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de curvatura média constante tal que as condições

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x''(s)g(s), \quad s \in [s_1, s_2] \\ g(s_1) = g(s_2) = 0 \\ |\beta(s)|^2 < R^2, \quad s \in (s_1, s_2) \\ |\beta(s_1)|^2 = |\beta(s_2)|^2 = R^2 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

sejam satisfeitas, então Σ é uma superfície CMC de fronteira livre na bola $\mathbb{B}_R^3$ que satisfaz a condição de gap (4.1).

Vamos agora fixar o caso em que $0 < B < 1$ em (4.7). Considere

$$s_0 := s_0(H, B) = \frac{1}{H} \sin^{-1}(-B) - \frac{3\pi}{2H} \quad (4.12)$$

em que $\sin^{-1} : [-1, 0] \rightarrow [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. De fato, s_0 é escolhido como sendo o menor valor positivo de modo que $x''(s_0) = 0$. Decorre então que $z'(s) > 0$ e $x''(s) > 0$ para todo $s \in (-s_0, s_0)$.

O próximo Lema fornece informações sobre o comportamento da função g dada em (4.10) restrita ao intervalo $(-s_0, s_0)$ quando consideramos as funções (4.7) na parametrização de β .

Lema 4.7. *Fixe $0 < B < 1$, $H > 0$, e considere a função $g : [-s_0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$, em que s_0 é dado por (4.12) e g é dada em (4.10). Então,*

$$i) \quad g(0) > 0.$$

$$ii) \quad g'(0) = g'(s_0) = 0.$$

$$iii) \quad g \text{ é crescente em } (-s_0, 0) \text{ e decrescente em } (0, s_0).$$

Finalmente, a próxima proposição fornece uma condição de teste para que possamos encontrar uma porção da curva β de modo que a superfície resultante seja um exemplo ao Teorema 4.2.

Proposição 4.8. *Fixe $0 < B < 1$, $H > 0$, e considere $z_0 := \frac{1-B^2}{HB}$. Então,*

- i) *Se $z(s_0) < z_0$, então $g(s) > 0$ para todo $s \in (0, s_0)$.*
- ii) *Se $z(s_0) \geq z_0$, então $g(\bar{s}) = 0$ para algum $\bar{s} \in (0, s_0]$. Em particular, a superfície obtida pela rotação de $\beta|_{[-\bar{s}, \bar{s}]}$ é de fronteira livre em $\mathbb{B}_{R_0}^3$ ($R_0^2 = x^2(\bar{s}) + z^2(\bar{s})$), e satisfaz a condição de gap (4.1).*

Exemplo 4.9. Escolha $B = 0.9$ e $H = 0.1$. Assim, $z_0 = \frac{1-B^2}{HB} = 2.\bar{1}$ e $s_0 = 10 \sin^{-1}(-0.9) + 5\pi \approx 4.51026$. Portanto,

$$z(s_0) = \int_{15\pi}^{4.51026+15\pi} \left(\frac{1 + (0.9) \sin(0.1t)}{\sqrt{1 + (0.9)^2 + (1.8) \sin(0.1t)}} \right) dt \approx 2.71697.$$

Como $z(s_0) \geq z_0$, segue do Lema 4.8 que existe $\bar{s} \in (0, s_0]$ tal que a porção da superfície de Delaunay resultante da revolução de β restrita ao intervalo $[-\bar{s}, \bar{s}]$ é um anel CMC de fronteira livre na bola $\mathbb{B}_{R_0}^3$ (onde $R_0 = x^2(\bar{s}) + z^2(\bar{s})$) que satisfaz a condição de gap (4.1).

Para o caso em que $B > 1$, com $H > 0$, podemos obter o Lema 4.7 e Proposição 4.8 de modo a obter um exemplo no mesmo espírito do exemplo anterior. Desso modo, concluímos que existem porções do nodoide que são de fronteira livre em uma bola de raio R e satisfazem a condição de gap (4.1) como garante a proposição a seguir.

Proposição 4.10. *Fixe $B > 1$ e $H > 0$. Considere o intervalo $[-r_0, r_0]$, em que r_0 é o menor valor positivo tal que $z'(r_0) = 0$. Então, existe $\bar{r} \in (0, r_0)$ tal que $g(\bar{r}) = g(-\bar{r}) = 0$. Além disso, para todo $r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$, $g(r) \geq 0$, $x''(r) > 0$ e a desigualdade (4.9) é satisfeita.*

RESULTADOS DE GAP PARA SUPERFÍCIES CMC'S DE FRONTEIRA LIVRE NA BOLA EU- CLIDIANA COM UMA MÉTRICA CON- FORME RADIALMENTE SIMÉTRICA

Neste capítulo, descreveremos os trabalhos de Andrade-Barbosa-Pereira [5] sobre resultados de gap para superfícies CMC's de fronteira livre em uma bola tridimensional Euclidiana com uma métrica radialmente simétrica conforme à métrica Euclidiana.

5.1. INTRODUÇÃO

Seja $W = [0, R_\infty] \times \mathbb{S}^2$ uma variedade produto munida da métrica produto torcido $g = dr^2 + \lambda(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$, em que $g_{\mathbb{S}^2}$ denota a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^2$, $\lambda(r) = r$ ou $\lambda(r) = \sinh(r)$ para $R_\infty = \infty$, ou $\lambda(r) = \sin(r)$ quando $R_\infty = \pi/2$. Desse modo, (W, g) é isométrico ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, o espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$ ou a semi esfera $\mathbb{S}_+^3$. Nestes termos, Li-Xiong [22] obtiveram uma versão do teorema de Ambrozio-Nunes em bolas geodésicas do espaço forma como descrito a seguir.

Teorema 5.1 (Li-Xiong'2017, [22]). *Seja Σ uma superfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica $B_R \subset M^3$ com raio $R < R_\infty$. Suponha que para todo $x \in \Sigma$ temos*

$$\frac{|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2}{(\lambda')^2} \leq 2, \quad (5.1)$$

em que $N(x)$ denota o vetor normal unitário em um ponto $x \in \Sigma$ e A denota a segunda forma fundamental de Σ . Então,

- 1) $|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2 \equiv 0$ e Σ é um disco totalmente geodésico,
- 2) ou $\frac{|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2}{(\lambda')^2} = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ é um anel rotacional.

Inspirados na abordagem dada por Li-Xiong, Andrade-Barbosa-Pereira [5] generalizaram o Teorema 3.2 de Ambrozio-Nunes e o Teorema 4.2 de Barbosa-Cavalcante-Pereira para uma classe maior de espaços os quais tem $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}_+^3$ como casos particulares. A abordagem de Andrade-Barbosa-Pereira foi considerar esses espaços mais gerais como sendo aqueles obtidos por uma mudança conforme no espaço Euclidiano por uma métrica conforme radialmente simétrica. Isso se justifica pela simplicidade com a qual alguns conceito são explicitados nesse perspectiva, como ficará claro adiante.

Seja $\mathbb{B}_a^3 \subset \mathbb{R}^3$ a bola Euclidiana de raio $a \leq \infty$ centrada na origem. Considere a variedade $(\mathbb{B}_a^3, \bar{g})$ em que $\bar{g}$, dada por

$$\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (5.2)$$

é uma métrica conforme à métrica Euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sendo $u : [0, a^2) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com h definida por $h(x) = u(|x|^2)$.

O campo vetorial $\vec{x} = \sum x_i \partial_i$ em $\mathbb{B}_r^3$ é conforme com respeito a métrica $\bar{g}$, isto é, a derivada de Lie de $\bar{g}$ na direção de $\vec{x}$ satisfaz

$$\mathcal{L}_{\vec{x}} \bar{g} = 2\sigma \bar{g}, \quad (5.3)$$

em que $\sigma(x) = 1 + 2u'(|x|^2) |x|^2$ é a função potencial de $\bar{g}$ com relação a $\vec{x}$. Denote por $\vec{0}$ o centro de $\mathbb{B}_a^3$. Como $\sigma(\vec{0}) = 1$, decorre por continuidade que sempre existe r_0 tal que $\sigma > 0$ em $\mathbb{B}_{r_0}^3$. De agora em diante, estaremos sempre considerando $a > 0$ tal que $\sigma > 0$ em $\mathbb{B}_a$.

Exemplo 5.2. Considere a função $u : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = \ln \left(\frac{2}{1-t} \right)$. Então, $(\mathbb{B}_1^3, \bar{g})$ é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ modelado no disco de Poincaré.

Exemplo 5.3. Seja $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $u(t) = \ln \left(\frac{2}{1+t} \right)$. Assim, $(\mathbb{R}^3, \bar{g})$ é a esfera $\mathbb{S}^3 \setminus \{p\}$ menos um polo. Nesse caso, a origem $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ pode ser interpretada como sendo um outro polo.

Exemplo 5.4. Seja $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $u(t) = -\frac{t}{4}$. Então, $(\mathbb{R}^3, \bar{g}) = \left(\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ é a variedade Riemanianna conhecida como espaço Gaussiano.

Exemplo 5.5. If $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $u(t) = 0$, então $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g})$ é o espaço Euclidiano com a métrica canônica.

Finalmente, estamos em condições de enunciar o principal teorema desse capítulo.

