

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORDESTE



V Colóquio de Matemática
da Região Nordeste

GRUPOS DE CAMINHOS E LAÇOS, MEDIDA DE WIENER, E MÉDIAS INVARIANTES

VLADIMIR PESTOV



SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**GRUPOS DE CAMINHOS E
LAÇOS, MEDIDA DE WIENER,
E MÉDIAS INVARIANTES**

Grupos de caminhos e laços, medida de Wiener, e Médias invariante

Copyright © 2023 Vladimir Pestov

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice- Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita

Diretores: Walcy Santos

Jorge Herbert Soares de Lira

Daniel Gonçalves

Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Ronaldo Garcia

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Capa: Pablo Diego Regino

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)

ISBN (eBook) 978-85-8337-212-7

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pestov, Vladimir

Grupos de caminhos e laços, medida de Wiener,
e Médias invariantes [livro eletrônico] : V Colóquio
de Matemática da Região Nordeste / Vladimir Pestov.

-- 1. ed. -- Rio de Janeiro, RJ : Sbm, 2023. --

(Coleção colóquios de matemática)

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-85-8337-212-7

1. Invariantes 2. Matemática - Estudo e ensino
3. Wiener, Norbert, 1894-1964 I. Título. II. Série.

23-161498

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino 510.7

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORDESTE



V Colóquio de Matemática
da Região Nordeste

GRUPOS DE CAMINHOS E LAÇOS, MEDIDA DE WIENER, E MÉDIAS INVARIANTES

VLADIMIR PESTOV

1ª EDIÇÃO
2023
RIO DE JANEIRO



SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

Prefácio

1	Médias invariantes	1
1.1	Grupos compactos	1
1.2	Grupo aditivo \mathbb{R}	4
1.3	Distância em variação total	6
1.4	Funções uniformemente contínuas à direita	8
1.5	Grupo discreto livre F_2	12
2	Medida de Wiener	15
2.1	Medidas gaussianas unidimensionais	15
2.2	Medidas gaussianas multidimensionais	19
2.3	Caso ℓ^2 , tentativa fracassada	22
2.4	Medida γ^∞	23
2.5	Espaço de Wiener clássico	33
2.6	Funções Lipschitz- α contínuas	37
3	Integral multiplicativa	41
3.1	Derivada logarítmica à direita	41
3.2	Integral multiplicativa	44
3.3	Aplicação de Itô	49
3.4	Equivariância	57
3.5	Médias invariantes sobre grupos de caminhos e laços	61
	Referências	63

PREFÁCIO

Essas notas de minicurso são uma tentativa de esboçar uma prova, entendível para o próprio ministrante, do resultado seguinte.

Teorema 0.1 (Paul Malliavin e Marie-Paule Malliavin [25] (1992)). *Seja K um grupo de Lie compacto. Os grupos de caminhos $C(\mathbb{I}, K)$ e de laços $C(\mathbb{S}^1, K)$ contínuos são mediáveis.*

Claro que todos os erros introduzidos pela simplificação são os meus.

Um grupo de Lie compacto é simplesmente um sub-grupo fechado do grupo $SO(n)$ de matrizes ortogonais de determinante 1, munido da topologia euclidiana induzidas. O caso interessante é onde K é conexo.

O grupo $C(\mathbb{I}, K)$ consiste de todas as aplicações contínuas do intervalo fechado, $\mathbb{I} = [0, 1]$, para K . As operações de grupo estão definidas de modo pontual: $(fg)(t) = f(t)g(t)$ e $f^{-1}(t) = f(t)^{-1}$ para $t \in \mathbb{I}$. A topologia sobre $C(\mathbb{I}, K)$ é a de convergência uniforme, dada pela qualquer métrica de tipo $d(f, g) = \max\{\|f(t) - g(t)\| : t \in \mathbb{I}\}$, onde a norma é uma norma sobre o espaço vetorial de dimensão finita $M_n(\mathbb{R})$ de matrizes (nota-se que topologicamente, essas normas são todas equivalentes). É fácil verificar que, com tais operações e topologia, o grupo de caminhos $C(\mathbb{I}, K)$ torna-se um grupo topológico, ou seja, as operações de multiplicação e de inversão são aplicações contínuas. O grupo $C(\mathbb{I}, K)$ se chama o grupo de caminhos contínuos.

O grupo $C(\mathbb{S}^1, K)$ de laços contínuos é definido de forma análoga.

Definição 0.2. Um grupo topológico G se chama *mediável* (*amenable*, em inglês, ou *moyennable*, em francês), se cada vez que G age sobre um espaço compacto, X , existe uma medida de probabilidade (boreliana e regular), μ , sobre X , invariante sob a ação de G .

Uma *ação* de G sobre um espaço compacto X é uma aplicação contínua $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, tal que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ e $e \cdot x = x$, onde e é o elemento neutro de G .

Os grupos de caminhos e de laços jogam um papel importante na matemática e na física matemática, principalmente no caso de aplicações mais suaves [36, 1]. Parece que não se sabe se tais grupos são mediáveis, a partir de classe de suavidade ligeiramente mais alta que C^0 , a classe H^1 de Sobolev. Para grupos de aplicações $C(X, K)$ de uma variedade compacta, X , não se sabe se eles são mediáveis para $\dim X > 1$, mesmo no caso C^0 [5, 33].

A prova exige várias noções e ferramentas. Elas incluem as médias invariantes, a medida de Wiener, a integral multiplicativa, e a aplicação de Itô. Uma média invariante [11, 17] sobre um grupo G é um funcional linear e positivo $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ (onde \mathcal{F} é um espaço de funções reais sobre G), que envia a função 1 para 1 e toma o mesmo valor em f e em translação de f por qualquer elemento de G . A medida de Wiener [23, 3] é um análogo da medida gaussiana para espaços de dimensão infinita. A integral multiplicativa [9, 28] é uma versão da integral clássico de Riemann e Lebesgue, onde a adição é trocada por multiplicação, que pode ser não comutativa. A aplicação de Itô [25] é uma versão estocástica da integral multiplicativa.

A busca de provas e construções que se encaixassem em 3 aulas, sem dúvida, trouxe mais de um erro escondido nessas notas. A minha única justificativa é as palavras de Liev Tolstói: *um trabalho mal feito é melhor do que nenhum*.

Esse trabalho foi apoiado pela bolsa DCR-A do CNPq e FAPESQ do Programa de Desenvolvimento Científico e Tecnológico Regional do Estado da Paraíba, processo 300050/2022-4.

João Pessoa, Novembro de 2022

Vladimir Pestov

MÉDIAS INVARIANTES

1.1. GRUPOS COMPACTOS

Os grupos compactos – por exemplo, o grupo special ortogonal $SO(n)$ – formam uma espécie mais imediata de grupos topológicos mediáveis. Relembramos que cada grupo compacto admite uma medida de probabilidade boreliana e regular, ν , chamada medida de Haar, que é invariante à esquerda e à direita. (Para uma construção elegante da medida de Haar que pertence a von Neumann, o leitor pode consultar, por exemplo, as minhas notas [32], p. 444, disponíveis gratuitamente no site do IMPA). Agora suponha que um grupo compacto, K , aja sobre um espaço compacto, X . Escolha qualquer ponto $\xi \in X$ e defina a aplicação de órbita:

$$\text{orb}_\xi: G \ni g \mapsto g \cdot \xi \in X.$$

Como a ação $K \times X \rightarrow X$ é contínua, a aplicação orb_ξ de G por X é contínua também. Definamos a imagem direita $\mu = \text{orb}_{\xi,*}(\nu)$ da medida de Haar ν por orb_ξ como segue: para cada conjunto boreliano $A \subset X$,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \nu \{g \in G: g \cdot \xi \in A\} \\ &= \nu [\text{orb}_\xi^{-1}(A)]. \end{aligned}$$

Esta ν é uma medida de probabilidade boreliana e regular sobre X , e ela é invariante sob a ação de K : qual quer que seja $g \in K$,

$$\begin{aligned}\mu(gA) &= \nu \{h \in G: h \cdot \xi \in gA\} \\ &= \nu \{gh \in G: h \cdot \xi \in A\} \\ &= \nu [g \cdot \text{orb}_\xi^{-1}(A)] \\ &= \mu(A),\end{aligned}$$

pois ν é invariante sob translações á esquerda em K .

Observação 1.1. Este é o limite da utilidade de medidas *invariantes*. Segundo o teorema de André Weil ([42], Appendice I), sob umas hipóteses bastante fracas, um grupo topológico admitindo uma medida de probabilidade invariante à esquerda é necessariamente compacto. Em particular, um resultado que Oxtoby [29] atribui a Ulam, diz que um grupo polonês (separável e completamente metrizável), admitindo uma medida boreliana invariante à esquerda, é compacto. Veja também [16], Apêndice, para mais.

Porém, as medidas *assintoticamente invariantes* são muito comuns. Um caso onde elas aparecem é o de grupos topológicos G *aproximados por subgrupos compactos*, no sentido seguinte: para cada vizinhança V de identidade em G e cada subconjunto finito $g_1, g_2, \dots, g_n, n \in \mathbb{N}$, existe um subgrupo topológico compacto K de G e os elementos $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ tais que $g_i x_i^{-1} \in V$ para todos $i = 1, 2, \dots, n$. Deixemos como exercício o resultado seguinte (que não vamos usar, porém fazer o exercício vai ajudar a compreensão).

Exercício 1.2. Mostrar que cada grupo topológico G aproximado por subgrupos compactos é mediável.

Dois exemplos de grupos deste gênero são os seguintes.

Exemplo 1.3. O grupo $O(\mathcal{H})$ consiste de todos os operadores ortogonais sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} , ou seja, os operadores $u: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ com $uu^* = u^*u = \mathbb{I}$. A topologia de $O(\mathcal{H})$ é a *topologia forte*: a topologia mais fraca tal que todas as aplicações de órbita,

$$O(\mathcal{H}) \ni u \mapsto u\xi \in \mathcal{H}, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

são contínuas. É uma sequência de exercícios interessante, de verificar que $O(\mathcal{H})$ é um grupo topológico, metrizável, separável e completo se \mathcal{H} é separável, e que $O(\mathcal{H})$ é aproximado por subgrupos compactos, nomeadamente os de forma $O(n)$.

Exemplo 1.4. Seja (X, μ) um espaço probabilístico padrão, ou seja, um conjunto munido de uma sigma-álgebra isomorfa à sigma-álgebra boreliana de um espaço métrico separável e completo, e uma medida de probabilidade não-atômica. Denotaremos $\text{Aut}(X, \mu)$ o grupo de todas as classes de equivalência de aplicações mensuráveis de X por se mesmo que conservam a media μ . (Duas aplicações são equivalentes se eles coincidem em μ -quase toda parte, ou seja, sobre um conjunto de medida 1). Um automorfismo possui um inverso, f^{-1} , que é também um automorfismo e satisfaz $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$ em quase toda parte. (Exercício; usa-se teorema de Luzin, veja por exemplo [32], teor. E.2.14, onde sem perda de generalidade pode-se supor que f toma valores em X próprio).

A topologia sobre $\text{Aut}(X, \mu)$ é a chamada *topologia fraca*: a topologia mais fraca tal que todas as aplicações

$$\text{Aut}(X, \mu) \ni g \mapsto \mu(A\Delta gA) \in \mathbb{R}$$

são contínuas, onde $A \subseteq X$ é um subconjunto boreliano. (Basta supor que A pertence à uma família que gera a sigma-álgebra boreliana, exercício). Mostrar que $\text{Aut}(X, \mu)$ é um grupo topológico, separável, metrizável com uma métrica completa (ou seja, um grupo *polonês*). Todos os resultados necessários sobre espaços com medida podem ser achados em [32].

É menos trivial de mostrar que o grupo $\text{Aut}(X, \mu)$ é aproximado por subgrupos compactos - de fato, subgrupos finitos de permutações de subintervalos. Isso é uma consequência do famoso lema de Rokhlin (ou de Kakutani–Rokhlin), importante na teoria ergódica (veja, por exemplo, [21], pp. 65–68, ou [40], p. 25, 1.4.3, e p. 26, exercício 1.4.4). Veja também [14], sect. 4.

Nota-se que os grupos $U(\mathcal{H})$ (quando $\dim \mathcal{H} = \infty$) e $\text{Aut}(X, \mu)$ não são localmente compactos (exercício).

Exercício 1.5. Seja X um espaço compacto totalmente desconexo (naquele caso ele tem uma base que consiste de conjuntos abertos e fechados). Seja K um grupo compacto. Mostra que o grupo $C(X, K)$ de aplicações contínuas de X para K , munido da topologia de convergência uniforme, é aproximado por subgrupos compactos, em particular, é mediável.

1.2. GRUPO ADITIVO \mathbb{R}

Vamos mostrar que o grupo aditivo de números reais, com a topologia padrão, é mediável. Dado $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, escolhamos $T > 0$ tão grande que $|x|/T < \varepsilon$. Definamos uma medida de probabilidade, ν_T , como a restrição de medida de Lebesgue sobre o intervalo $[-T, T]$, normalizada de modo que $\nu_T(\mathbb{R}) = 1$. Em outras palavras,

$$\nu_T(A) = \frac{1}{2T} \lambda(A \cap [-T, T]),$$

e para qualquer função mensurável e limitada, f ,

$$\int f d\nu_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt.$$

Vamos introduzir uma notação geral. Suponha que um grupo G aja sobre um espaço mensurável X , e μ é uma medida sobre X . Para um elemento $g \in G$, denotaremos $g * \mu$ a translação de μ por g :

$$g * \mu(A) = \mu(g \cdot A).$$

De modo equivalente, para cada função integrável sobre X ,

$$\int f(x) dg * \mu(x) = \int {}^g f(x) d\mu,$$

onde

$${}^g f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Por exemplo, vamos denotar ${}^x f$ a translação aditiva de f por x , definida por

$${}^x f(t) = f(t - x).$$

Suponha para simplicidade que $x > 0$. A mudança de variáveis mostra que

$$\int_{-T}^{T-x} f(t) dt = \int_{-T+x}^T {}^x f(t) dt.$$

Suponha que f é mensurável e limitada por 1. Temos

$$\begin{aligned} \left| \int f d\nu_T - \int {}^x f d\nu_T \right| &\leq \left| \int_{[-T+x, T]} {}^x f d\nu_T - \int_{[-T, T-x]} f d\nu_T \right| + \\ &\quad + \left| \int_{[T-x, T]} f d\nu_T \right| + \\ &\quad + \left| \int_{[-T, -T+x]} \int {}^x f d\nu_T \right| \\ &\leq 0 + \frac{x}{T} + \frac{x}{T} \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Claro que a mesma conclusão é válida se $x < 0$. Isso significa que a *distância em variação total* (que vamos definir em breve) entre a medida ν_T e a translação dela por x converge para zero quando $T \rightarrow \infty$. Como diz-se, as medidas (ν_T) são *assintoticamente invariantes*.

Agora suponha que \mathbb{R} aja sobre um espaço compacto, X . Escolhamos $\xi \in X$, e formamos as imagens direitas das medidas ν_T em X ao longo da aplicação de órbita, $\text{orb}_\xi: \mathbb{R} \ni x \mapsto x \cdot \xi \in X$:

$$\mu_T = \text{orb}_{\xi*}(\nu_T).$$

Para qualquer função contínua $f \in C(X)$ e qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu_T &= \int_{\mathbb{R}} f \circ \text{orb}_\xi d\nu_T, \\ \int_X {}^x f d\mu_T &= \int_{\mathbb{R}} ({}^x f) \circ \text{orb}_\xi d\nu_T, \end{aligned}$$

e por conseguinte

$$\left| \int_X f d\mu_T - \int_X {}^x f d\mu_T \right| \rightarrow 0$$

quando $T \rightarrow \infty$. As medidas (μ_T) são assintoticamente invariantes também.

As medidas de probabilidade borelianos e regulares sobre um espaço compacto correspondem aos funcionais ϕ sobre $C(X)$ lineares, positivos, e enviando 1 para 1 (teorema de Riesz; no caso metrizável veja, por exemplo, [32], teorema H.2.1). O conjunto de tais medidas forma, deste modo, um subconjunto fechado da bola unitária do espaço dual, compacto na topologia fraca*. A sequência das medidas (μ_T) , $T \in \mathbb{N}$, admite um ponto de acumulação, μ . A invariância assintótica das medidas (μ_T) implica que μ é *invariante* por ação de \mathbb{R} : para cada $f \in C(X)$,

$$\int f(x) d\mu(x) = \int {}^x f(x) d\mu(x),$$

qual quer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Os conjuntos $[-T, T]$ neste contexto se chamam *conjuntos de Følner* para o grupo localmente compacto \mathbb{R} . Eles testemunham que o grupo \mathbb{R} é mediável. De fato, nós não precisamos trabalhar com uma ação sobre um espaço compacto, tudo pode ser decidido dentro do grupo próprio. Basta produzir uma sequência de medidas de probabilidades *assintoticamente invariantes* no sentido da distância em variação total.

Exercício 1.6. Use o mesmo argumento com conjuntos de Følner propriamente escolhidos para mostrar que \mathbb{Z} com a topologia discreta é mediável. Modifique-o para mostrar que cada grupo abeliano com qualquer topologia (incluindo discreta) é mediável. Por exemplo, \mathbb{R} é mediável mesmo com a topologia discreta.

1.3. DISTÂNCIA EM VARIAÇÃO TOTAL

Definição 1.7. A *distância em variação total* entre duas medidas de probabilidade, μ e ν , sobre um espaço mensurável (X, \mathcal{A}) (onde \mathcal{A} é uma sigma-álgebra de subconjuntos de X) é dada por

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

A distância em variação total é uma norma sobre o espaço maior de todas as medidas assinadas de Radon, o que explica a notação. Em particular, deixamos como exercício a verificação dos axiomas de uma métrica.

Lema 1.8.

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int f(x) d\mu(x) - \int f(x) d\nu(x) \right|. \quad (1.1)$$

Aqui, $\|\cdot\|_\infty$ é a norma uniforme (norma supremo).

◁ Desigualdade \leq : se $\mu(A) - \nu(A) = C$, então para $f = \chi_A - \chi_{A^c}$ temos $\int f(x) d\mu(x) - \int f(x) d\nu(x) = (\mu(A) - \nu(A)) + (-(1 - \mu(A)) + (1 - \nu(A))) = 2C$.

Desigualdade \geq : Basta verificar para as funções simples. Suponha que a restrição de f sobre cada elemento A de uma partição mensurável finita γ de X é igual a $f_A \in [-1, 1]$. Primeiramente suponha que $f \geq 0$. Denota B a união de todos os pedaços $A \in \gamma$ onde $\mu(A) > \nu(A)$. Então, temos

$$\begin{aligned} \int f(x) d\mu(x) - \int f(x) d\nu(x) &= \sum_{A \in \gamma} f_A (\mu(A) - \nu(A)) \\ &\leq \mu(B) - \nu(B) \\ &\leq \|\mu - \nu\|_{TV}. \end{aligned}$$

Para f qualquer, escreve $f = f_+ - f_-$, onde $f_\pm \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) d\mu(x) - \int f(x) d\nu(x) \right| &\leq \left| \int f_+(x) d\mu(x) - \int f_+(x) d\nu(x) \right| + \\ &\quad \left| \int f_-(x) d\mu(x) - \int f_-(x) d\nu(x) \right| \\ &\leq 2 \|\mu - \nu\|_{TV}. \end{aligned}$$

▷

Podemos generalizar o nosso argumento. Estamos deixando a prova da afirmação seguinte como exercício.

Proposição 1.9. *Suponha que um grupo topológico G admite uma sequência (ou bem uma sequência generalizada), μ_α , de medidas de probabilidade borelianas e regulares, tais que para cada $g \in G$,*

$$\|g * \mu_\alpha - \mu_\alpha\|_{TV} \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow \infty.$$

Então, G admite uma média invariante à esquerda sobre as funções borelianas e limitadas. Em particular, G é mediável.

Nota que para grupos poloneses, que nos principalmente interessam, cada medida de probabilidade boreliana é automaticamente regular ([32], p. 276, E.2.10).

1.4. FUNÇÕES UNIFORMEMENTE CONTÍNUAS À DIREITA

Uma função $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ sobre um grupo topológico G se chama *uniformemente contínua à direita* se para cada $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V da identidade de G tal que

$$\forall g \in G, \forall v \in V, |f(g) - f(vg)| < \varepsilon.$$

Ou, de modo equivalente e mais convencional, trocando as variáveis $v = gh^{-1}$,

$$\forall g, h \in G, gh^{-1} \in V \Rightarrow |f(g) - f(h)| < \varepsilon.$$

Exercício 1.10. Mostrar que uma função limitada $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua à direita se e somente se a aplicação de órbita, orb_f ,

$$G \ni g \mapsto {}^g f \in \ell^\infty(G)$$

é contínua.

Exemplo 1.11. Suponha que um grupo topológico G aja sobre um espaço compacto X . Sejam $\xi \in X$ e $f \in C(X)$. Então, a função $\tilde{f} = f \circ \text{orb}_\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\tilde{f}(g) = f(g \cdot \xi)$, é uniformemente contínua à direita (e limitada, claro).

◁ Seja $\varepsilon > 0$. Usando a compacidade de X , escolha uma cobertura finita, γ , de X com conjuntos abertos, tendo a propriedade: se $x, y \in V \in \gamma$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (Essencialmente, isso é a prova do que f é uniformemente contínua). Para cada $x \in X$, escolha uma vizinhança W_x de e em G e uma vizinhança U_x de x em X tais que $W_x \cdot U_x \subseteq V$ para cada $V \in \gamma$ que contém x . (Isso é possível porque a ação de G é contínua). Escolha um conjunto finito x_1, \dots, x_n tal que $\cup_{i=1}^n U_i = X$, e define $W = \cap_{i=1}^n W_i$. Agora sejam $v \in V$ e $g \in G$. Existe i tal que $g \cdot \xi \in U_{x_i}$, então para cada $V \in \gamma$ que contém $g \cdot \xi$ e para cada $v \in W$ temos $vg \cdot \xi \in W \cdot U_{x_i} \subseteq V$, logo:

$$|\tilde{f}(g) - \tilde{f}(vg)| = |f(g \cdot \xi) - f(vg \cdot \xi)| < \varepsilon \quad \triangleright.$$

O que é importante, é que cada função limitada e uniformemente contínua à direita sobre um grupo topológico G é obtida por esta construção a partir de uma ação apropriada de G sobre um espaço compacto. O conjunto $\text{RUCB}(G)$ de todas as funções limitadas e uniformemente contínuas à direita sobre G forma uma C^* álgebra comutativa, uma sub-álgebra de $\ell^\infty(G)$. O espaço de Gelfand de ideais maximais de $\text{RUCB}(G)$, que consiste de todos os funcionais lineares multiplicativos ($\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$) e tais que $\phi(1) = 1$, é um espaço compacto, denotado $\mathcal{S}(G)$ e chamado o *âmbito maior* (*greatest ambit*) de G . Isso é um sub-espaço compacto da bola unitária do espaço de Banach dual $\text{RUCB}(G)^*$ munido da topologia fraca. Um argumento simples verifica que a ação natural de G sobre $\mathcal{S}(G)$ é contínua.

Cada elemento $g \in G$ define um funcional multiplicativo de avaliação, $\hat{g}(f) = f(g)$, e a aplicação

$$G \ni g \mapsto \hat{g} \in \mathcal{S}(G)$$

é uma imersão homeomorfa e equivariante com relação à ação à esquerda de G sobre ele-mesmo: $\widehat{gh} = g\hat{h}$.

Agora cada função $f \in \text{RUCB}(G)$ estende-se unicamente até uma função contínua \bar{f} sobre $\mathcal{S}(G)$, e temos a identificação canônica entre dois C^* -álgebras comutativas $\text{RUCB}(G) \cong C(\mathcal{S}(G))$. Relativo ao elemento $\xi = \hat{e}$, temos por conseguinte

$$f = \bar{f} \circ \text{orb}_{\hat{e}}.$$

Todas essas afirmações são bastante simples para ser deixadas como exercícios, com ajuda de alguns básicos da teoria de C^* -álgebras comutativas (veja por exemplo as notas de aula de Ian Putnam [34]). Veja também [31], sect. 2.1, ou, para mais detalhes, [7], esp. sect. IV.4. O livro [26], disponível gratuitamente, contém bastante informações sobre o âmbito maior.

Exemplo 1.12. Se G é um grupo discreto, então cada função $G \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua à direita, e por conseguinte o âmbito maior de G é igual ao compactificado máximo de Stone-Čech, βG .