Teorema 5.6 (Andrade-Barbosa-Pereira, [5]). *Seja Σ uma superfície compacta, imersa e CMC de fronteira livre em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$. Suponha que para todo ponto $x \in \Sigma$,*

$$\begin{cases} \frac{|\mathring{A}|^2}{\sigma^2} \bar{g}(\vec{x}, N)^2 \leq \frac{1}{2} \left(2 + \frac{H}{\sigma} \bar{g}(\vec{x}, N) \right)^2 \\ 0 \leq 2 + \frac{H}{\sigma} \bar{g}(\vec{x}, N). \end{cases} \quad (5.4)$$

Então, uma das seguintes situações ocorre;

- i) Σ é difeomorfa a um disco,*
- ii) ou Σ é rotacionalmente simétrica com topologia não trivial.*

5.2. PRELIMINARES

Denote por $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ e $(\mathbb{B}_r^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, respectivamente. A relação abaixo, obtida a partir da fórmula de Koszul, expressa a relação entre as conexões $\bar{\nabla}$ e ∇ .

$$\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + Y(h)X + X(h)Y - \langle X, Y \rangle \nabla h \quad (5.5)$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{B}_r^3)$.

Lema 5.7. *Seja $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ a Euclidiana de raio r centrada na origem e com uma métrica conforme $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$ como definida anteriormente. Então,*

$$1. \quad \bar{\nabla}_Y \vec{x} = \sigma Y, \text{ onde } \sigma = 1 + 2u'(|x|^2) |x|^2$$

$$2. \quad \bar{\nabla} \sigma = 4e^{-2h} (u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) \vec{x},$$

em que $\bar{\nabla} \sigma$ denota o gradiente da função potencial σ com respeito à métrica $\bar{g}$.

Demonstração. i) Usando a expressão de $\bar{\nabla}$ com relação a ∇ dada por (5.5), temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y \vec{x} &= \nabla_Y \vec{x} + Y(h) \vec{x} + \vec{x}(h) Y - \langle \vec{x}, Y \rangle \nabla h \\ &= Y + \langle \nabla h, \vec{x} \rangle Y + \langle \nabla h, Y \rangle \vec{x} - \langle \vec{x}, Y \rangle \nabla h \\ &= Y + 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle Y + 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, Y \rangle \vec{x} - 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, Y \rangle \vec{x} \\ &= (1 + 2u'(|x|^2) |x|^2) Y \\ &= \sigma Y. \end{aligned}$$

ii) Sejam $\nabla \sigma$ e $\bar{\nabla} \sigma$ os gradientes de σ com respeito as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\bar{g}$ respectivamente. Temos que $\bar{\nabla} \sigma = e^{-2h} \nabla \sigma$. Calculando $\nabla \sigma$ obtemos,

$$\begin{aligned} \nabla \sigma &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (1 + 2u'(|x|^2) |x|^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 4(u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= 4(u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) \vec{x}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{\nabla} \sigma = 4e^{-2h} (u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) \vec{x}.$$

□

A próxima proposição, inspirada em [22], tem uma importância crucial na obtenção do principal teorema desse capítulo. Essencialmente, ela permite-nos

construir uma função radial que sob a hipótese de gap 5.4, torna-se convexa, permitindo assim aplicar as ideias do Teorema 3.2 de Ambrozio-Nunes, na obtenção dos resultados do Teorema 5.6.

Proposição 5.8. *Sejam $a, b : [0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r_0 \leq \infty$) funções suaves tais que:*

1. $b(t) > 0 \forall t \in [0, r_0)$;
2. $a(0) = 0, a(t) > 0, \forall t \in (0, r_0)$;
3. $a'(t) > 0, \forall t \in (0, r_0)$.

Então, a equação diferencial

$$\Phi''(a)a'b + \Phi'(a)b' = 0 \quad (5.6)$$

admite uma solução $\Phi : (0, \tilde{r}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\Phi'(s) > 0$, onde $(0, \tilde{r}_0)$ é a imagem do intervalo $(0, r_0)$ pela função a .

Demonstração. Defina $f(t) := \Phi'(a(t))$. Desse modo, a equação (5.6) é equivalente a

$$(f(t)b(t))' = f'(t)b(t) + f(t)b'(t) = 0 \Rightarrow f(t)b(t) = c_1.$$

Isto é

$$\Phi'(a(t))b(t) = c_1,$$

onde $c_1 \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da equação acima por $a'(t)/b(t)$, e integrando com respeito à t , obtemos

$$\int_0^r \Phi'(a(t))a'(t)dt = c_1 \int_0^r \frac{a'(t)}{b(t)}dt.$$

Como $a'(t) > 0$ para $0 < t < r_0$, a função $a : [0, r_0) \rightarrow [0, \tilde{r}_0)$ é um difeomorfismo em $(0, r_0)$. Podemos então considerar uma mudança de variáveis $a(t) = \xi$. Assim, $d\xi = a'(t)dt$, o que resulta em,

$$\int_0^s \Phi'(\xi)d\xi = c_1 \int_0^s \frac{1}{b(a^{-1}(\xi))}d\xi,$$

onde $s = a(r) \in [0, \tilde{r}_0)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\Phi(s) = c_1 \int_0^s \frac{1}{b(a^{-1}(\xi))} d\xi + \Phi(0).$$

Finalmente, escolhendo $c_1 > 0$, a função Φ é uma solução da equação (5.6) satisfazendo $\Phi'(s) > 0$, $\forall s \in (0, \tilde{r}_0)$, como desejado. $\square$

Lema 5.9. *Seja Σ uma superfície suave em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$. Defina a função $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = \bar{g}(\vec{x}, \vec{x})$. Então,*

$$Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z) = 2 \left(\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y) \bar{g}(\vec{x}, Z) + \sigma^2 \bar{g}(Z, Y) + \sigma \bar{g}(A(Y), Z) \bar{g}(N, \vec{x}) \right),$$

onde $\bar{\nabla}\sigma$ denota o gradiente da função potencial do campo conforme $\vec{x}$ com respeito a $\bar{g}$, N denota o vetor normal unitário no ponto $x \in \Sigma$ e A é a segunda forma fundamental de Σ .

Demonstração. Denote por ∇ a conexão de Σ induzida por $\bar{g}$. Assim, $Hess_{\Sigma}\varphi$ é dado por

$$\begin{aligned} Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z) &= YZ(\varphi) - (\nabla_Y Z)(\varphi) \\ &= YZ\bar{g}(\vec{x}, \vec{x}) - (\nabla_Y Z)\bar{g}(\vec{x}, \vec{x}) \\ &= 2 \left(Y\bar{g}(\bar{\nabla}_Z \vec{x}, \vec{x}) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_Y Z} \vec{x}, \vec{x}) \right) \\ &= 2 (Y\bar{g}(\sigma Z, \vec{x}) - \bar{g}(\sigma \nabla_Y Z, \vec{x})) \\ &= 2 (Y(\sigma)\bar{g}(Z, \vec{x}) + \sigma \bar{g}(\bar{\nabla}_Y Z, \vec{x}) + \sigma^2 \bar{g}(Z, Y) - \sigma \bar{g}(\nabla_Y Z, \vec{x})) \\ &= 2 (\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y) \bar{g}(Z, \vec{x}) + \sigma^2 \bar{g}(Z, Y) + \sigma \bar{g}(\bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z, \vec{x})) \\ &= 2 (\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y) \bar{g}(Z, \vec{x}) + \sigma^2 \bar{g}(Z, Y) + \sigma \bar{g}(A(Y), Z) \bar{g}(N, \vec{x})). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 5.10. *Seja Σ uma superfície em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ e considere $\varphi : \mathbb{B}_r^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \bar{g}(\vec{x}, \vec{x})$. Então, existe uma função Φ , solução de 5.6, de modo que os autovalores de $Hess_{\Sigma}\Psi(x)$, em que*

$$\Psi(x) = \Phi(\varphi(x)), \tag{5.7}$$

são dados por,

$$\bar{\lambda}_i = 2\sigma^2\Phi'(\varphi) \left(1 + \frac{\bar{k}_1}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N)\right) \quad \text{para } i = 1 \text{ e } i = 2.$$

Demonstração. Escolha

$$a(t) = e^{2u(t)}t, \quad b(t) = 1 + 2u'(t)t$$

e considere Φ solução da equação (5.6). Assim,

$$\Phi''(e^{2u(t)}t)e^{2u(t)}(1 + 2u'(t)t)^2 + 2\Phi'(e^{2u(t)}t)(u''(t)t + u'(t)) = 0. \quad (5.8)$$

Defina $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi(x) = \Phi(\varphi(x)), \quad (5.9)$$

onde $\varphi(x) = \bar{g}(\vec{x}, \vec{x}) = e^{2u(|x|^2)}|x|^2$. Assim,

$$\begin{aligned} Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) &= YZ(\Phi(\varphi)) - \nabla_Y Z(\Phi(\varphi)) \\ &= Y(\Phi'(\varphi)Z(\varphi)) - \Phi'(\varphi)\nabla_Y Z(\varphi) \\ &= Y(\Phi'(\varphi))Z(\varphi) + \Phi'(\varphi)YZ(\varphi) - \Phi'(\varphi)\nabla_Y Z(\varphi) \\ &= \Phi''(\varphi)Y(\varphi)Z(\varphi) + \Phi'(\varphi)Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z) \\ &= 4\sigma^2\Phi''(\varphi)\bar{g}(Y, \vec{x})\bar{g}(Z, \vec{x}) + \Phi'(\varphi)Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z). \end{aligned}$$

Usando a expressão de $Hess_{\Sigma}\varphi(x)$ obtida anteriormente, temos

$$\begin{aligned} Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) &= 4\sigma^2\Phi''(\varphi)\bar{g}(Y, \vec{x})\bar{g}(Z, \vec{x}) \\ &\quad + 2\Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y)\bar{g}(Z, \vec{x}) + \sigma^2\bar{g}(Z, Y) + \sigma\bar{g}(A(Y), Z)\bar{g}(N, \vec{x})\right) \\ &= \left\{4\sigma^2\Phi''(\varphi) + 2\Phi'(\varphi)G(x)\right\} \bar{g}(Y, \vec{x})\bar{g}(Z, \vec{x}) \\ &\quad + 2\sigma^2\Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(A(Y), Z)\bar{g}(N, \vec{x})\right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que $G(x) = 4e^{-2u(|x|^2)}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))$. Como Φ é solução da equação (5.6), temos que

$$\left\{4\sigma^2\Phi''(\varphi) + 2\Phi'(\varphi)G(x)\right\} \equiv 0.$$

Desse modo, a equação (5.10) resulta em:

$$Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) = 2\sigma^2\Phi'(\varphi)\mathcal{B}_0(Y, Z),$$

em que $\mathcal{B}_0(Y, Z) := \bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(A(Y), Z)\bar{g}(N, \vec{x})$.

Escolha $\{E_1, E_2\}$ um frame local que diagonaliza a segunda forma fundamental A , isto é, $A(E_i) = \bar{k}_i E_i$, em que $\bar{k}_1$ e $\bar{k}_2$ são as curvaturas principais de Σ em $x \in \Sigma$. Note que os autovetores de A são também autovetores da forma bilinear simétrica $\mathcal{B}_0(\cdot, \cdot)$. Desse modo, concluímos então que os autovalores de $\mathcal{B}_0(\cdot, \cdot)$ são dados por

$$\zeta_i = 1 + \frac{\bar{k}_i}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N) \text{ para } i = 1 \text{ e } i = 2.$$

□

Proposição 5.11. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 5.6 e Lema 5.10, temos que*

$$Hess_{\Sigma}\Psi(p)(Y, Y) \geq 0, \forall Y \in T_p\Sigma \text{ e } p \in \Sigma.$$

Demonstração. A fim de concluir que $Hess_{\Sigma}\Psi(p)(Y, Y) \geq 0$, precisamos mostrar que os autovalores $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$ são não negativos. Visto que $\Phi'(\varphi) > 0$, basta então mostrar que ζ_1 e ζ_2 no Lema (5.10) são não negativos. Fazemos então,

$$\begin{aligned} \zeta_1\zeta_2 &= \left(1 + \frac{\bar{k}_1}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N)\right) \left(1 + \frac{\bar{k}_2}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N)\right) \\ &= 1 + \frac{H}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N) + \frac{\bar{k}_1\bar{k}_2}{\sigma^2}\bar{g}(\vec{x}, N)^2 \\ &= 1 + \frac{H}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N) + \frac{H^2 - |A|^2}{2\sigma^2}\bar{g}(\vec{x}, N)^2 \\ &= 1 + \frac{H}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N) - \frac{|\overset{\circ}{A}|^2}{2\sigma^2}\bar{g}(\vec{x}, N)^2 + \frac{H^2}{(2\sigma)^2}\bar{g}(\vec{x}, N)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(2 + \frac{H}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, N)\right)^2 - \frac{|\overset{\circ}{A}|^2}{2\sigma^2}\bar{g}(\vec{x}, N)^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

A primeira desigualdade em (5.4) permite concluir que $\zeta_1 \zeta_2 \geq 0$, isto é, ζ_1 e ζ_2 tem o mesmo sinal. Já a segunda desigualdade em (5.4) garante que

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 2 + \frac{H}{\sigma} \bar{g}(\vec{x}, N) \geq 0.$$

Isto é, $\zeta_i \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$, como desejado. $\square$

Lema 5.12. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 5.6, temos que*

1. *A curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ é dada por $\bar{k}_{ge} = \frac{\sigma}{e^{u(r^2)}}$. Em particular, $\partial\Sigma$ é estritamente convexo para $\sigma > 0$.*

2. *O conjunto*

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma; \Psi(p) = \min_{\Sigma} \Psi(x)\}, \quad (5.12)$$

é totalmente convexo em Σ , isto é, toda geodésica γ conectando dois pontos em $\mathcal{C}$ está inteiramente contida em $\mathcal{C}$.

Demonstração. 1) Denote por k_{ge} a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ com respeito à métrica Euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Temos que, $k_{ge} = \frac{1}{r}$. De fato, seja $\alpha : I \rightarrow \partial\Sigma$ uma parametrização local do bordo de Σ pelo comprimento de arco. Derivando duas vezes a expressão $\langle \alpha, \alpha \rangle = r^2$ e usando o fato que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ obtemos $\langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$. Seja ν o normal interior a $\partial\Sigma$. Como o ângulo de contato entre Σ e $\partial\mathbb{B}^3$ é $\theta = \frac{\pi}{2}$ devemos ter $\nu = -\frac{\alpha}{r}$. Desse modo,

$$k_{ge} = \langle \alpha'', \nu \rangle = \left\langle \alpha'', -\frac{\alpha}{r} \right\rangle = \frac{1}{r}.$$

Assim, $k_{ge} > 0$.

Seja $\bar{k}_{ge}$ a curvatura geodésica do bordo $\partial\Sigma$ com respeito à métrica $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$. Vamos mostrar agora que

$$\bar{k}_{ge} = e^{-h} (k_{ge} - \nu(h)). \quad (5.13)$$

De fato, sejam $\bar{v}$ e $\bar{\nu}$ campos de vetores definidos sobre $\partial\Sigma$ e unitários com respeito à $\bar{g}$. Suponha que $\bar{v}$ seja tangente a $\partial\Sigma$ e que $\bar{\nu}$ seja normal

interior a $\partial\Sigma$. Temos então que,

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{g_e} &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{v}}\bar{v}, \bar{\nu}) = \bar{g}(\nabla_{\bar{v}}\bar{v} + 2\bar{v}(h)\bar{v} - \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \nabla h, e^{-h}\nu) \\
&= \bar{g}(\nabla_{\bar{v}}\bar{v} - \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \nabla h, e^{-h}\nu) \\
&= \bar{g}(\nabla_{e^{-h}v}e^{-h}v - \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \nabla h, e^{-h}\nu) \\
&= e^{-h} (e^{-2h}\bar{g}(\nabla_v v, \nu) - (e^{-2h}\bar{g}(\nabla h, \nu))) \\
&= e^{-h} (\langle \nabla_v v, \nu \rangle - \langle \nabla h, \nu \rangle) \\
&= e^{-h} (k_{g_e} - \langle \nabla h, \nu \rangle) \\
&= e^{-h} (k_{g_e} - \nu(h)).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Por outro lado,

$$\nu(h) = \langle \nabla h, \nu \rangle = 2u'(r^2) \langle \vec{x}, \nu \rangle = 2u'(r^2) \langle -r\nu, \nu \rangle = -2u'(r^2)r.$$

Portanto,

$$\bar{k}_{g_e} = e^{-u(r^2)} \left(\frac{1}{r} + 2u'(r^2)r \right) = \frac{e^{-u(r^2)}}{r} (1 + 2u'(r^2)r^2) = \frac{\sigma}{e^{u(r^2)}r}.$$

2) Sejam $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$. Como $\partial\Sigma$ é estritamente convexo, existe uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$. Considere agora a função $w(t) = \Psi(\gamma(t))$. Pela Proposição 5.11, temos que $Hess_{\Sigma}\Psi \geq 0$, e portanto, $w'' \geq 0$. Como w atinge um mínimo em $t = 0$ e $t = 1$, concluímos que $w(t) \equiv \min_{x \in \Sigma} \Psi(\varphi(x))$ e portanto $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. $\square$

Lema 5.13. *Seja $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ a bola Euclidiana de raio r centrada na origem e com uma métrica conforme $\bar{g}$ dada por (5.2) de modo que a função σ dada por (5.3) seja positiva. Seja $\Psi : \mathbb{B}_r^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada pelo Lema 5.10. Então, o gradiente $\bar{\nabla}\Psi(x)$ com respeito a $\bar{g}$ é não nulo para todo $x \neq \vec{0}$, onde $\vec{0}$ denota o centro de $\mathbb{B}_r^3$. Além disso, a função $\Psi(x)$ é radialmente crescente, isto é, $\Psi(x)$ cresce à medida $|x|$ cresce de $\vec{0}$ a r .*

Demonstração. Seja $\nabla\Psi$ o gradiente da função Ψ com respeito à métrica Eu-

clidiana. Então,

$$\begin{aligned}\nabla\Psi(x) &= \Phi'(\varphi(x))(e^{2h}\nabla|x|^2 + |x|^2\nabla e^{2h}) \\ &= \Phi'(\varphi(x))(2e^{2h})(1 + 2u'(|x|^2)|x|^2)\vec{x} \\ &= 2\Phi'(\varphi(x))e^{2h}\sigma\vec{x}.\end{aligned}$$

Como $\bar{\nabla}\Psi = e^{-2h}\nabla\Psi$, segue que $\bar{\nabla}\Psi(x) = 2\Phi'(\varphi(x))\sigma\vec{x}$. Visto que $\Phi' > 0$, (veja Proposição 5.8) e $\sigma > 0$, concluímos que Ψ é radialmente crescente com $\bar{\nabla}\Psi(x) \neq 0$ em $\mathbb{B}_r^3 \setminus \vec{0}$.