Teorema 1.13. *Para um grupo topológico G , as condições seguintes são equivalentes.*

1. G é mediável, isto é, cada ação contínua de G sobre um espaço compacto admite uma medida de probabilidade boreliana e regular, invariante pela ação de G .
2. O âmbito maior de G , $\mathcal{S}(G)$, admite uma medida de probabilidade boreliana e regular, invariante pela ação canónica de G .
3. Existe uma média invariante sobre funções limitadas e uniformemente contínuas à direita sobre G , ou seja, um funcional linear e positivo $\phi: \text{RUCB}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(1) = 1$ e para cada $f \in \text{RUCB}(G)$ e $g \in G$, temos

$$\phi({}^g f) = \phi(f),$$

onde ${}^g f(h) = f(g^{-1}h)$.

\triangleleft (1) \Rightarrow (2) é trivial, e a equivalência (2) \iff (3) é dévida ao teorema de representação de Riesz. Só resta a mostrar (2) \Rightarrow (1). Suponha que G aja sobre um espaço compacto X . Escolhemos um ponto qualquer $\xi \in X$. A aplicação

$$C(X) \ni f \mapsto f \circ \text{orb}_\xi \in \text{RUCB}(G)$$

é um homomorfismo de C^* -álgebras unitais. Ela induz uma aplicação entre os espaços correspondentes de ideais maximais,

$$\mathcal{S}(G) \rightarrow Y \subseteq X,$$

onde Y é a aderência da G -órbita de ξ em X . Verifica-se que a aplicação acima é contínua e G -equivariante (commuta com as duas ações de G). A imagem direita de uma medida G -invariante sobre o âmbito maior é uma medida de probabilidade G -invariante sobre Y , logo, sobre X também. \triangleright

Observação 1.14. Para grupos localmente compactos, em particular discretos, a propriedade de ser mediável e de admitir uma sequência (talvez generalizada) de medidas assintoticamente invariantes em relação à distância em variação total são equivalentes (por exemplo, [17], Thm. 3.6.2). Porém, para grupos mais gerais, “grupos de dimensão infinita,” isso não é mais verdadeiro. Por exemplo, o grupo unitário $U(\ell^2)$ do espaço de Hilbert de dimensão infinita, munido da topologia operadora forte, é mediável (exemplo 1.3), mas não admite uma média invariante sobre as funções uniformemente contínuas à esquerda (Ex. 3.6.3 em [31]). Isso significa que para tais “grupos de dimensão infinita” existe uma gradação — interessante, e ainda não completamente explorada — de noções diferentes de mediabilidade. Além disso, existe uma noção importante — a de grupos *extremamente mediáveis* [31] — que é nunca possuída por grupos localmente compactos.

Exercício 1.15. Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo denso de G . Suponha que exista uma média ϕ (um funcional linear, positivo, com $\phi(1) = 1$) sobre $\text{RUCB}(G)$ que é invariante pela ação de H à esquerda. Mostrar que G é mediável.

Exercício 1.16. Sejam G um grupo topológico e $H \triangleleft G$ um sub-grupo fechado normal. Suponha que os grupos topológicos H e G/H são mediáveis. Mostrar que G é mediável. (Dado uma função $f \in \text{RUCB}(G)$, aplique às translações dela uma fixa média invariante ϕ_H sobre H . Determina se as translações à esquerda ou à direita são necessárias para obter uma função uniformemente contínua sobre G/H e depois aplicar uma média invariante $\phi_{G/H}$?) Se precisar de ajuda, consulta [18], Prop. 4.1.(3).

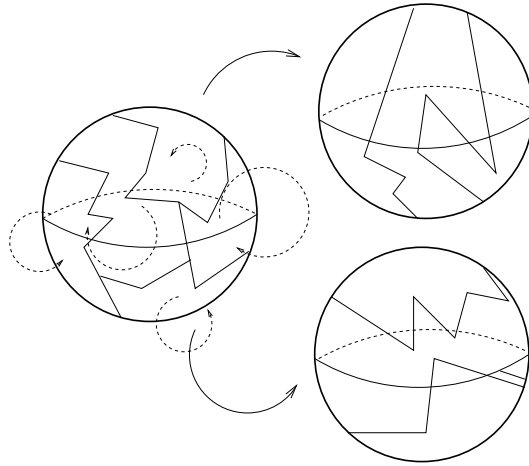


Figura 1.1: Paradoxo de Banach–Tarski

1.5. GRUPO DISCRETO LIVRE F_2

Vamos concluir a primeira aula com o exemplo de um grupo não mediável. Este exemplo foi às origens da teoria de grupos mediáveis. Ele foi isolado por von Neumann durante a análise do famoso paradoxo de Banach–Tarski (1924): a esfera unitária euclidiana pode ser partilhada em 5 pedaços, depois montados de novo usando apenas as translações e rotações para obter duas esferas idênticas do mesmo tamanho (Fig. 1.1). (Veja [41]).

Consideremos o grupo livre F_2 sobre dois geradores, a, b , com a topologia discreta. Cada elemento de F_2 pode ser escrito de único modo como uma palavra irreductível em a e b . Formemos o subconjunto:

$$G(a) = \{\text{palavras irreductíveis começando com } a\},$$

e de modo semelhante, $G(a^{-1}), G(b), G(b^{-1})$. Agora, F_2 é a união disjunta de cinco conjuntos $\{e\}, G(a), G(a^{-1}), G(b), G(b^{-1})$, e por isso a soma de funções indicadoras correspondentes é igual a 1:

$$\chi_{\{e\}} + \chi_{G(a)} + \chi_{G(b)} + \chi_{G(a^{-1})} + \chi_{G(b^{-1})} = 1.$$

Ao mesmo tempo, é fácil a ver que

$$G = a^{-1}G(a) \cup b^{-1}G(b) = aG(a^{-1}) \cup bG(b^{-1}).$$

Isso significa

$$\begin{aligned} 1 &\leq {}^a\chi_{G(a)} + {}^b\chi_{G(b)}, \\ 1 &\leq {}^{a^{-1}}\chi_{G(a^{-1})} + {}^{b^{-1}}\chi_{G(b^{-1})}. \end{aligned}$$

Suponha que existe uma média invariante, ϕ , sobre $\text{RUCB}(F_2) = \ell^\infty(F_2)$. Aplicando ϕ às identidades / desigualdades acima, chegamos a uma contradição.

Observação 1.17. Cada subgrupo topológico de um grupo localmente compacto mediável e mediável (veja, por exemplo, [17], Th. 2.3.2). Isso não é verdadeiro no contexto mais geral: por exemplo, é fácil ver que o grupo livre F_2 com a topologia discreta é isomorfo a um subgrupo topológico de $U(\ell^2)$ (exercício). É por isso que estabelecer se um dado grupo não localmente compacto é mediável ou não é as vezes bastante difícil. (É verdade que isso pode ser muito difícil mesmo no caso discreto, por exemplo, o problema famoso e sempre em aberto pergunta se o grupo (F) de Thompson é mediável [27]).

Porém, tem o resultado seguinte ([33], Thm. 12):

Teorema 1.18. *Seja G um grupo topológico separável e metrizable com uma métrica bi-invariante. Seja H um sub-grupo normal e co-compacto de G , ou seja, tal que o grupo topológico quociente G/H é compacto. Se G é mediável, então H é mediável.*

Vamos esboçar a ideia de uma prova alternativa, diferente da prova original no artigo [33]. A aplicação quociente de G para espaço quociente à direita, $K = H \backslash G = \{Hg: g \in G\}$, estende-se até uma aplicação, π , contínua, sobrejetora e equivariante (que comuta com a ação de H a esquerda) do âmbito maior $\mathcal{S}(G)$ para K . Seja μ uma medida de probabilidade invariante sob $\mathcal{S}(G)$ (que existe pois G é mediável). Segundo o teorema de desintegração de medidas de Rokhlin (veja, por exemplo, [32], H.4), μ induz sobre cada fibra $\pi^{-1}(x)$ de π uma medida de probabilidade, μ -q.c. invariante sob a ação de H . E cada fibra é isomorfa, como espaço com ação de H , a H próprio, munido da ação à esquerda. Isso mostra que H é mediável.

MEDIDA DE WIENER

2.1. MEDIDAS GAUSSIANAS UNIDIMENSIONAIS

Na seção 1.2 vimos uma prova simples e transparente do que o grupo aditivo \mathbb{R} , munido da topologia padrão, é mediável. Vamos começar a segunda aula fazendo uma coisa um pouco estranha: dando uma prova alternativa e relativamente complicada do mesmo fato, apresentando uma sequência diferente de medidas assintoticamente invariantes sobre \mathbb{R} . Estas são as medidas gaussianas cuja variância cresce para infinito.

A medida gaussiana padrão $\gamma = \gamma_1$ sobre \mathbb{R} e dada pela densidade:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Em outras palavras, para cada conjunto boreliano $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\gamma(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-t^2/2} dt.$$

Um jeito de aceitar a medida gaussiana como natural é de vê-la como o limite, no sentido de variação total, de projeções unidimensionais de medidas de Haar nas esferas euclidianas de dimensão N e de raio \sqrt{N} , quando $N \rightarrow \infty$. (O resultado é normalmente conhecido como teorema de Poincaré, mesmo se a atribuição pode ser imprecisa, veja [8]).

Um truque permite de verificar que γ é uma medida de probabilidade, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma(x) = 1$$

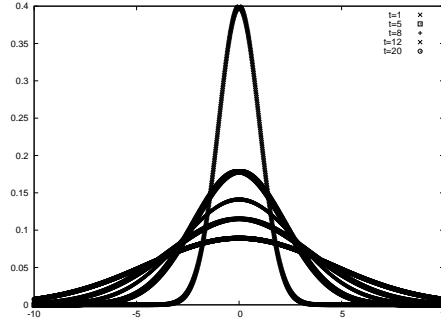


Figura 2.1: Densidades gaussianas com parâmetro $t = \sigma^2 = 1, 5, 8, 12, 20$

(ao invés da integral, calcular o quadrado dela, usando o teorema de Fubini e coordenadas polares). Agora, calculam-se facilmente a esperança e a variância da medida γ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\gamma(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\gamma(x) = 1.$$

A medida gaussiana γ_σ de variância σ^2 é a imagem direita de γ pela aplicação de dilatação, $t \mapsto \sigma t$. Para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, o valor $\gamma_\sigma(A)$ é igual a $\gamma(\sigma^{-1}A)$, e por conseguinte a densidade de γ_σ é dada por

$$p_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

(a mudança de variáveis $\tau = \sigma t$ no diferencial $d\gamma$). Finalmente, a medida gaussiana $\gamma_{\sigma,a}$ de variância σ^2 e valor médio $a \in \mathbb{R}$ é obtida como a imagem direita de γ_σ pela translação $t \mapsto t + a$, com a densidade

$$p_{\sigma,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}.$$

Como as medidas γ_σ são cada vez mais “aplainadas” e “espalhadas” na reta quando $\sigma \rightarrow \infty$ (Fig. 2.1), elas parecem um bom candidato para invariância assintótica (Fig. 2.2). Vamos mostrar agora que isso é verdadeiro. Com

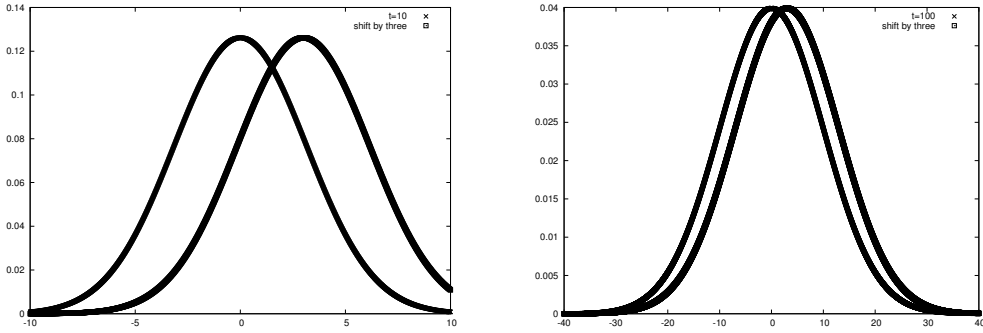


Figura 2.2: Translações por $a = 3$ de gaussianas com $\sigma^2 = 10$ (esq.) e $\sigma^2 = 100$ (dir.)

este fim, precisamos estimar a distância em variação total entre γ_σ e a sua translação, $\gamma_{\sigma,a} = a * \gamma_\sigma$.

Lema 2.1. *Sejam $\mu = p\lambda$ e $\nu = q\lambda$ duas medidas de probabilidade sobre \mathbb{R} , absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue λ , com funções de densidade p e q respectivamente. Então,*

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \frac{1}{2} \|p - q\|_1,$$

onde $\|\cdot\|_1$ é a distância L^1 .