□

5.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PRINCIPAL

Demonstração. (Teorema 5.6) Considere o conjunto $\mathcal{C}$ do Lema 5.12. Suponha que $\mathcal{C}$ contém um único ponto. Afirmamos que Σ é difeomorfa a um disco. De fato, seja $[\alpha]$ um classe de homotopia em $\pi_1(\Sigma, p)$ com base em $p \in \mathcal{C}$. Suponha que $[\alpha]$ é não trivial. Visto que $\partial\Sigma$ é estritamente convexo, podemos encontrar um loop geodésico $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ e $\gamma \in [\alpha]$. Como $\mathcal{C}$ é totalmente convexo, $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Visto $\mathcal{C} = \{p\}$ e $[\alpha]$ é uma classe de homotopia não trivial, temos uma contradição, e portanto, $\pi_1(\Sigma, p) = 0$.

Agora, suponha que $\mathcal{C}$ contém mais de um ponto. Podemos então escolher p_1 e $p_2 \in \mathcal{C}$ e considerar $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma geodésica minimizante conectando p_1 a p_2 . Como $\mathcal{C}$ é convexo, devemos ter $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Considere $c = \min_{\Sigma}\Psi(x)$ e denote por $\bar{\nabla}\Psi$ o gradiente de Ψ em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$, e por $\bar{\nabla}^\Sigma\Psi$ o gradiente de Ψ restrito a Σ . Visto que $\gamma(t)$ é um ponto crítico de $\Psi|_\Sigma$ para cada $t \in [0, 1]$, temos que $\bar{\nabla}^\Sigma\Psi$ sobre γ . Visto que $\bar{\nabla}\Psi = \bar{\nabla}^\Sigma\Psi + (\bar{\nabla}\Psi)^\perp$ em Σ e $\bar{\nabla}\Psi$ é não nulo em $\mathbb{B}_r^3 \setminus \vec{0}$ (pelo Lema 5.13), precisamos ter $\bar{\nabla}\Psi = n(t)N$ sobre γ para alguma função $n(t)$ não nula em $[0, 1]$. Considere a esfera $\mathbb{S}_\lambda^2$ de raio $\lambda < r$ centrada na origem satisfazendo $\Psi(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{S}_\lambda^2$. Como $\bar{\nabla}\Psi = n(t)N$ em $\gamma(t)$, temos que N é normal a $\mathbb{S}_\lambda^2$ no ponto $x = \gamma(t)$. Sendo γ uma geodésica em Σ , também será uma geodésica em $\mathbb{S}_\lambda^2$, e portanto, um arco de um grande círculo.

Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ um plano passando pela origem tal que $\gamma \subset \pi$, e seja E o vetor normal unitário em $\mathbb{R}^3$ ortogonal a π . Considere o campo vetorial

$$V = \vec{x} \wedge E.$$

A derivada de Lie da métrica Euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na direção do campo V satisfaz $\mathcal{L}_V \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$, isto é, V é um campo de killing em $\mathbb{R}^3$. Afirmamos que V é um campo de Killing com respeito à métrica $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$. De fato, Como vimos anteriormente, a derivada de $\bar{g}$ na direção de V satisfaz

$$\mathcal{L}_V \bar{g} = 2(V(h))\bar{g}.$$

Como

$$V(h(x)) = \langle \nabla h, V \rangle = 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, V \rangle = 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, \vec{x} \wedge E \rangle = 0,$$

segue então nossa afirmação.

Defina a função $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \bar{g}(V, N). \quad (5.15)$$

A função v assim definida é de Jacobi (Proposição 1, [15]), isto é, satisfaz

$$\Delta_\Sigma v + (\bar{\text{Ric}}(N) + |A|^2) v = 0, \quad (5.16)$$

onde $\bar{\text{Ric}}(N)$ denota a curvatura de Ricci de $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ na direção de N . Como N é paralelo a $\vec{x}$ quando restrito a γ , temos que

$$v(\gamma(t)) = \bar{g}(V, N) = \bar{g}(\vec{x} \wedge E, N) = e^{2h} \langle \vec{x} \wedge E, N \rangle = 0,$$

e portanto,

$$dv(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{d}{dt}(v \circ \gamma)(t) = 0, \quad \forall t. \quad (5.17)$$

Para cada $t_0 \in [0, 1]$, considere a curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ tal que $\beta(0) = \gamma(t_0)$ e $\beta'(0) \perp \gamma'(t_0)$. Seja $N(s)$ a restrição do campo vetorial N a β . Então,

$$\begin{aligned} dv(\gamma(t)) \cdot \beta'(0) &= \frac{d}{ds}(v \circ \beta)(s)|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}(e^{2h})|_{s=0} \cdot \langle V, N \rangle + e^{2h} \cdot \frac{d}{ds}(\langle V, N \rangle)|_{s=0} \\ &= e^{2h} \{ \langle \beta'(0) \wedge E, N(0) \rangle + \langle \beta(0) \wedge E, N'(0) \rangle \} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

As três últimas igualdades acima são justificadas da seguinte forma. Como $\vec{x}/N$ em $\gamma(t_0)$, resulta que $\langle V, N \rangle|_{s=0} = 0$. Por outro lado, visto que Σ é tangente a $\mathbb{S}_\lambda^2$ ao longo de γ , temos que $E//\beta'(0)$ e portanto $\langle \beta'(0) \wedge E, N(0) \rangle = 0$. Finalmente, sendo $\gamma'(t_0)$ uma direção principal de Σ em $\gamma(t_0)$, concluímos que $\beta'(0)$ é também uma direção principal no respectivo ponto. Desse modo, $N'(0)//\beta'(0)$, o que implica que $N'(0)//E$, e portanto, $\langle \beta(0) \wedge E, N'(0) \rangle = 0$.

Assim, as equação (5.18) e (5.17) mostram que $\gamma(t)$ é um ponto crítico de $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $t \in [0, 1]$. Pelo Lema 5.13, a função Ψ é radialmente crescente em $\mathbb{B}_r^3$. Isto significa que $\mathcal{C}$, está contido no interior de Σ . O Teorema de S. Y. Cheng ([11], Teorema 2.5), afirma que os pontos críticos sobre as linhas nodais de uma função que satisfaz uma equação do tipo (5.16) são isolados, o que não ocorre em nosso caso, visto que todo ponto em $\gamma \subset v^{-1}(0)$ é um ponto crítico de v . Nesse caso concluímos que $v \equiv 0$ e portanto, V é tangente a Σ . Sendo V induzido por uma rotação em torno do eixo E , dizemos então que Σ é rotacionalmente simétrica. $\square$

Corolário 5.14. *Seja Σ uma superfície CMC compacta, imersa e de fronteira livre em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$. Assuma que,*

$$\frac{|\mathring{A}|^2}{\sigma^2} \bar{g}(\vec{x}, N)^2 < \frac{1}{2} \left(2 + \frac{H}{\sigma} \bar{g}(\vec{x}, N) \right)^2,$$

em todo ponto $x \in \Sigma$. Então, Σ é difeomorfa a um disco $\mathbb{D}^2$.

Demonstração. A condição de gap com a desigualdade estrita garante que os dois autovalores do hessiano $\text{Hess}_\Sigma \Psi$ são positivos. Nesse caso, o conjunto $\mathcal{C}$ contém um único ponto. $\square$

5.4. EXEMPLOS

Nesta seção, mostraremos um exemplo de uma superfícies CMC $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$, com bordo $\partial\Sigma \subset \partial\mathbb{B}_r^3$, estritamente convexo satisfazendo a condição (5.4) no Teorema 5.6.

Como vimos no Lema 5.12, a condição de bordo convexo em $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ é mais geral que a condição de fronteira livre, isto é, toda superfície de fronteira livre em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ tem bordo estritamente convexo. Além disso, as mesmas conclusões do Teorema 5.6 podem ser obtidas substituindo a condição de fronteira livre por bordo estritamente convexo. Nesse sentido, o Exemplo 5.19 apresentado ao final da seção pode ser considerado um exemplo ao Teorema 5.6. Exemplos para o caso em que $\bar{g}$ é uma métrica de curvatura seccional constante foram apresentados em [22].

Primeiro, note que se $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ é um disco equatorial plano, então Σ é um exemplo trivial do Teorema 5.6. Para ver isso, basta notar que Σ é também um disco equatorial plano com relação à métrica Euclidiana. Segue então da equação 5.22 que Σ é um disco totalmente geodésico e de fronteira livre em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$, e portanto, a condição (5.4) é trivialmente satisfeita. Vamos focar então em buscar um exemplo não trivial, isto é, uma superfície rotacionalmente simétrica e com topologia não trivial.

Por se tratar de longos cálculos, apresentaremos aqui apenas o roteiro de como os exemplos são obtidos. Os detalhes podem ser consultados em [5].

Seja $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ ($c > 0$) uma função suave com $x(t) > 0$, $\forall t \in (-c, c)$. Considere a superfície $\Sigma \subset (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ obtida pela revolução da curva $\beta(t) = (x(t), 0, t)$ em torno do eixo Oz e parametrizada por

$$X(t, \theta) = (x(t) \cos(\theta), x(t) \sin(\theta), t). \quad (5.19)$$

Considere em Σ a orientação dada pelo vetor normal

$$N_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} (-\cos(\theta), -\sin(\theta), x'(t)).$$

As curvaturas principais de Σ em $X(t, \theta)$ são dadas por

$$k_1 = \frac{-x''(t)}{\sqrt{(1 + x'(t)^2)^3}} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{1}{x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (5.20)$$

Para cada $-c < t < c$, considere o slice $\alpha_t = X(\{t\} \times [0, 2\pi])$. A curvatura geodésica de α_t com respeito ao campo unitário

$$\nu(t, \theta) = \frac{-1}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} (x'(t) \cos(\theta), x'(t) \sin(\theta), 1)$$

normal a α_t é dada por:

$$f(t) := k_{g_e}(t) = \frac{x'(t)}{x(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (5.21)$$

Observação 5.15. Note que se α_t é o bordo da superfície $X([t-\epsilon, t] \times [0, 2\pi x(t)])$, então a curvatura geodésica de α_t com respeito ao vetor normal interior a Σ é dado por $k_{g_e}(t) = f(t)$. Agora, se α_t é o bordo da superfície $X([t, t+\epsilon] \times [0, 2\pi x(t)])$, então a curvatura geodésica de α_t com respeito ao vetor normal interior a Σ é dado por $k_{g_e}(t) = -f(t)$.

Sob a mudança conforme $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$ na métrica Euclidiana, as curvaturas principais $\bar{k}_1$ e $\bar{k}_2$ de $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ são obtidas a partir de k_1 e k_2 pela expressão

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, N_\mu \rangle) \quad i = 1, 2. \quad (5.22)$$

Se (5.19) é uma parametrização de uma superfície CMC com curvatura média H em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$, então a equação acima fornece

$$H = e^{-h} (H_\mu - 4u'(|x|^2) \langle \vec{x}, N_\mu \rangle), \quad (5.23)$$

em que H_μ denota a curvatura média de Σ em $(\mathbb{B}_r^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Considerando agora as expressões de N_μ , $\vec{x}$ e H_μ em termos de k_1 e k_2 , podemos reescrever (5.23) como

$$H = e^h \left(\frac{-x''(t)x(t) + x'^2 + 1}{x(t)(1 + x'(t)^2)^{3/2}} + \frac{4u'(|x|^2)}{(1 + x'(t)^2)^{1/2}} (x(t) - x'(t)t) \right). \quad (5.24)$$

Assim, o problema de encontrar superfícies CMC em $(\mathbb{B}_a^3, \bar{g})$ parametrizada por (5.19) é equivalente ao problema de encontrar soluções para a equação diferencial ordinária (5.24) dadas as condições iniciais de interesse. Por exemplo, se $u \equiv 0$ e $H \equiv 0$, então $(\mathbb{B}_a^3, \bar{g})$ (para $a = \infty$) é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e a solução para a equação acima com condições iniciais $x(0) = c_0$ e $x'(0) = 0$ é dada por

$$x(t) = c_0 \cosh \left(\frac{t}{c_0} \right), \quad (5.25)$$

sendo definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, vamos focar no caso em que $\bar{k}_1 + \bar{k}_2 = 0$. Precisamente, mostraremos que existe uma superfície mínima em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ com bordo estritamente convexo satisfazendo a condição

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, N)^2 \leq 2. \quad (5.26)$$

Em termos de $x(t)$ e $u(|x|^2)$, a condição acima pode ser reescrita como

$$-1 \leq \frac{\left(1 + 2u'(|x|^2)(x(t) - x'(t)t)x(t)\right)(x(t) - x'(t)t)}{(1 + 2u'(|x|^2)(x(t)^2 + t^2))x(t)(1 + x'(t)^2)} \leq 1. \quad (5.27)$$

Seja $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ uma superfície mínima parametrizada por (5.19), em que $x : [-s, s] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (5.24) para $H = 0$, sendo $r = \sqrt{x(s)^2 + s^2}$. Para garantir que a condição (5.26) é satisfeita sobre Σ precisamos verificar a desigualdade (5.27) para $x : [-s, s] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $\bar{g}$ é a métrica Euclidiana, então temos uma solução explícita para a equação (5.24) como em (5.25). Todavia, não é possível, em geral, obter uma solução explícita para a equação (5.24) quando consideramos $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ para uma função suave u qualquer. Desse modo, a verificação da condição (5.27) para esses casos não é um cálculo direto. A fim de simplificar os cálculos, vamos fixar uma função u de interesse como sugere o próximo parágrafo.

Seja $(\mathbb{R}^3, \bar{g})$ o espaço Gaussiano, i.e, o espaço Euclidiano com uma métrica conforme $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que $u(|x|^2) = -\frac{|x|^2}{8}$.

Nesse caso, a função potencial σ do campo conforme $\vec{x}$ com relação à métrica $\bar{g} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle$ é dada por $\sigma = \frac{4-|x|^2}{4}$.

Lembremos que para $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$, a existência de uma função $\Psi : \mathbb{B}_r^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Hess}_\Sigma \Psi \geq 0$ é garantida pelo Teorema 5.6 desde que a função potencial σ do campo conforme $\vec{x}$ seja positiva. Assim, para $\sigma = \frac{4-|x|^2}{4}$, temos que $\sigma > 0$ quando $r < 2$.

Desse modo, para $u(|x|^2) = -\frac{|x|^2}{8}$ a equação (5.24) com $H = 0$, pode ser reescrita como

$$\frac{x''(t)}{1 + x'(t)^2} = \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{2}(x(t) - x'(t)t). \quad (5.28)$$

O próximo Lema fornece condições para a existência de uma superfície mínima $\Sigma_\delta \subset \left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ com bordo estritamente convexo.

Lema 5.16. *Seja $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação acima com condições iniciais $x(0) < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $x'(0) = 0$. Então, existe $0 < \delta < c$ e $r = r(\delta)$ tal que a parametrização dada por (5.19) com $x|_{[-\delta, \delta]}$, produz uma superfície mínima $\Sigma_\delta \subset \left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ com bordo $\partial\Sigma_\delta \subset \partial\mathbb{B}_r^3$ estritamente convexo.*

A demonstração do Lema acima segue os seguintes passos: Primeiramente, fixamos um intervalo $[-s, s]$ onde a equação (5.28) possui solução. Sob a observação que $x(t) = x(-t)$ para todo $t \in [-s, s]$ concluímos que a função f definida em (5.21) cumpre $f(t) = -f(-t)$. Considerando a superfície $\Sigma_s = X([-s, s] \times [0, 2\pi])$ com bordo $\partial\Sigma_s := \alpha_{-s} \cup \alpha_s$, vimos pela Observação 5.15 que a curvatura geodésica do bordo de Σ_s com respeito à métrica canônica de $\mathbb{R}^3$ satisfaz, $k_{g_e}(-s) = -f(-s) = f(s) = k_{g_e}(s)$. Agora, considerando $\Sigma_s \subset (\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$, a equação (5.14) fornece a curvatura geodésica $\bar{k}_{g_e}$ do bordo $\partial\Sigma_s$ com respeito à métrica $\bar{g} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle$ em termos de k_{g_e} , precisamente, temos

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) &:= \bar{k}_{g_e} = e^{\frac{|x|^2}{8}} (k_{g_e} - \nu(h)) \\ &= e^{\left(\frac{x(t)^2 + t^2}{8}\right)} \left(f(t) - \frac{x(t)x'(t) + t}{4\sqrt{1 + x'(t)^2}} \right) \end{aligned}$$

Como f é ímpar, o mesmo valerá para $\bar{f}$. A condição sobre $x(0)$ garante que $\frac{d\bar{f}}{dt}(0) > 0$ e portanto, $\bar{f}$ é crescente em um intervalo $[-\delta, \delta]$ para algum $\delta > 0$. Logo, $\Sigma_\delta \subset \left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ é uma superfície mínima de bordo estritamente convexo.

O próximo Lema fornece condições para a existência de um $\varepsilon > 0$ de modo que a rotação de $x : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, solução de (5.28) produza uma superfície mínima satisfazendo a condição de gap (5.4).

Lema 5.17. *Seja $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação (5.28) com condições iniciais $x'(0) = 0$ e $x(0) = x_0 < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal*

que Σ_ε , parametrizada por (5.19) com $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, é uma superfície mínima em $\left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ de modo que a condição (5.27) é satisfeita sobre Σ_ε .

Para a demonstração do Lema acima define-se a função

$$\mathcal{F}(t) := \frac{[4 - x(t)(x(t) - x'(t)t)](x(t) - x'(t)t)}{x(t)(4 - x(t)^2 - t^2)(1 + x'(t)^2)}. \quad (5.29)$$

e por um cálculo direto, verifica-se que $\mathcal{F}(0) = 1$, $\mathcal{F}'(0) = 0$ e $\mathcal{F}''(0) < 0$. Assim, $\mathcal{F}$ admite um máximo local em $0 \in (-c, c)$. Por continuidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{F}(t) \leq 1 \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, isto é, a desigualdade (5.27) é satisfeita sobre Σ_ε .