◁ Desigualdade \leq : usando lema 1.8, temos

$$\begin{aligned} 2\|\mu - \nu\|_{TV} &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} fp \, d\lambda - \int_A fq \, d\lambda \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \int_{-\infty}^{\infty} |f| |p - q| \, d\lambda \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |p - q| \, d\lambda \\ &= \|p - q\|_1. \end{aligned}$$

Desigualdade \geq : Defina $A = \{t \in \mathbb{R} : p(t) \geq q(t)\}$. Agora,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |p - q| d\lambda &= \int_A (p - q) d\lambda + \int_{A^c} (q - p) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_A - \chi_{A^c})(p - q) d\lambda \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_A - \chi_{A^c})p d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_A - \chi_{A^c})q d\lambda \right| \\ &\leq 2 \|\mu - \nu\|_{TV}, \end{aligned}$$

pois $\|\chi_A - \chi_{A^c}\|_{\infty} = 1$. ▷

Definição 2.2. Sejam $\mu = p\lambda$ e $\nu = q\lambda$ duas medidas de probabilidade absolutamente contínuas sobre \mathbb{R} , onde p, q são duas funções L^1 não negativas. A *integral de Hellinger* é o valor

$$H(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p}\sqrt{q} d\lambda.$$

(A expressão $\sqrt{1 - H(\mu, \nu)^2}$ define uma métrica sobre o espaço de medidas absolutamente contínuas, exercício, mas não vamos precisar deste fato).

Exercício 2.3. Verifique que

$$H(\gamma_{\sigma}, \gamma_{\sigma, a}) = \exp\left(-\frac{a^2}{8\sigma^2}\right). \quad (2.1)$$

(O argumento não precisa muito mais do que saber completar o quadrado e talvez reconfirmar o fato que a medida γ_{σ} é uma medida de probabilidade, ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1.)$$

Lema 2.4. Sejam μ e ν duas medidas de probabilidade absolutamente contínuas sobre reta. Então,

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq (1 - H(\mu, \nu)^2)^{1/2}. \quad (2.2)$$

◁ Temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |p - q| d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{p} - \sqrt{q})(\sqrt{p} + \sqrt{q}) d\lambda \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}} (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 d\lambda \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 d\lambda \right]^{1/2} \\
&= \left[\left(2 - 2 \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p}\sqrt{q} d\lambda \right) \cdot \left(2 + 2 \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p}\sqrt{q} d\lambda \right) \right]^{1/2} \\
&= 2(1 - H(\mu, \nu))^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Agora aplicamos lema 2.1. ▷

Observação 2.5. Um argumento semelhante mostra também um minorante: $\|\mu - \nu\|_{TV} \geq 1 - H(\mu, \nu)$.

Lema 2.4 e exercício 2.3 juntos implicam:

Teorema 2.6. *A família (γ_σ) de medidas gaussianas centradas na reta é assintoticamente invariante no sentido de variação total sob translações quando $\sigma \rightarrow \infty$.*

2.2. MEDIDAS GAUSSIANAS MULTIDIMENSIONAIS

As medidas gaussianas sobre o espaço euclidiano \mathbb{R}^n são produtos de medidas unidimensionais correspondentes, então as densidades são os produtos também. Nós apenas vamos nos interessar em poderes das medidas gaussianas unidimensionais, e não em caso geral dado por uma matriz de covariância. A medida gaussiana padrão,

$$\gamma^n = \gamma_1^{\otimes n},$$

tem a densidade

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_n^2/2} \times = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|x\|_2^2/2}.$$

Aqui, $\|x\|_2$ é a norma euclidiana. Como a densidade é manifestamente invariante pelas isometrias lineares (ou seja, transformações ortogonais) do espaço \mathbb{R}^n , a medida γ^n é invariante sob a ação do grupo ortogonal $O(n)$.

Proposição 2.7. *A medida gaussiana padrão γ^n é a única medida boreliana μ sobre \mathbb{R}^n com a propriedade que para cada funcional linear ϕ sobre \mathbb{R}^n a imagem direita de μ por ϕ é a medida gaussiana centrada sobre \mathbb{R} de variância $\|\phi\|^2$.*

◁ Um funcional qualquer $\phi \neq 0$ pode ser escrito como $\phi(x) = \|\phi\| \langle x, y \rangle$, onde $\|y\| = 1$. Aplicando uma isometria $u \in O(n)$ tal que $u(y) = e_1$, concluímos que a medida $\phi_*(\gamma^n)$ é a imagem direita de γ^n pela composição de u , a projeção sobre a primeira coordenada, e a dilatação por $\|\phi\|$. Obtemos, desse modo, $\gamma_{\|\phi\|}$.

A unicidade segue do teorema de Cramér-Wold: cada medida de probabilidade sobre \mathbb{R}^n é unicamente definida por suas projeções unidimensionais. (Veja, por exemplo, [33], teor. 7.2.4, p. 230). ▷

Observação 2.8. Em particular, a medida gaussiana não depende da base ortonormal escolhida num espaço euclidiano. Já a norma euclidiana define a medida gaussiana unicamente.

Notemos que se ϕ é o funcional nulo, a imagem direita de γ^n por ϕ é a medida de Dirac, cujo suporte é o conjunto unitário $\{0\}$. É o caso degenerado de medida gaussiana, onde $\sigma = 0$.

A medida gaussiana γ_σ^n de parâmetro σ^2 é definida de mesmo jeito, pela densidade produto

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\|x\|_2^2/2\sigma^2}.$$

Finalmente, a translação da medida γ_σ por um vetor $a \in \mathbb{R}^n$, denotada $\gamma_{\sigma,a}^n$, tem densidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_1-a_1)^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_2-a_2)^2/2} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_n-a_n)^2/2} \times \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\|x-a\|_2^2/2}. \end{aligned}$$

Agora vamos verificar a invariância assintótica das medidas γ_σ^n , $\sigma \rightarrow \infty$ por translações.

Lema 2.9. *Sejam X e Y dois espaços mensuráveis, μ_1, μ_2 duas medidas de probabilidade sobre X , e ν uma medida de probabilidade sobre Y . Denotemos $\mu_i \otimes \nu$ o produto de medidas μ_i , $i = 1, 2$ e ν . Então,*

$$\|\mu_1 \otimes \nu - \mu_2 \otimes \nu\|_{TV} = \|\mu_1 - \mu_2\|_{TV}.$$

◁ Desigualdade \leq : seja $\varepsilon > 0$, então existe $A \subseteq X \times Y$ tal que

$$|\mu_1 \otimes \nu(A) - \mu_2 \otimes \nu(A)| > \|\mu_1 \otimes \nu - \mu_2 \otimes \nu\|_{TV} - \varepsilon.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\mu_1 \otimes \nu(A) \geq \mu_2 \otimes \nu(A)$. Para cada $y \in Y$, denotemos

$$A_y = \{a \in X : (a, y) \in A\}.$$

Segundo teorema de Fubini,

$$\mu_1 \otimes \nu(A) - \mu_2 \otimes \nu(A) = \int_Y (\mu_1(A_y) - \mu_2(A_y)) d\nu(y).$$

Existe y tal que $\mu_1(A_y) - \mu_2(A_y) > \|\mu_1 \otimes \nu - \mu_2 \otimes \nu\|_{TV} - \varepsilon$.

Desigualdade \geq : basta estimar a diferença entre os valores das medidas produto sobre os conjuntos cilíndricos $A \times Y$. ▷

Exercício 2.10. Seja π uma projeção ortogonal de \mathbb{R}^n sobre um sub-espaço V . Mostra que a medida γ_σ sobre \mathbb{R}^n é igual ao produto de medidas gaussianas de variância σ sobre os espaços euclidianos $\text{im } \pi$ e $\ker \pi$. (Dica: aplique uma transformação ortogonal que manda V para $\mathbb{R}^{\dim V}$ e use observação 2.8).

Corolário 2.11. *A família de medidas γ_σ^n sobre \mathbb{R}^n é assintoticamente invariante em variação total, em relação às translações, quando $\sigma \rightarrow \infty$.*

◁ Seja $a \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Denote π a projeção ortogonal de \mathbb{R}^n sobre o espaço unidimensional $\text{lin } a$ gerado por a . Segundo exercício 2.10, γ_σ^n é igual ao produto de duas medidas gaussianas, γ_σ sobre $\text{lin } a \cong \mathbb{R}$ e γ_σ^{n-1} sobre $\text{lin } a^\perp$. Concluimos com ajuda do lema 2.9 e teorema 2.6. ▷

Em particular, concluimos que o grupo aditivo \mathbb{R}^n com a topologia usual é mediável, embora isso possa ser concluído de um argumento muito mais simples, tirando uma conclusão mais forte (\mathbb{R}^n é um grupo abeliano), como no exercício 1.6.

2.3. CASO ℓ^2 , TENTATIVA FRACASSADA

Seria atraente generalizar a medida gaussiana no caso de um espaço euclidiano de dimensão infinita, ou seja, o espaço ℓ^2 . Nossos requerimentos seriam os mesmos que na proposição 2.7. Queremos uma medida boreliana de probabilidade, μ , sobre ℓ^2 , tendo a propriedade: para cada funcional linear e limitado, ϕ , sobre ℓ^2 a imagem direita de μ por ϕ é a medida gaussiana unidimensional $\gamma_{\|\phi\|}$, centrada, de variância $\|\phi\|^2$.

Suponha que uma tal medida μ exista. Estimemos a medida da bola, $B_R(0) \subseteq \ell^2$, de raio R com centro em zero. Calculemos o valor da medida gaussiana padrão do disco de raio R no espaço \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2/2} \rho d\rho \\ &= 1 - e^{-R^2/2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A projeção ortogonal de μ sobre \mathbb{R}^{2n} , o espaço gerado pelos primeiros $2n$ elementos da base ortonormal padrão de ℓ^2 , é igual à γ^{2n} , de acordo com a proposição 2.7. A medida γ^{2n} é igual a produto de n cópias de medidas γ^2 nos espaços gerados por pares consecutivos de vetores básicos e_{2i-1} e e_{2i} , $i = 1, 2, \dots, n$. A projeção ortogonal da bola B_R sobre cada um desses espaços de dimensão 2 é o disco de raio R . Concluimos:

$$\begin{aligned} \mu(B_R) &\leq \gamma^{2n}(D_R^n) \\ &= (1 - e^{-R^2/2})^n \\ &\rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ou seja, $\mu(B_R) = 0$. Como $\ell^2 = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, e nós desejamos uma medida sigma-aditiva, segue-se que $\mu(\ell^2) = 0$. Uma medida de probabilidade com propriedades fantasiadas simplesmente não existe.

Vamos olhar para o mesmo resultado de uma perspectiva ligeiramente diferente. Digamos que um conjunto $A \subseteq \ell^2$ é *cilíndrico* se existem uma projeção ortogonal (equivalente: um operador linear limitado) $T: \ell^2 \rightarrow E$, onde $\dim E < \infty$, e um conjunto boreliano $B \subseteq E$ tais que $A = T^{-1}(B)$.

Exercício 2.12. Mostrar que subconjuntos cilíndricos de ℓ^2 formam uma álgebra de conjuntos. (Ou seja: ℓ^2 é cilíndrico; o complementar de um conjunto cilíndrico é cilíndrico; e a união de uma família finita de conjuntos cilíndricos é um conjunto cilíndrico).

Exercício 2.13. Mostrar que, dado um conjunto cilíndrico A , a fórmula

$$\mu(A) = \mu(\pi_E^{-1}(B)) = \gamma^{\dim E}(B),$$

onde π_E é uma projeção ortogonal sobre um subespaço E de ℓ^2 não depende da escolha de E e define uma medida *finitamente aditiva* sobre a álgebra de conjuntos cilíndricos.

Exercício 2.14. Mostrar que a sigma-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos é a sigma-álgebra boreliana de ℓ^2 , ou seja, a sigma-álgebra gerada pelos todos os conjuntos abertos em ℓ^2 .

Se a medida μ assim definida sobre os conjuntos cilíndricos fosse *sigma-aditiva*, o teorema de Carathéodory (veja, por exemplo, [32], teorema E.1.15, página 360) implicaria que μ se estende até uma medida de probabilidade sobre a sigma-álgebra boreliana de ℓ^2 . Porém, nós vimos que isso não é o caso.

Exercício 2.15. Dê uma prova direta de que a medida μ definida no exercício 2.13 sobre a álgebra de conjuntos cilíndricos não é sigma-aditiva. (Dica: modificar o nosso argumento com as bolas).

2.4. MEDIDA γ^∞

Mesmo assim, podemos fazer algo mais evidente e menos satisfatório: formar o produto de uma família infinita de cópias da medida gaussiana padrão $\gamma = \gamma^1$. É uma medida de probabilidade boreliana sobre o espaço $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ munido da topologia de produto. A topologia de produto é a topologia mais fraca tal que todas as projeções sobre coordenadas,

$$\pi_n : \mathbb{R}^\mathbb{N} \ni x = (x_i)_{i=1}^\infty \mapsto x_n \in \mathbb{R},$$

são contínuas. Munido dessa topologia, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um espaço linear localmente convexo e completamente metrizável (espaço de Fréchet).

Tudo como no caso de ℓ^2 , digamos que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um *conjunto cilíndrico* se existem uma aplicação linear e contínua $f: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow E$, $\dim E < \infty$, e um conjunto boreliano $B \subseteq E$ tais que $A = f^{-1}(B)$. O espaço dual de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pode ser identificado com \mathbb{R}^{∞} , o espaço de todas as sequências $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com um número finito de coordenadas não nulas. Por isso, na definição de um conjunto cilíndrico podemos supor que $f = \pi_{\{1, \dots, n\}}$, a projeção canônica sobre \mathbb{R}^n , $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Em outras palavras, conjunto cilíndrico é um conjunto definido por um número finito de coordenadas. Agora definemos $\mu(\pi_{\{1, \dots, n\}}^{-1}(B)) = \gamma^n(B)$. A definição não depende da escolha de n .

Esta vez a medida μ é verificada de ser sigma-aditiva sobre a álgebra de conjuntos cilíndricos. Pelo teorema de Carathéodory, ela estende-se sobre a sigma-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos, igual à sigma-álgebra boreliana. Vamos denotar a medida de produto γ^{∞} , a medida gaussiana padrão sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

A prova de sigma-aditividade da medida μ sobre os conjuntos cilíndricos é bastante técnica, mas tem no coração — explicitamente ou implicitamente — a propriedade seguinte (isolada e estudada por Prokhorov). Dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K_{\varepsilon} \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$ tal que, qual quer que seja conjunto cilíndrico $C \supseteq K_{\varepsilon}$, temos $\mu(C) > 1 - \varepsilon$. É exatamente esta propriedade que previne o “colapso” da medida, como na nossa tentativa com ℓ^2 . Por exemplo, dada uma sequência C_i de conjuntos cilíndricos dois a dois disjuntos que cobrem o espaço, cada um deles pode ser aproximado por um conjunto cilíndrico aberto $U_i \supseteq C_i$ (regularidade da medida γ_n), e agora K_{ε} é coberto por um número finito de conjuntos U_i . Logo, por aditividade finita (!) de μ , $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) > 1 - \varepsilon$, para cada $\varepsilon > 0$.

Como construir os conjuntos $K_{\varepsilon} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a propriedade acima?

Exercício 2.16. Seja (x_n) uma sequência de números, $0 \leq x_n < 1$. Então o produto infinito $\prod(1 - x_n)$ converge para um número não nulo se e somente se a série $\sum x_n$ converge.

(Mostra recursivamente que $(1 - \sum x_n) \leq \prod(1 - x_n) \leq \exp(\sum x_n)$).

Agora seja (R_n) uma sequência de números positivos que converge para infinito pelo menos tão rápido como $n^{\Theta(1)}$. Para cada n , definamos D_{R_n} o disco fechado do raio R_n no espaço de dimensão 2 que corresponde às coordenadas $2n-1, 2n$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

A série $\sum e^{-R_n^2/2}$ é somável, porque a integral $\int_0^\infty e^{-x^{1/k}} dx$ é, qual quer que seja $k \in \mathbb{N}$: a mudança de variáveis $x = y^k$ transforma a integral em $k \int_0^\infty e^{-y} y^{k-1} dy$, que é finita (como mostra, por exemplo, integração por partes repetida). Segundo exercício 2.16, o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-R_n^2/2})$$

converge para um número estritamente positivo. Ademais, o mesmo argumento implica que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-cR_n^2/2}) \rightarrow 1$$

quando $c \rightarrow +\infty$. Escolhemos $c > 0$ tão grande que o conjunto compacto

$$K_\varepsilon = \prod_{n=1}^{\infty} D_{cR_n}$$

tem medida gaussiana $> 1 - \varepsilon$.

Seja C um conjunto cilíndrico que contém K_ε . Existem k par e $C_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ tais que $C = \pi_{\{1, \dots, k\}}^{-1}(C_1)$. Logo, $C_1 \supseteq \prod_{n=1}^k D_{cR_n}$, e temos

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \gamma^k(C_1) \\ &\geq \gamma^k \left(\prod_{n=1}^{k/2} D_{cR_n} \right) \\ &= \prod_{n=1}^{k/2} (1 - e^{-cR_n^2/2}) \\ &> \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-cR_n^2/2}) \\ &> 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Vamos guardar os conjuntos K_ε assim construídos para uso futuro.

Agora tentaremos explorar os laços entre a medida γ^∞ e o espaço ℓ^2 . Primeiramente, nota-se que ℓ^2 se imerge em $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ de modo natural:

$$i: \ell^2 \ni (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}.$$

A imersão é obviamente contínua, já porque as restrições das projeções π_n sobre ℓ^2 são contínuas. Ao mesmo tempo, a topologia de produto é bem mais fraca de que a topologia de norma, de fato, mais fraca ainda de que a topologia fraca de ℓ^2 próprio. A imagem de ℓ^2 é denso em $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Exercício 2.17. Mostrar que a imagem de ℓ^2 é um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, e $\gamma^\infty(\ell^2) = 0$.

É claro que as mesmas construções e argumentos aplicam-se às medidas gaussianas γ_σ^∞ de parâmetro σ^2 (de variância σ).

Exercício 2.18. Usando a regularidade de medidas borelianas nos espaços métricos, mostra o seguinte. Sejam μ, ν duas medidas borelianas de probabilidade sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, seja $A \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ um conjunto boreliano qualquer, e $\varepsilon > 0$. Existem um conjunto cilíndrico compacto K e um conjunto cilíndrico aberto U que aproximam A simultaneamente para todas as duas medidas: $K \subseteq A \subseteq U$, $\mu(U) - \mu(K) < \varepsilon$, $\nu(U) - \nu(K) < \varepsilon$.

A afirmação seguinte pertence à vizinhança do *teorema de Cameron–Martin*.

Proposição 2.19. *As medidas (γ_σ^∞) são assintoticamente invariantes em variação total em relação às translações por elementos $a \in \ell^2$, quando $\sigma \rightarrow \infty$.*

◁ Seja $a \in \ell^2$. Segundo exercício 2.18, para estimar o valor $\|\gamma_\sigma^\infty - \gamma_{\sigma,a}^\infty\|_{TV}$, basta estimar $\sup_C |\gamma_\sigma^\infty(C) - \gamma_\sigma^\infty(a + C)|$ para todos os conjuntos cilíndricos, C . Seja $C = \pi_{[n]}^{-1}(C')$, onde $\pi_{[n]} = \pi_{\{1,2,\dots,n\}}$ é a projeção de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ sobre as n primeiras coordenadas. Denota $\pi_{[n]}(a) = a_n$. Então $a + C = a_n + C$. A

medida γ_σ^∞ é o produto de medida γ_σ^n sobre \mathbb{R}^n e a medida gaussiana sobre $\mathbb{R}^{\{n+1, n+2, \dots\}}$, e lema 2.4, exercício 2.3, e lema 2.9 implicam que

$$\begin{aligned} |\gamma_\sigma^\infty(C) - \gamma_\sigma^\infty(a + C)| &\leq \|\gamma_\sigma^\infty - \gamma_{\sigma, a_n}^\infty\|_{TV} \\ &\leq \left(1 - \exp\left(-\frac{\|a_n\|^2}{8\sigma^2}\right)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(1 - \exp\left(-\frac{\|a\|^2}{8\sigma^2}\right)\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned} \|\gamma_\sigma^\infty - \gamma_{\sigma, a}^\infty\|_{TV} &\leq \left(1 - \exp\left(-\frac{\|a\|^2}{8\sigma^2}\right)\right)^{1/2} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quando } \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

▷

Observação 2.20. A afirmação é incorreta para *qualquer* translação por um elemento $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \ell^2$: neste caso, as medidas γ_σ^∞ e $a * \gamma_\sigma^\infty$ são mutuamente singulares para todos os valores de $\sigma > 0$, ou seja, $\|\gamma_\sigma^\infty - a * \gamma_\sigma^\infty\|_{TV} = 1$. O cálculo pode ser feito usando a cota inferior da observação 2.5 junto com exercício 2.3.

Teorema 2.21. *Seja $a \in \ell^2$. Então para γ^∞ -quase todos $x \in \mathbb{R}^\infty$,*

$$\langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i < \infty.$$

A aplicação

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni x \mapsto \langle a, x \rangle \in \mathbb{R}$$

é mensurável e pertence ao espaço $L^2(\mathbb{R}^\infty, \gamma^\infty)$, e a sua norma L_2 é igual a $\|a\|_2$.

◁ A soma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge no espaço $L^2(\mathbb{R}^{\infty}, \gamma^{\infty})$, porque $\int x_i x_j d\gamma^{\infty} = 0$ se $i \neq j$, $\int x_i^2 d\gamma^{\infty} = 1$, e por conseguinte

$$\begin{aligned} \int (a_k x_k + \dots + a_{k+m} x_{k+m})^2 d\gamma^{\infty} &= \int (a_k^2 x_k^2 + \dots + a_{k+m}^2 x_{k+m}^2) d\gamma^{\infty} \\ &= a_k^2 + \dots + a_{k+m}^2 \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Em particular, segue-se que

$$\left\| x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_2 = \|a\|_2.$$

A esperança condicional da variável aleatória $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ em relação à sigma-álgebra gerada pelos primeiros n projeções coordenadas – ou, seja, a integral em relação à medida gaussiana sobre o espaço $\mathbb{R}^{\{n+1, n+2, \dots\}}$ para x_1, x_2, \dots, x_n fixos – é obviamente igual à $\sum_{i=1}^n a_i x_i$. Agora é fácil verificar que a sequência $(\sum_{i=1}^n a_i x_i)$ forma um martingale uniformemente integrável que satisfaz as hipóteses do primeiro teorema de Doob sobre a convergência de martingales ([10], p. 195; [3], Thm. A.3.5; as ideias do teorema de Doob num contexto mais simples de sigma-álgebras finitas estão explicadas em [32], H.3.1). O teorema de Doob implica a convergência de somas parciais para $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ em quase toda parte. ▷

Observação 2.22. Deste modo, cada elemento $a \in \ell^2$ define um funcional mensurável, $\langle a, - \rangle$, sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definido para γ^{∞} -quase todo ponto x . Este funcional é linear para quase todos pares x, y .

Observação 2.23. O domínio de todos x onde $\langle a, - \rangle$ converge forma um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (exercício), logo mensurável em relação à medida γ^{∞} e, como nós vimos, de medida plena. Além disso, este conjunto é um subespaço linear. Por conseguinte, o funcional $\langle a, - \rangle$ converge sobre um subespaço linear de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de γ^{∞} -medida 1. Ele pode ser estendido até uma aplicação linear (e sempre γ^{∞} -mensurável) sobre o espaço inteiro, \mathbb{R}^{∞} , usando o complemento algébrico deste subespaço linear.

Exercício 2.24. Dada uma sequência de subconjuntos (A_n) de um conjunto qualquer, denotemos

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Em outras palavras, $\limsup_n A_n$ consiste de todos os pontos que pertencem a A_n para um número infinito de n , e $\liminf_n A_n$ consiste de todos os pontos que pertencem a todos A_n a partir de um certo n . Mostra que

$$\limsup_n A_n = \left(\liminf_n A_n^c \right)^c.$$

Exercício 2.25. Sejam A_n subconjuntos borelianos de um espaço métrico X , e seja μ uma medida de probabilidade boreliana sobre X . Mostrar que

$$\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n), \quad \mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

Exercício 2.26. Seja $f_n: X \rightarrow Y$ uma sequência de aplicações (não necessariamente mensuráveis) entre dois espaços métricos, que converge pontualmente para uma aplicação $f: X \rightarrow Y$. Seja $U \subseteq Y$ um subconjunto aberto qualquer. Mostra que

$$f^{-1}(U) \subseteq \liminf_n f_n^{-1}(U).$$

Estabeleça um resultado correspondente para conjuntos fechados $F \subseteq Y$.