Finalmente, escolhendo $\xi > 0$ como sendo o mínimo entre δ e ε nos dois Lemas anteriores decorre o seguinte Teorema.

Teorema 5.18. *Existe $r > 0$ e uma superfície mínima $\Sigma \subset (\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com bordo estritamente convexo $\partial\Sigma \subset \partial\mathbb{B}_r^3$ de modo que a condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, N)^2 \leq 2$$

é satisfeita sobre Σ .

Em [6], Sigurd B. Angenent mostrou a existência de um toro mínimo não circular $\mathbb{T}_\mathcal{A} \subset \left(\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ obtido pela revolução de uma curva planar fechada simples em torno de um eixo fixo. Vamos assumir que a curva perfil do toro de Angenent está no plano xz sendo rotacionada em torno do eixo z (Veja figura 1).

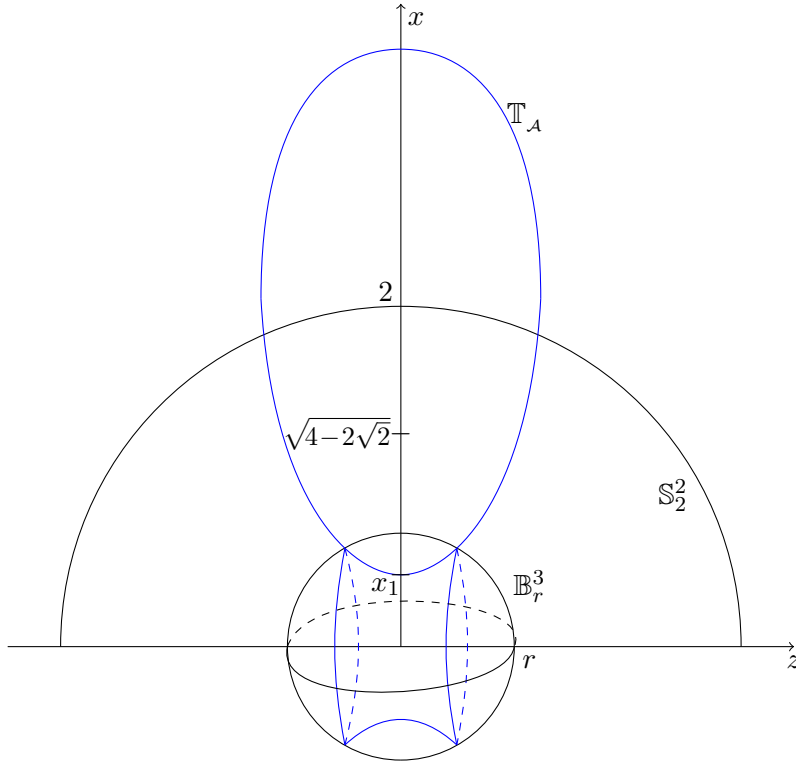


Figura 1. Superfície do Exemplo 5.19 obtida pela intersecção do toro de Angenent $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ com uma bola $\mathbb{B}_r^3$ no espaço $(\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Angenent mostrou que a curva perfil do toro $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ é simétrica com respeito ao eixo x e intersecta-o ortogonalmente em dois pontos $0 < x_1 < x_2$. Em ([27], Proposição 2.1), Möller obteve informações sobre a localização de $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$, dentre elas, a que mais nos interessa é sobre o valor de x_1 . Precisamente, foi obtido que

$$\frac{7}{16} - \frac{3}{98} < x_1 < \frac{7}{16} + \frac{3}{98}.$$

Seja $\beta(t) = (x(t), 0, t)$ uma parametrização local da curva perfil do toro $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ tal que $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições: $x(0) = x_1$ e $x'(0) = 0$. Temos que $x(0) = x_1 < \frac{7}{16} + \frac{3}{98} \approx 0,46811... < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1,08239$. O Teorema 5.18 fornece o seguinte exemplo.

Exemplo 5.19. Existe $r = r(x_1) < 2$ tal que $\Sigma := \mathbb{T}_{\mathcal{A}} \cap \mathbb{B}_r^3$ é uma superfície mínima $\Sigma \subset \left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ com bordo estritamente convexo em que a condição de gap

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, N)^2 \leq 2 \quad (5.30)$$

é satisfeita sobre Σ .

O exemplo acima pode não satisfazer a condição de fronteira livre. Nossa expectativa é que o valor de r possa ser escolhido de modo que $r < 2$ e $\Sigma = \mathbb{T}_{\mathcal{A}} \cap \mathbb{B}_r^3$ seja uma superfície mínima de fronteira livre em $\left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ onde a condição de gap (5.30) seja satisfeita. E se esse for o caso, uma questão interessante é: para r fixado, o disco totalmente geodésico e a superfície $\Sigma = \mathbb{T}_{\mathcal{A}} \cap \mathbb{B}_r^3$ são as únicas superfícies mínimas de fronteira livre em $\left(\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$ satisfazendo a condição (5.30)?

ALGUNS PROBLEMAS DA ÁREA E CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresentaremos alguns problemas da área e faremos uma breve conclusão.

6.1. ALGUNS PROBLEMAS DA ÁREA

É conhecido que o catenóide crítico é um anel mínimo de bordo livre mergulhado em $\mathbb{B}^3$. O disco equatorial plano é definido como sendo a interseção da bola unitária com um plano contendo a origem.

Os discos equatoriais planos são superfícies de bordo livre e totalmente geodésicas em $\mathbb{B}^3$. Nitsche mostrou que eles são de fato as únicas superfícies mínimas de fronteira livre imersas em $\mathbb{B}^3$ que são homeomorfas a um disco:

Teorema 6.1 (Nitsche - 1985). *Seja Σ^2 uma superfície mínima de bordo livre em $\mathbb{B}^3$. Se Σ^2 tem o tipo topológico do disco, então Σ^2 é um disco equatorial plano.*

Fraser e Li fizeram a seguinte conjectura:

Conjectura 6.2 (Fraser - Li -2012). *O catenóide crítico é a única superfície mínima anular em $\mathbb{B}^3$, mergulhada de bordo livre em $\mathbb{B}^3$ (a menos de movimentos rígidos).*

Fazendo um paralelo com as superfícies mínimas na $\mathbb{S}^3$, Lawson em 1970, fez a seguinte conjectura:

Conjectura 6.3 (Lawson - 1970). *O toro de Clifford é o único toro mínimo mergulhado em $\mathbb{S}^3$ (a menos de movimentos rígidos).*

A qual foi provada por Simon Brendle em 2013 em [10].

Sugerimos ao leitor o trabalho de Li, [23], que tem vários problemas em abertos com a temática abordada neste minicurso.

6.2. CONCLUSÃO

Vimos neste livro alguns resultados da área de superfície mínimas ou CMC. Como dissemos, aqui é apenas uma sementinha que tentamos jogar para despertar ainda mais o interesse, principalmente dos jovens, nesta vasta e rica área da Matemática! Esperamos ter contribuindo com a divulgação desta temática. A todos, nossos agradecimentos pela oportunidade.

APÊNDICES

RESULTADOS AUXILIARES

Nesta seção, provaremos alguns resultados que foram usados ao longo do texto principal.

Seja (M^n, g) variedade Riemanniana com fronteira ∂M , possivelmente não vazia. Considere Σ^{n-1} uma hipersuperfície compacta, conexa, e *2-sided* com $\partial\Sigma$ tal que Σ está imersa em M e $\partial\Sigma \subset \partial M$. Dizemos que Σ é dita propriamente imersa (resp. mergulhada) em M quando Σ é imersa (resp. mergulhada) em M e $\Sigma \cap \partial M = \partial\Sigma$.

Definição A.1. Uma variação admissível de Σ é uma aplicação diferenciável

$$f : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

tal que, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a hipersuperfície $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$ é propriamente imersa em M , onde $f_t : \Sigma \rightarrow M$ é dada por $f_t(p) = f(p, t)$ com $f_0(\Sigma) = \Sigma$.

Chamamos de campo variacional $V = \frac{\partial f}{\partial t}$. Denotemos por $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, onde $(x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas locais em Σ .

Suponha que Σ seja *2-sided*, ou seja, existe um campo normal diferenciável, globalmente definido em Σ . Dessa forma, podemos escrever

$$V = V^T + V^\perp = V^T + g(V, N)N = V^T + \rho N,$$

em que $\rho = g(V, N)$ é chamada de função lapso.

Para obtermos a primeira variação de área, inicialmente, vamos encontrar a variação do tensor métrica.

Proposição A.2. *A variação da métrica é dada por:*

$$\partial_t(g_{ij}) = g(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} V), \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_t g_{ij} = -2g^{ik} g^{jl} g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l), \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Primeiro, pela regra de Leibniz, temos

$$\partial_t g_{ij} = \partial_t g(\partial_i, \partial_j) = g(\nabla_V \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_V \partial_j) = g(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} V).$$

O que prova o item (A.1).

Agora, usando que $g^{ik} g_{kl} = \delta_{il}$, obtemos

$$\partial_t(g^{ik} g_{kl}) = \partial_t(\delta_{il}) = 0.$$

Daí,

$$\partial_t(g^{ik}) g_{kl} + g^{ik} (\partial_t g_{kl}) = 0.$$

Usando (A.1), temos

$$\partial_t(g^{ik}) g_{kl} + g^{ik} (g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_l} V)) = 0.$$

Multiplicando por g^{lj} , conseguimos

$$(\partial_t g^{ik}) g_{kl} g^{lj} + g^{ik} g^{lj} (g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_l} V)) = 0.$$

Novamente, como $g^{ik} g_{kl} = \delta_{il}$, segue que

$$\partial_t g^{ij} = -2g^{ik} g^{lj} g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l),$$

onde usamos que temos dois somatórios, um em k e o outro em l , e a parcela $g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l)$ aparecerá duas vezes. Finalmente, como $g^{lj} = g^{jl}$, segue o resultado. $\square$

O funcional área da variação f é a função $|\Sigma_t| : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|\Sigma_t| = \int_{\Sigma} dA_t,$$

onde dA_t é o elemento de volume da hipersuperfície Σ_t induzida por f .

Antes de provarmos a primeira variação de área, precisamos do seguinte resultado:

Lema A.3. *Seja $A(t) = (a_{ij}(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ caminho suave de matrizes $n \times n$ tal que $A(0) = Id$, então*

$$\frac{d}{dt} \det A(t)|_{t=0} = \text{tr} A'(0).$$

Proposição A.4. *(Primeira variação de área) Com as hipóteses anteriores. A primeira variação de área de Σ é dada por:*

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t|_{t=0} = \int_{\Sigma} Hg(V, N) dA + \int_{\partial\Sigma} g(\nu, V) dl,$$

onde ν é o vetor normal a ∂M que aponta para fora de M .

Demonstração. Observe que, pelo Teorema da divergência, basta mostrarmos que

$$\frac{d}{dt} dA_t|_{t=0} = \text{div}(V^T) + Hg(V, N).$$

De fato, usando a regra de Leibniz, temos

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t|_{t=0} = \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} dA_t|_{t=0}.$$

Fixemos $p \in \Sigma$ e um referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$, numa vizinhança $U \subset \Sigma$ de p , ortonormal em relação à métrica g . Podemos admitir que $(f_t)|_U : U \rightarrow U_t = f_t(U)$ é um mergulho para $|t| < \epsilon$, caso seja necessário basta diminuir U . Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial em U_t tal que $df_t e_i = e_t$. Em particular, tem-se que $e_i(0) = e_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Agora defina

$$g_{ij}(t) = g(e_i(t), e_j(t)), \quad 1 \leq i, j, \leq n.$$

Seja $\{\tilde{e}_i(t)\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em U_t com relação a métrica g e com a mesma orientação de $\{e_1, \dots, e_n\}$. Então

$$e_i(t) = a_{ij}^T \tilde{e}_j(t),$$

onde $A(t) = a_{ik}^T$ tem determinante positivo. Daí,

$$g_{ij}(t) = g(e_i(t), e_j(t)) = a_{ik}^T a_{jk}^T = (A(t)A^T(t))_{ij}.$$

O que implica $\det A(t) = \sqrt{g(t)}$, onde $g(t) = \det(g_{ij}(t))$.

Observe que $dA_t(e_1, \dots, e_n) = \det A(t) = \sqrt{g(t)}$. Com efeito, considere dA_t como sendo o elemento de volume de Σ_t em relação à métrica g . Então,

$$\begin{aligned} dA_t(e_1, \dots, e_n) &= (f_t^* dA_t)(e_1, \dots, e_n) \\ &= dA_t(df_t e_1, \dots, df_t e_n) \\ &= dA_t(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det A(t) dA_t(\tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t)) \\ &= \det A(t) = \sqrt{g(t)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\det A(t) = \sqrt{g(t)} dA$.

Como $g_{ij}(0) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, segue que $g(0) = \det g_{ij}(0) = \det Id = 1$. O que implica

$$\frac{d}{dt} dA_t|_{t=0} = \frac{1}{2\sqrt{g(0)}} \frac{d}{dt} g(0) dA = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt}(0) dA.$$

Pelo Lema auxiliar, temos que $\frac{dg}{dt}(0) = \text{tr}(g'_{ij}(0))$, o que nos fornece

$$\frac{d}{dt} dA_t|_{t=0} = \frac{1}{2} g'_{kk}(0) dA,$$

onde $g'_{kk}(t) = \partial_t g(e_k(t), e_k(t)) = 2g(\nabla_V e_k(t), e_k(t))$. Mostraremos que

$$\nabla_V e_k(t) = \nabla_{e_k(t)} V.$$

De fato, considere em $\Sigma \times (-\epsilon, \epsilon)$ a métrica produto e $i_t : \Sigma \rightarrow \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon)$ a inclusão canônica, ou seja, $i_t(y) = (y, t)$. Denotemos também por e_k o levantamento vertical de $e_k \in \mathfrak{X}(U)$ a $U \times (-\epsilon, \epsilon)$, e note que $[\partial_t, e_k] = 0$. Como $f_t = f \circ i_t$, temos

$$e_k(t) = df_t(e_k) = df(r, t) \circ (di_t)_r e_k = df_{(r,t)} e_k.$$

Usando propriedades dos colchetes de Lie, temos que

$$[V, e_k(t)]_{f(r,t)} = [df_{(r,t)} \partial_t, df_{(r,t)} e_k] = df_{r,t} [\partial_t, e_k] = 0.$$

Donde, $\nabla_V e_k(t) = \nabla_{e_k(t)} V$. Daí,

$$g'_{kk}(t) = 2g(\nabla_{e_k(t)} V, e_k(t)) = 2\{e_k(t)g(V, e_k(t)) - g(V, \nabla_{e_k(t)} e_k(t))\}.$$

Usando que $g(e_k, N) = 0$, temos $g(N, \nabla_{e_k} e_k) = -g(\nabla_{e_k} N, e_k)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g'_{kk}(0) &= e_k(0)g(V, e_k(0)) - g(V, \nabla_{e_k(0)} e_k(0)) \\ &= e_k g(V, e_k) - g(V, \nabla_{e_k} e_k) \\ &= e_k g(V^T + g(V, N)N, e_k) - g(V^T + g(V, N)N, \nabla_{e_k} e_k) \\ &= g(\nabla_{e_k} V^T, e_k) - g(V, N)g(N, \nabla_{e_k} e_k). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}dA_t|_{t=0} = \operatorname{div}g(V^T) + Hg(V, N).$$

E o resultado segue. □

Dado um ponto crítico do funcional área, i.e., dada uma hipersuperfície mínima com bordo livre, podemos calcular a segunda variação de área. Seja Σ^{n-1} uma hipersuperfície com bordo livre em M . Para toda variação admissível Σ_t de Σ , temos que

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}|\Sigma_t| = - \int_{\Sigma} \phi \{ \Delta \phi + (Ric(N, N) + |A|^2) \phi \} dA + \int_{\partial \Sigma} \phi \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - II(N, N) \phi \right\} dl,$$

onde Ric é o tensor de Ricci de M e Δ é o operador de Laplace de Σ com respeito a métrica induzida de M . A prova deste fato pode ser feita usando os argumentos modificados de Barbosa-do Carmo [9].

A seguir apresentaremos algumas proposições que serão importantes para o decorrer do minicurso.

Proposição A.5. *Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica. Suponha que M tem curvatura seccional constante. Então $\Delta_{\Sigma}|x|^2 = 2nH\langle x, N \rangle + 2n$.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Sejam $p \in \Sigma$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ referencial geodésico e considere $x(p) = X(p)$ vetor posição. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma |X|^2 &= \sum_{i=1}^n e_i e_i |X|^2 = 2 \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, X \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n e_i \langle e_i, X \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, X \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle \\
&= 2 \left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle + \langle (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N, X \rangle \right) + 2n \\
&= 2nH \langle N, X \rangle + 2n.
\end{aligned}$$

Agora se $x : \Sigma^n \rightarrow Q_c^{n+1}$, $c \neq 0$ ($\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$). Sejam $p \in \Sigma$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ referencial geodésico, escreva $X = X^T + X^N$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma |X|^2 &= \sum_{i=1}^n e_i e_i |X|^2 \\
&= 2 \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, X \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n e_i \langle e_i, X \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, X \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \langle X, N \rangle N \rangle + \sum_{k=1}^n \langle X, e_k \rangle e_k + 2n \\
&= 2 \langle N, X \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle + 2n. \\
&= 2nH \langle N, X \rangle + 2n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta_{\Sigma}|X|^2 = 2nH\langle N, X \rangle + 2n.$$

□

Proposição A.6. *Sejam $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica, $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial local ortonormal e N um campo vetorial normal à imersão x . Então,*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = -|A|^2,$$

onde A é o operador forma.

Demonstração. Com efeito, seja $\bar{\nabla}$ a conexão de M^{n+1} e ∇ a conexão de M . Como $\langle N, N \rangle = 1$, então

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Daí, $\bar{\nabla}_{e_i} N$ é um campo local tangente a Σ . Assim,

$$0 = e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.$$

O que implica,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle e_j, \left\langle \sum_{k=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle e_k \\ &= - \left\langle \sum_{i,j=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle^2 = -|A|^2. \end{aligned}$$

□

Proposição A.7. *Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica CMC. Suponha que M tem curvatura seccional constante, então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = 0, \forall k = 1, \dots, n,$$

onde $\{e_i(p)\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico em $p \in \Sigma$.