Exercício 2.27. Agora sejam $f_n, f: X \rightarrow Y$ aplicações borelianas entre dois espaços métricos. Seja μ uma medida de probabilidade boreliana sobre X . Suponha que $f_n \rightarrow f$ em μ -quase toda parte. Seja $A \subseteq Y$ um conjunto mensurável e tal que a fronteira topológica de A é um conjunto nulo:

$$\mu(\bar{A} \setminus \text{Int } A) = 0.$$

Mostra que

$$\mu(f^{-1}(A)) = \lim_n \mu(f_n^{-1}(A)).$$

(Usar a regularidade de medidas borelianas em espaços métricos). Em outras palavras, as imagens direitas, $f_{n,*}\mu$, da medida μ por funções f_n convergem *fracamente* para a imagem direita, $f_*\mu$, de μ por f .

Teorema 2.28. *A medida gaussiana γ^∞ é a única medida de probabilidade boreliana μ sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ tal que a imagem direita de μ sob cada funcional mensurável $\langle a, - \rangle$, $a \in \ell^2$, é a medida gaussiana unidimensional $\gamma_{\|a\|}^1$.*

◁ A suficiência segue-se do fato que w é a única medida tal que a sua imagem direita sob cada projeção π_n sobre a coordenada n -ésima é γ^1 , é a definição da medida de produto. Para mostrar necessidade, seja $a \in \ell^2$, onde $a = (a_n)$. Denote $s_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ a soma parcial de a . Seja π_n a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ sobre \mathbb{R} dada por $\pi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. A funcional $\langle s_n, - \rangle$ sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ é definido em toda parte, e é igual à composição de $x \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com π_n . Por conseguinte, a imagem direita de γ^∞ sob $\langle s_n, - \rangle$ é $\gamma_{\|s_n\|}^1$. Os funcionais $\langle s_n, - \rangle$ convergem para $\langle a, - \rangle$ em quase toda parte (teorema 2.21), e segundo exercício 2.27, as medidas $\gamma_{\|s_n\|}^1$ convergem fracamente para a imagem da medida γ^∞ por $\langle a, - \rangle$. Ao mesmo tempo, verifica-se diretamente que estas medidas convergem fracamente (de fato, em variação total) para a medida $\gamma_{\|a\|}^1$. ▷

Cada operador ortogonal, $u \in O(\ell^2)$, é representado por uma matriz semi-infinita na base ortonormal padrão, cujas linhas $u(i, -)$, $i \geq 1$, formam uma base ortonormal. Dado uma linha $u(i, -)$, o valor de $\langle u(i, -), x \rangle$ é definido para quase todos x . Por conseguinte, podemos definir o produto ux , um elemento de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ cujos componentes são de forma $(ux)_i = \langle u(i, -), x \rangle$, $i = 1, 2, 3, \dots$. O produto ux é definido para quase todos x . Obtemos desse modo um operador, u^\sim , sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ estendendo u . Agora pode-se verificar que este operador é linear em quase toda parte, e que $(uv)^\sim = u^\sim v^\sim$. Também temos $e^\sim = Id$.

Corolário 2.29. *Seja $u \in O(\ell^2)$. Então para γ^∞ -quase todo $x \in \mathbb{R}^\infty$, o elemento de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ dado por*

$$(u^\sim x)_i = \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} x_j$$

é bem definido. A aplicação

$$\mathbb{R}^\mathbb{N} \ni x \mapsto ux \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$$

é mensurável.

Observação 2.30. Pode-se mostrar também que o domínio de definição natural de ux , que consiste de todos x onde as séries $\langle u(i, -), x \rangle$, $i \in \mathbb{N}$, convergem de verdade, é um subconjunto boreliano e um subespaço linear de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de γ^{∞} -medida 1. Claro que no complemento linear deste domínio, que é um conjunto nulo, o operador pode ser redefinido de forma arbitrária.

Exercício 2.31. Sejam $u \in O(\ell^2)$ e $a \in \ell^2$. Verifique que para γ^{∞} -quase todos $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\langle a, u \tilde{x} \rangle = \langle u^* a, x \rangle.$$

Corolário 2.32. Para cada $u \in \ell^2$, a aplicação mensurável $u \tilde{\cdot} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ conserva a medida γ^{∞} .

◁ Seja $a \in \ell^2$ qualquer. A imagem direita da medida $u \tilde{\cdot}(\gamma^{\infty})$ sob o funcional $\langle a, - \rangle$ é igual à imagem direita de γ^{∞} sob a composição de $u \tilde{\cdot}$ com $\langle a, - \rangle$, ou seja, o funcional

$$\langle a, u \tilde{-} \rangle = \langle u^* a, - \rangle$$

(exercício 2.31). Segundo teorema 2.28, tal imagem 'é igual a $\gamma_{\|u^* a\|}^1 = \gamma_{\|a\|}^1$. Agora usamos teorema 2.28 de novo, para concluir. ▷

Deste modo, obtemos uma ação do grupo $O(\ell^2)$ pelos isomorfismos conservando a medida sobre o espaço gaussiano $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\infty})$, ou seja, um homomorfismo $O(\ell^2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\infty})$.

Exercício 2.33. Eis um exercício desafiador (não vai ser usado neste minicurso). Mostrar que as três topologias seguintes são iguais sobre o grupo $O(\ell^2)$:

1. A topologia forte (como grupo de operadores sobre ℓ^2),
2. A topologia fraca induzida de $\text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\infty})$,
3. A topologia de convergência em medida se cada operador u é visto como uma função mensurável do espaço com medida $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^{\infty})$ com valores no espaço de Fréchet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Observação 2.34. Cada extensão u^\sim de um operador ortogonal tem o seu próprio domínio de definição. A pergunta natural será: existe um domínio comum de medida 1 onde todos os operadores $u^\sim, u \in O(\ell^2)$, estejam definidas simultaneamente? A resposta é negativa, e a primeira prova completa (altamente não trivial) aparece em [16, 15]. Para uma apresentação simplificada, veja [31], sect. 7.1.

Observação 2.35. Os argumentos acima se repetem para definirmos sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a medida gaussiana γ_σ^∞ de parâmetro σ^2 , possuindo as mesmas propriedades.

Observação 2.36. Segue-se de nossos resultados que cada projeção ortogonal π de posto finito de ℓ^2 define uma aplicação mensurável de \mathbb{R}^∞ sobre o espaço im π de dimensão finita, e a imagem direita de γ^∞ sob π é exatamente a medida gaussiana γ^n .

Em um sentido, a medida γ^∞ sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ “realiza” nossa medida finitamente aditiva sobre a álgebra de conjuntos cilíndricos de ℓ^2 , impossível a realizar em próprio ℓ^2 .

A situação parecida é a seguinte. Suponha que nós queiramos definir uma medida sigma-aditiva sobre os racionais, \mathbb{Q} , de modo que $\mu([a, b]) = b - a$. Obviamente isso é impossível, pois a sigma-aditividade implica que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$, exatamente como no caso de ℓ^2 . Para definir uma tal medida, temos que “engrossar” o espaço, \mathbb{Q} , substituindo um espaço mais massivo, \mathbb{R} , capaz de suportar a medida que nós queremos. No nosso caso, o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um tal engrossamento de ℓ^2 . (Esta comparação eu emprestei do artigo introdutório e muito interessante de Stroock [38]).

Ao mesmo tempo, o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não parece muito interessante. A estrutura de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como espaço localmente convexo é bastante pobre, ele raramente aparece nas aplicações. Seria mais interessante de ver a medida gaussiana suportada sobre um espaço de Banach mais comun e mais útil.

2.5. ESPAÇO DE WIENER CLÁSSICO

A ideia é de encaixar entre ℓ^2 e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um espaço de Banach (ou de Hilbert, ou localmente convexo), E , mais interessante:

$$\ell^2 \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^{\infty},$$

de modo que as imersões fossem contínuas, e a medida da imagem de E fosse plena. Deste modo, a medida gaussiana γ^{∞} vai induzir uma medida de probabilidade sobre E , chamada medida de Wiener. O primeiro exemplo desse gênero, historicamente, foi o espaço $E = C_0[0, 1]$ de funções contínuas sobre o intervalo fechado que se anulam em 0, munido da norma uniforme.

Para realizar a imersão contínua $\ell^2 \subseteq E$, vamos usar uma cópia isométrica de ℓ^2 , o espaço $L^2(0, 1)$. A imagem $i(f)$ de uma função f integrável com o quadrado é dada por

$$i(f) = \int^{\bullet} f ds, \quad i(f)(t) = \int_0^t f(s) ds. \quad (2.4)$$

A função $g = \int^{\bullet} f ds$ é absolutamente contínua. De fato, isso vale para uma classe de funções mais geral, as funções L^1 .

Exercício 2.37. Verificar que se $f \in L^1(0, 1)$, então a função $g = i(f)$ no eq. (2.4) é absolutamente contínua: qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se a soma de comprimentos de intervalos $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ é menor que δ , então

$$\sum_{i=1}^n |g(a_i) - g(b_i)| < \varepsilon.$$

(Pode ser mais fácil de mostrar uma afirmação formalmente mais forte: se $f \in L^1(0, 1)$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\mu(A) < \delta$, então $|\int_A f d\mu| < \varepsilon$. Suponha o contrário. Sem perda de generalidade, pode-se supor que $f \geq 0$. Escolha uma sequência (A_n) com $\mu(A_n) \rightarrow 0$ e $\int_{A_n} f d\mu \geq \delta_0 > 0$, note que pode supor $A_n \supseteq A_{n+1}$, e use o fato que $f\mu$ é uma medida finita e sigma-aditiva).

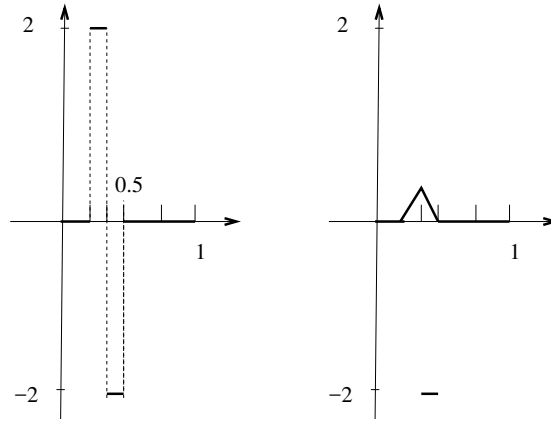


Figura 2.3: Função de Haar $h_{2,1}$ (esq.) e a imagem dela, $\beta_{2,1} d\lambda$.

Exercício 2.38. Verificar que a aplicação linear $i: L^2(0, 1) \rightarrow C_0[0, 1]$ definida por eq. (2.4) é injetora e contínua, e a sua imagem é densa em $C_0[0, 1]$.

A base ortonormal de *funções de Haar* em $L^2(0, 1)$ consiste de funções $h_{-1,0} \equiv 1$ e

$$h_{i,j} = 2^{i/2} \chi_{[j2^{-i-1}, (j+1)2^{-i-1})} - \chi_{[(j+1)2^{-i}, (j+2)2^{-i-1})},$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ (Fig. 2.3, à esq.).

As imagens $\beta_{i,j}(t) = \int_0^t h_{i,j}(s) ds$ de funções de Haar sob a aplicação \int^\bullet são contínuas, afins a pedaços (Fig. 2.3, à dir.), o máximo de $\beta_{i,j}$ é igual a $2^{-i/2-1}$, e a constante de Lipschitz (o gradiente máximo), é igual a $2^{i/2}$.

Exercício 2.39. Mostra que as somas parciais $f = \sum a_{i,j} \beta_{i,j} = \sum b_{i,j} \beta_{i,j}$ são exatamente todas as funções afins por pedaços cujos pontos de não diferenciabilidade são de forma $i2^{-n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$.

Exercício 2.40. Suponha que $f = \sum a_{i,j} \beta_{i,j} = \sum b_{i,j} \beta_{i,j}$, onde f é uma função contínua, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, e a convergência de séries é uniforme sobre $[0, 1]$. Mostrar que $a_{i,j} = b_{i,j}$. (Foco nos valores das funções em pontos racionais diádicos).

Exercício 2.41. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy de funções em $C_0[0, 1]$ em relação à norma uniforme. Suponha que cada função f_n pode ser escrita como a soma da série que converge uniformemente sobre $[0, 1]$:

$$f_n = \sum_{i,j} a_{i,j}^{(n)} \beta_{i,j}.$$

Mostra que para cada i, j a sequência de coeficientes $(a_{i,j}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy.