Demonstração. De fato, seja $p \in \Sigma$ e considere $\{e_i(p)\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico, então $\nabla_{e_j} e_i(p) = 0$, $\bar{\nabla}_{e_j} e_i(p) \in (TM)^\perp$. Daí, $[e_i, e_j](p) = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Como $\langle N, e_k \rangle = 0$, então $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = 0$. O que nos fornece

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle - \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle.$$

Por um lado, usando que $\langle N, N \rangle = 1$, então $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$, ou seja, $\bar{\nabla}_{e_i} N$ é um vetor tangente a Σ . O que implica

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_k(p) = \nabla_{e_i} e_k + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle N = \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle N$$

é um vetor normal. Daí,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle. \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado,

$$\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k - \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle = \langle N, [e_i, e_k] \rangle = 0.$$

Assim, $\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle$. Daí, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle.$$

Ou seja,

$$\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p).$$

Agora, usando (A.3), temos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p). \quad (\text{A.4})$$

Desde que M^{n+1} tem curvatura seccional constante, então pela equação de Gauss, obtemos

$$\langle \bar{R}(e_i, e_k)e_i, N \rangle = c(\langle e_i, e_i \rangle \langle e_k, N \rangle - \langle e_k, e_i \rangle \langle e_i, N \rangle) = 0.$$

O que implica,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i + \bar{\nabla}_{[e_i, e_k]} e_i, N \rangle = 0.$$

E assim,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i, N \rangle. \quad (\text{A.5})$$

De (A.3) e (A.4), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = - \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} (\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i) \rangle. \end{aligned}$$

Note que $\langle N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = nH$. Como H é constante, então

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = - \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} (\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i) \rangle.$$

Finalmente, concluímos que

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = 0.$$

□

Proposição A.8. *Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica CMC. Suponha que M tem curvatura seccional constante. Seja $u = \langle x, N \rangle$, onde N um campo vetorial normal à imersão x . Então,*

$$\Delta_{\Sigma} u = -nH - u|A|^2.$$

Demonstração. Sejam $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal e N um campo vetorial unitário normal à x .

$$\begin{aligned}
\Delta u(p) &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i \langle x, N \rangle)(p) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i(\langle \bar{\nabla}_{e_i} x, N \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)(p) \\
&= \sum_{i=1}^n (\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)(p) \\
&= -nH + \langle x, N \rangle \langle N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle \\
&= -nH - |A|^2.
\end{aligned}$$

□

Proposição A.9. *Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica. Seja $u = \langle x, N \rangle$, onde N um campo vetorial normal à imersão x . Considere $x^T = x - uN$. Então,*

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(x^T) = n + nHu.$$

Demonstração. Denotemos por $x^{\perp} = \langle x, N \rangle N$. Dessa forma, podemos escrever $x^T = x - x^{\perp}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\Sigma}(x - x^{\perp}) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(x - x^{\perp}), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} x, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} x^{\perp}, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} x, e_i \rangle + \langle x, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^{\perp} \rangle \\
&= n + \langle x, nHN \rangle \\
&= n + nH \langle x, N \rangle.
\end{aligned}$$

□

Como consequência desta última proposição, obtemos

Corolário A.10. *Com as hipóteses da proposição anterior e considere que Σ tem bordo, $\partial\Sigma$. Admita que estamos trabalhando com free boundary, então*

$$L(\partial\Sigma) = nA(\Sigma) + n \int_{\Sigma} H u dA.$$

Demonstração. Pelo Teorema da Divergência e desde que estamos com a hipótese de bordo livre, então

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \langle x - \langle x, N \rangle N, \nu \rangle dl &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(x^T) dA \\ &= \int_{\Sigma} (n + nHu) dA = nA(\Sigma) + n \int_{\Sigma} H u dA. \end{aligned}$$

Usando que $\langle N, \nu \rangle = 0$ em $\partial\Sigma$, segue o resultado. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALENCAR, H. e DO CARMO, M.P. (1994). *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres*. Proc. Amer. Math. Soc.
- [2] ALEXANDROV, A.D. (1962). *A Characteristic Property of Spheres*. Annali di Matematica Pura ed Applicata.
- [3] AMBROZIO, L. (2015). *Rigidity of Area-minimizing Free Boundary Surfaces in Mean Convex Three-manifolds*. Journal of Geometric Analysis.
- [4] AMBROZIO, L. e NUNES I. (2021). *A gap Theorem for Free Boundary Minimal Surfaces in the three-ball*. Communications in Analysis and Geometry.
- [5] ANDRADE, M., BARBOSA, E. e PEREIRA, E. (2021). *Gap Results for Free Boundary CMC Surfaces in Radially Symmetric Conformally Euclidean Three-Balls*. J. Geom. Anal.
- [6] ANGENENT, S. (1992). *Shrinking Doughnuts*. Nonlinear Differential Equations Appl.
- [7] BARBOSA, E. (2018). *On Stable CMC Hypersurfaces with Free-Boundary in a Euclidean Ball*. Mathematische Annalen.
- [8] BARBOSA, E., CAVALCANTE, M.P. e PEREIRA, E. (2019). *Gap Results for Free Boundary CMC Surfaces in the Euclidean Three-Ball*. arXiv:1908.09952 .

- [9] BARBOSA, J.L. e CARMO, M. do. (1984). *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*. Mathematische Zeitschrift.
- [10] BRENDLE, S. (2013). *Embedded Minimal Tori in $\mathbb{S}^3$ and the Lawson Conjecture*. Acta Mathematica.
- [11] CHENG, S-Y. (1976). *Eigenfunctions and Nodal Sets*, Comment. Math. Helvetici.
- [12] CHERN, S.S., DO CAMRO M.P. e KOBAYASHI, S. (1970). *Minimal Submanifolds of Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length*. Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag.
- [13] DO CARMO, M. P. (2008). *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [14] FOLHA, A., PACARD, F. e ZOLOTAREVA, T. (2017). *Free Boundary Minimal Surfaces in the Unit 3-ball*. Manuscripta Mathematica.
- [15] FORNARI, S. e RIPOLL, J. (2004). *Killing Fields, Mean Curvature, Translation Maps*, Illinois J. Math.
- [16] FRASER, A. e SCHOEN, R. (2016). *Sharp Eigenvalue Bounds and Minimal Surfaces in the Ball*. Invent. Math.
- [17] GABARD, A. (2006). *Sur la Representation Conforme des Surfaces de Riemann à bord et une Caractérisation des Courbes Séparantes*. Commentarii Mathematici Helvetici.
- [18] GRÜTER, M. e JOST, J. (1986). *On Embedded Minimal Disks in Convex Bodies*. Ann. Inst. H. Poincare Anal. No Linaire .
- [19] GRÜTER, M. e JOST, J. (1986). *Allard Type Regularity Results for Varifolds with Free Boundaries*. Ann. Scuola Nor Sup. Pisa Cl. Sci.
- [20] KENMOTSU, K. (1980). *Surfaces of Revolution with Prescribed Mean Curvature*. Tôhoku Math.

- [21] KETOVER, D., (2016). *Free Boundary Minimal Surfaces of Unbounded Genus*. arXiv:1612.08691.
- [22] LI, H. e XIONG, C. (2018). *A Gap Theorem for Free Boundary Minimal Surfaces in Geodesic Balls of Hyperbolic Space and Hemisphere*. The Journal of Geometric Analysis.
- [23] LI, M. (2019). *Free Boundary Minimal Surfaces in the Unit Ball: recent advances and open questions*. arXiv preprint arXiv:1907.05053.
- [24] LOPEZ, R. (2013). *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*. Springer Monographs in Mathematics.
- [25] MÁXIMO, D., NUNES, I., SMITH, G. (2017). *Free Boundary Minimal Annuli in Convex Three-manifolds*. J. Differential Geom.
- [26] MONTEIRO, L. (2006). *Estabilidade de Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante em Variedades Riemannianas de Curvatura Seccional Constante*. UFF. Dissertação de Mestrado.
- [27] MÖLLER, N.M. (2011). *Closed Self-Shrinking Surfaces in $\mathbb{R}^3$ via the Torus*. arXiv:1111.7318.
- [28] NITSCHKE, J.C.C. (1985). *Stationary Partitioning of Convex Bodies*. Arch. Rational Mech. Anal.
- [29] NUNES, I. (2017). *On Stable Constant Mean Curvature Surfaces with Free Boundary*. Mathematische Zeitschrift.
- [30] ROS, A. (2008). *Stability of Minimal and Constant Mean Curvature Surfaces with Free Boundary*. Mat. Contemp.
- [31] ROS, A. e VERGASTA, E. (1995). *Stability for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Free Boundary*. Geometriae Dedicata.
- [32] SANTOS, A., (2018). *Hipersuperfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Fronteira Livre*. UFS. Dissertação de Mestrado.

- [33] STRUWE, M. (1988). *The Existence of Surfaces of Constant Mean Curvature with Free Boundaries*. Acta Mathematica.
- [34] VOLKMANN, A. (2014). *A Monotonicity Formula for Free Boundary Surfaces with Respect to the Unit Ball*. arXiv preprint arXiv:1402.4784.
- [35] WANG, G. e XIA, C. (2019). *Uniqueness of Stable Capillary Hypersurfaces in a Ball*. Mathematische Annalen.