(Use a definição de uma sequência (x_n) de Cauchy seguinte: para cada $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todos $n \geq N$, temos $d(x_N, x_n) < \varepsilon$. Examine os coeficientes recursivamente, começando com $a_{-1,0}$, depois $a_{0,0}, a_{1,0}, a_{1,1}$, etc., em blocos.)

Teorema 2.42. Cada função $f \in C_0[0, 1]$ é igual à soma de uma série $\sum a_{i,j} \beta_{i,j}$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, que converge uniformemente sobre $[0, 1]$ e cujos coeficientes são unicamente definidos.

◁ Cada função de forma $\int^{\bullet} f$, onde $f \in L^2(0, 1)$, admite o desenvolvimento desejado, usando os coeficientes de Fourier de f em L^2 : se $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,j} h_{i,j}$ no sentido L^2 , então $\int_0^t f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,j} \beta_{i,j}$ no sentido de convergência uniforme. Tais funções são densas em $C_0[0, 1]$ (eles incluem, por exemplo, todas as funções polinomiais que se anulam em 0, e agora teorema de Stone–Weierstrass se aplica, cuja prova curta e elegante pode ser vista em [4], ou [32], F.3, p. 392). Agora seja $f \in C_0[0, 1]$ uma função qualquer. Escolhemos f_n que admitem uma representação em questão e convergem para f uniformemente. Usando as notações do exercício 2.41, denotaremos $a_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,j}^{(n)}$. Agora não é difícil verificar que a série $\sum a_{i,j} \beta_{i,j}$ converge uniformemente para f . A unicidade segue-se do exercício 2.40. ▷

Observação 2.43. Diz-se que as funções $\beta_{i,j}$ formam uma *base de Schauder* no espaço $C_0[0, 1]$. Esta base de Schauder particular se chama o *sistema de Faber–Schauder*. Veja, por exemplo, [37] para um tratamento detalhado, ou [12] para uma prova simples, com coeficientes de Faber–Schauder explícitos.

Exercício 2.44. Mostrar que a aplicação de $C_0[0, 1]$ por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ enviando cada função f para a sequência de coeficientes de Faber–Schauder dela é contínua. (É praticamente uma reformulação do exercício 2.41...)

Escrevemos as nossas funções como uma sequência simples, β_n , enumerando todas as funções $\beta_{i,j}$ antes das funções $\beta_{i+1,j}$. Desse modo, as funções $\beta_{i,j}$ andam em blocos: todas as 2^i funções com suportes em intervalos de comprimento 2^{-i} , seguidos por 2^{i+1} funções com suportes em intervalos de comprimento 2^{-i-1} , etc.

Teorema 2.45. γ^∞ -Quase toda sequência $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tem a propriedade que a série

$$\sum x_n \beta_n$$

converge uniformemente em $C_0[0, 1]$.

◁ Para cada i e a parte da soma que corresponde ao bloco i , temos

$$\max_t \left| \sum_j |a_{i,j}| \beta_{i,j}(t) \right| \leq 2^{-i/2-1} \max_j |a_{i,j}|.$$

Por conseguinte, a série $\sum a_{i,j} \beta_{i,j}$ converge uniformemente se

$$\sum_i 2^{-i/2-1} \max_j |a_{i,j}| < \infty.$$

Por exemplo, isso é o caso se $\max_j |a_{i,j}| = O(2^{-i/4})$. Em outras palavras, o coeficiente 2^i -ésimo deve ser de ordem de grandeza $O(2^{-i/4})$, ou bem, voltando para a sequência simples β_n , o coeficiente n -ésimo deve ser $O(n^{n/4})$.

Escolhemos uma sequência $R_n > 0$, $R_n = \Theta(n^{1/4})$, tomando valores idênticos sobre cada par de números vizinhos $2n-1, 2n$ e limitada por baixo por $n^{n/4}$. A construção na página 25 implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $K_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com $\gamma^\infty(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ tais que todos elementos $x \in K_\varepsilon$ satisfazem $x_n \leq cR_n$ para um certo $c > 0$. A série $\sum_n x_n \beta_n$ converge uniformemente em $C_0[0, 1]$ para cada $x \in K_\varepsilon$, definindo uma função $f \in C_0[0, 1]$. Isso termina a demonstração. ▷

Observação 2.46. Pode-se mostrar que o resultado acima é verdadeiro se ao invés de (β_n) usamos qualquer família de funções de forma $f^\bullet h_n$, onde (h_n) é uma base ortonormal no espaço $L^2(0, 1)$.

A aplicação $j: C_0[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, enviando cada função para a sequência de coeficientes de Faber–Schauder, é contínua (exercício 2.44). A aplicação inversa, definida pelo menos sobre o conjunto de medida plena $\cup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$, é boreliana graças a um resultado geral (cada aplicação boreliana e injetora de um espaço boreliano padrão para outro é um isomorfismo boreliano sobre a imagem, veja [24], p. 89). Porém, vamos deduzir este fato diretamente. A estrutura boreliana de $C_0[0, 1]$, como de cada espaço de Banach separável, é igual à sigma-álgebra gerada por todos os funcionais lineares e contínuos. A restrição de cada funcional $\phi \in C_0[0, 1]^*$ sobre ℓ^2 é um funcional linear contínuo, de forma $\phi(x) = \langle \xi, x \rangle$, e ele se estende até um funcional $\langle \xi, - \rangle$ γ^∞ -mensurável sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. A restrição de $\langle \xi, - \rangle$ sobre $C_0[0, 1]$ é igual a ϕ em quase toda parte. Isso mostra que a aplicação inversa de j ,

$$j^{-1}: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \supseteq \bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon \ni x \mapsto \sum x_n \beta_n \in C_0[0, 1]$$

é γ^∞ -mensurável.

Por conseguinte, a medida gaussiana é transferida no espaço $C_0[0, 1]$, por

$$w = j_*^{-1}(\gamma^\infty).$$

Como espaços com medida $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \gamma^\infty)$ e $(C_0[0, 1], w)$ são isomorfos. Isso permite de definir a ação do grupo ortogonal $O(\ell^2)$ sobre $(C_0[0, 1], w)$ por automorfismos, e afirmar todas as propriedades que nós estabelecemos nessa seção. A medida w se chama *medida de Wiener clássica*. De mesmo modo, podem se definir as medidas de Wiener w_σ de parâmetro σ^2 .

2.6. FUNÇÕES LIPSCHITZ- α CONTÍNUAS

Seja $0 < \alpha \leq 1$. Uma função real $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sobre um espaço métrico é dita Lipschitz- α contínua, ou de classe $C^{0,\alpha}$ de Hölder, se existe $C > 0$ tal que

para cada par $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Cada função Lipschitz- α contínua é contínua, mas o converso não é verdadeiro: por exemplo, $f(x) = x^\beta$, $0 < \beta \leq 1$, é Lipschitz- α contínua se e somente se $0 < \alpha \leq \beta$.

As funções Lipschitz- α contínuas sobre um espaço métrico X que se anulam num ponto escolhido $x_0 \in X$ formam um espaço linear, que torna-se um espaço de Banach sob a norma

$$\|f\|_{\text{Lip-}\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Nos vamos trabalhar com o espaço $C_0^{0,\alpha}[0, 1]$ de funções Lipschitz- α contínuas sobre $[0, 1]$ que se anulam em 0.

Exercício 2.47. Sejam $0 < \alpha \leq 1$ e $i \in \mathbb{N}$. Mostra que o supremo de valores de norma $\|f\|_{\text{Lip-}\alpha}$, onde $f = \sum_j a_{i,j} \beta_{i,j}$ e $\max_{i,j} |a_{i,j}| = a$, é atingido em dois pontos x e y cuja diferença é 2^{-i} e a função toma valores $\pm 2^{-i/2}a$, e é igual a

$$2^{i(\alpha-1/2)+1}a.$$

Exercício 2.48. Suponha que $0 < \alpha < 1/2$ e $|a_{i,j}| = O(2^{i(1/4-\alpha/2)})$. Mostra que a série $\sum_{i,j} a_{i,j} \beta_{i,j}$ converge uniformemente sobre $[0, 1]$ para uma função f que é Lipschitz- α contínua.

Exercício 2.49. Usando a sequência de valores de raio $R_{2n} = n^{(1/4-\alpha/2)}$ e a construção na página 25, mostrar que, quando $0 < \alpha < 1/2$, para γ^∞ -quase todo $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ a imagem $j(x)$ pertence a $C_0^{0,\alpha}[0, 1]$.

Deste modo, a medida de Wiener é suportada no espaço de funções Lipschitz- α contínuas, qual quer que seja $\alpha < 1/2$. Este espaço é menor do que $C_0[0, 1]$, e a topologia dele, estritamente mais fina. Para $\alpha \geq 1/2$, o resultado não é verdadeiro: já $\gamma^\infty(C_0^{0,1/2}[0, 1]) = 0$. Um fato interessante é que os espaços

$C_0^{0,\alpha}[0, 1]$, $0 < \alpha < 1$, não são separáveis: eles são dois a dois isomorfos entre eles e a espaço ℓ^∞ [6], logo a medida de Wiener é suportada num subespaço próprio deles (necessariamente separável, sendo a união de uma sequência de compactos por causa da regularidade).

A apresentação de duas últimas seções foi inspirada por [13], embora todos os erros vem do atual autor.

Observação 2.50. Uma norma contínua (necessariamente gerando uma topologia estritamente mais fraca) sobre ℓ^2 se chama *mensurável* se o espaço de Banach completamento de ℓ^2 munido desta norma tem a medida gaussiana plena e, logo, suporta uma medida de Wiener. Um tal complemento se chama um *espaço de Wiener abstrato*. Existe uma caracterização geométrica de tais normas, que exige, intuitivamente, que a bola unitária desta norma seja bastante grande para não admitir o argumento negando a existência da medida gaussiana, semelhante ao na seção 2.3. A teoria de espaços abstratos de Wiener baseada sobre essa noção é extensa. Eu recomendo os artigos originais de Leonard Gross [19, 20].

INTEGRAL MULTIPLICATIVA

3.1. DERIVADA LOGARÍTMICA À DIREITA

Os resultados da nossa terceira e última aula aplicam-se a qualquer grupo de Lie compacto e conexo, K . É bastante ter em mente o exemplo $K = SO(n)$ de grupo ortogonal especial $SO(n)$, que consiste de todas as matrizes $u \in M_n(\mathbb{R})$ tendo as propriedades $uu^* = u^*u = Id$ e $\det u = 1$. Como uma referência excelente para todas as noções da teoria de Lie, baseada sobre uma abordagem com matrizes, eu sugiro o livro do meu antigo colega na Universidade de Ottawa, Wulf Rossmann [35].

A topologia do grupo $SO(n)$ é induzida da topologia natural do espaço de matrizes $M_n(\mathbb{R})$, identificado com o espaço vetorial de dimensão n^2 com a sua topologia padrão. Com esta topologia, o grupo é compacto. A métrica compatível usada será a métrica de Hilbert–Schmidt:

$$\|A\|_2 = (\operatorname{tr}(A^*A))^{1/2}. \quad (3.1)$$

Em outras palavras, é a restrição da norma euclideana padrão quando pensamos do espaço de matrizes como um espaço euclidiano de dimensão n^2 . Escrever a norma sob a forma (3.1) tem a vantagem do que é fácil verificar que a distância é bi-invariante sobre o grupo $SO(n)$: quais quer que sejam $u, v, w \in SO(n)$,

$$\|wu - vw\|_2 = \|uw - vw\|_2 = \|u - v\|_2.$$

(Exercício).

A aplicação exponencial, definida por

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = Id + A + A^2/2 + \dots,$$

manda cada matriz de $M_n(\mathbb{R})$ para uma matriz inversível. Em particular, cada matriz antisimétrica A vai para uma matriz ortogonal, $\exp A$ (exercício). O inverso da aplicação exponencial, definido localmente, é dado pela aplicação logarítmica:

$$\log U = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (U - Id)^n.$$

Denotaremos $\mathfrak{so}(n)$ o espaço linear de todas as matrizes antisimétricas. Este espaço é uma álgebra de Lie, munida de colchete de Lie $[x, y] = xy - yx$, mas nós não vamos usar a estrutura de álgebra de Lie de verdade. As aplicações \exp e \log estabelecem um difeomorfismo local entre uma vizinhança de identidade em $SO(n)$ e uma vizinhança de zero em $\mathfrak{so}(n)$. Deste modo, o grupo $SO(n)$ forma uma variedade suave, de dimensão $\dim SO(n) = \dim \mathfrak{so}(n) = n(n-1)/2$, cujo atlas consiste de aplicações $\phi_u: x \mapsto \log(x \cdot u^{-1})$, definidos em uma vizinhança de u . As operações de grupo são suaves (de classe C^∞ , e de fato, C^ω).

Finalmente, definamos a *representação adjunta*, $\text{Ad}_g y = gyg^{-1}$, de $SO(n)$ em $\mathfrak{so}(n)$:

$$\text{Ad}_g y = gyg^{-1}.$$

É fácil ver que Ad é uma ação de $SO(n)$ sobre $\mathfrak{so}(n)$ por transformações lineares (de mais, automorfismos de álgebra de Lie), e além disso, ortogonais em relação à distância de Hilbert-Schmidt.

Se agora K é um subgrupo fechado de $SO(n)$, então pode se verificar o seguinte. O conjunto \mathfrak{k} de $x \in \mathfrak{so}(n)$ tais que $\exp(tx) \in K$ para todos $t \in \mathbb{R}$ forma uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(n)$. As restrições de \exp sobre \mathfrak{k} e de \log sobre K definam um difeomorfismo local. A álgebra de Lie \mathfrak{k} é fechada em relação à restrição da representação adjunta. Veja [35]. De outro lado, cada grupo de Lie compacto pode ser realizado como um subgrupo fechado de $SO(n)$.

Agora sejam K um grupo de Lie compacto realizado como um subgrupo de $SO(n)$, $f: \mathbb{I} \rightarrow G$, e $t \in \mathbb{I}$ um ponto onde f é diferenciável. A derivada de f em ponto $t \in \mathbb{I}$ pertence ao espaço tangente $T_{f(t)}K$. Dentro de $M_n(\mathbb{R})$, este espaço linear é obtido do espaço tangente em identidade, \mathfrak{k} , pela multiplicação (à esquerda ou à direita) por uma matriz unitária, nomeadamente $U = f(x)$. Para obtermos um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{k} = T_{Id}(K)$, temos que multiplicar a derivada por $f(x)^{-1}$.

A *derivada logarítmica à direita* de f em t é um elemento da álgebra de Lie \mathfrak{k} de G definido por:

$$\partial^{log} f(t) = f'(t) \cdot f(t)^{-1}. \quad (3.2)$$

Seja t um ponto comum de suavidade para duas aplicações $f, g: \mathbb{I} \rightarrow G$. Temos:

$$\begin{aligned} \partial^{log}(fg)(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t)] (f(t)g(t))^{-1} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f(t + \Delta t)(g(t + \Delta t) - g(t))] g(t)^{-1} f(t)^{-1} + \\ &\quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(f(t + \Delta t) - f(t))g(t)] g(t)^{-1} f(t)^{-1} \\ &= f(t)g'(t)g(t)^{-1} f(t)^{-1} + f'(t)f(t)^{-1} \\ &= \text{Ad}_{f(t)} \partial^{log} g(t) + \partial^{log} f(t). \end{aligned}$$

Escrevemos a fórmula assim:

$$\partial^{log}(fg)(t) = \partial^{log} f(t) + \text{Ad}_{f(t)} \partial^{log} g(t). \quad (3.3)$$

A fórmula está válida num contexto muito mais geral de grupos de Lie de dimensão infinita ([28], p. 250).

Uma função real f absolutamente contínua sobre o intervalo fechado $\mathbb{I} = [0, 1]$ é diferenciável em λ -quase toda parte, e se $f(0) = 0$, então $f(t) = \int_0^t f'(s) ds$, para λ -quase toda t . Por conseguinte, o mesmo é válido para uma aplicação com valores em um espaço vetorial de dimensão finita como $M_n(\mathbb{R})$. (Para os fatos básicos sobre funções absolutamente contínuas, veja Appendix 4.4 do livro [39], disponível na página web do autor). Concluimos: cada

aplicação absolutamente contínua $f: \mathbb{I} \rightarrow K$ (um caminho) tem a derivada logarítmica à direita definida em λ -quase toda parte.

Digamos que um caminho f tem *energia finita* se

$$\int_0^1 \|\partial^{\log} f(t)\|^2 dt < \infty.$$

Em outras palavras, um caminho $f: \mathbb{I} \rightarrow G$ tem energia finita se e somente se $\partial^{\log} f$ pertence ao espaço $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$.

Sejam f, g dois caminhos de energia finita. Definamos a distância entre eles como segue:

$$d(f, g) = \|\partial^{\log} f - \partial^{\log} g\|_2, \quad (3.4)$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a norma no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k}) = L^2(0, 1) \otimes \mathfrak{k}$.

Denotemos $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ o conjunto de todos os caminhos $f: \mathbb{I} \rightarrow K$ de energia finita tais que $f(0) = e$, identidade de K . (A origem da notação é que esses são aplicações de classe de Sobolev $H^1 = W^{2,1}$, se o grupo K é visto como uma sub-variedade suave de $M_n(\mathbb{R})$). Vamos mostrar que tais caminhos formam um subgrupo de $C(\mathbb{I}, K)$, que torna-se um grupo topológico polonês (separável e completo) sob a métrica (3.4).

Uma prova direita pode ser vista em [1], Sect. 1.8. Outra segue-se dos resultados de [30], Corol. 9.7, p. 30. Nós vamos apresentar uma prova usando o fato que a derivada logarítmica

$$\partial^{\log}: H_e^1(\mathbb{I}, K) \rightarrow L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k}) = L^2(0, 1) \otimes \mathfrak{k} \quad (3.5)$$

é uma bijeção. Com esta finalidade, vamos construir a aplicação inversa dela. Intuitivamente, o inverso de derivada deve ser uma espécie de integral. É a chamada *integral multiplicativa*, ou *integral de produto* [9, 28].

3.2. INTEGRAL MULTIPLICATIVA

Seja f uma função simples de $\mathbb{I} = [0, 1]$ para \mathfrak{k} , tomando valores constantes em cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Para qualquer $t \in [t_j, t_{j+1})$, a

integral multiplicativa de f entre 0 e t é definida por

$$\prod_0^t \exp f(s) ds = \exp(t - t_j)f(t_j) \exp(t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}) \dots \exp t_1 f(0). \quad (3.6)$$

Exercício 3.1. Notar que se A e B são duas matrizes que comutam, $AB = BA$, então $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.

Exercício 3.2. Deduzir que o valor da integral $\prod_0^t \exp f(s)$ de uma função simples não depende da escolha de uma partição finita, uma vez que f tomar valores constantes sobre os intervalos daquela partição.

O resultado seguinte permite-nos a estender a integral sobre todas as funções de classe L^1 .

Lema 3.3. *Sejam f e g duas funções simples. Então,*

$$\prod_0^t \exp f(s) ds - \prod_0^t \exp g(s) ds = \int_0^1 \left[\prod_s^t g(x) dx (f(s) - g(s)) \prod_0^s f(y) dy \right] ds. \quad (3.7)$$

◁ Denotaremos, para simplicidade e sem perda de generalidade, $t_{i+1} = t$, $\Delta_j = (t_{j+1} - t_j)$, $f_j = f(t_j)$, $g_j = g(t_j)$, e

$$a_j = \exp f_j \Delta_j, \quad b_j = \exp g_j \Delta_j,$$

para todos $i = 0, 1, \dots, i$. Temos

$$\begin{aligned} \prod_0^t \exp f(s) ds - \prod_0^t \exp g(s) ds &= a_i a_{i-1} \dots a_2 a_1 - b_i b_{i-1} \dots b_2 b_1 \\ &= (a_i - b_i) a_{i-1} \dots a_2 a_1 + b_i (a_{i-1} - b_{i-1}) a_{i-2} \dots a_1 \\ &\quad + b_i b_{i-1} (a_{i-2} - b_{i-2}) a_{i-3} \dots a_1 + \dots \\ &\quad + b_i b_{i-1} \dots b_1 (a_0 - b_0). \end{aligned}$$

Representemos

$$\begin{aligned} a_i - b_i &= \exp f_i \Delta_i - \exp g_i \Delta_i \\ &\approx 1 + f_i \Delta_i + (f_i \Delta_i)^2 / 2 + \dots - (1 + g_i \Delta_i + (g_i \Delta_i)^2 / 2 + \dots) \\ &= (f_i - g_i) \Delta_i + (\dots) \Delta_i^2 / 2. \end{aligned}$$

Menos a termos de segunda ordem, a expressão original torna-se

$$\sum_{j=1}^i \left[\prod_{t_j}^{t_i} \exp g(x) dx \cdot (f_j - g_j) \cdot \prod_0^{t_j} \exp f(y) dy \right] \Delta_i$$

e converge para a integral clássica de Riemann na eq. (3.7). A contribuição total dos termos de ordem ≥ 2 vai ser de ordem de grandeza $O(\max \Delta_i)$, pois f e g são limitadas e a_i, b_i são matrizes ortogonais (logo, isometrias). Por conseguinte, essa contribuição vai desaparecer no limite $\max \Delta_i \rightarrow 0$. \triangleright

Corolário 3.4. *Dadas funções simples f e g com valores em K ,*

$$\left\| \prod_0^t \exp f(s) ds - \prod_0^t \exp g(s) ds \right\|_{\infty} \leq \|f - g\|_1. \quad (3.8)$$

Exercício 3.5. Deduzir que a integral multiplicativa estende-se de modo único por continuidade uniforme sobre todas as funções de $L^1(0, 1) \otimes \mathfrak{k}$.

Observação 3.6. Por conseguinte, a identidade na eq. (3.7) vale para quaisquer funções f, g de classe L^1 . Ela se chama *fórmula de Duhamel*. A desigualdade (3.8) é válida para funções L^1 também. Para um tratamento detalhado e aprofundado, consulta a monografia [9].

Exercício 3.7. Seja $f \in L^1(0, 1) \otimes \mathfrak{k}$. Verifique que a função

$$\mathbb{I} \ni t \mapsto \prod_0^t \exp f(s) ds \in K$$

é absolutamente contínua e satisfaz

$$\partial_t^{\log} \prod_0^t \exp f(s) ds = f(t), \text{ em } \lambda\text{-quase toda parte.}$$

(Se precisar de ajuda, consulte [9], Thm. 1.2, e Sect. 1.8, p. 55, eq. (8.6).)

Concluimos que a derivada logarítmica (eq. (3.5)) é uma bijeção entre $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ e $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$. A operação de multiplicação usual (pontual) de funções em $H_0^1(\mathbb{I}, K)$ corresponde, graças à identidade de cociclo (eq. (3.3)), à operação binária seguinte em $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$:

$$f * g = f + \text{Ad}_{\Pi_{\exp} f} g. \tag{3.9}$$

Como a operação $*$ é bem definida para todos $f, g \in L^2 \otimes \mathfrak{k}$, concluimos que $H_0^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ é fechado por multiplicação. A operação de inverso corresponde à

$$\partial^{log}(f^{-1}) = (\text{Ad}_f)^{-1}(-\partial^{log} f)$$

(exercício), logo, também é bem definida. Denotamos o inverso de f em relação à operação $*$ por f^{-1*} , então

$$f^{-1*} = -\text{Ad}_{\Pi_{\exp} f}^{-1} f.$$

Por conseguinte, $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ é um subgrupo de $C(\mathbb{I}, K)$.

A distância euclidiana sobre $L^2 \otimes \mathfrak{k}$ é invariante por translações e operadores ortogonais. Logo, ela é invariante por multiplicação $*$ à esquerda. Isso implica que a métrica sobre $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ dada por eq. (3.4) é invariante à esquerda:

$$d(fg, fh) = d(g, h).$$

Para mostrar que a topologia dada pela métrica d é uma topologia de grupo, resta mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ e f existe $\delta > 0$ tal que $fB_\delta(e)f^{-1} \subseteq B_\varepsilon(0)$. Vamos trabalhar “en cima”, no espaço $L^2 \otimes \mathfrak{k}$ munido da operação $*$ e da norma euclidiana.

Denotemos a norma uniforme sobre $M_n(\mathbb{R})$ por $\|\cdot\|_u$. Sobre o grupo compacto $K \subseteq SO(n)$, ela é equivalente à norma de Hilbert–Schmidt, $\|\cdot\|_2$.

Exercício 3.8. Verifique que a norma uniforme é bi-invariante sobre $SO(n)$ (assim como a norma de Hilbert–Schmidt).

Temos, para quais quer matrizes ortogonais u, v e uma matriz $A \in M_n$,

$$\begin{aligned} \|\text{Ad}_u A - \text{Ad}_v A\|_2 &= \|uAu^{-1} - vAv^{-1}\|_2 \\ &\leq \|uAu^{-1} - uAv^{-1}\|_2 + \|uAv^{-1} - vAv^{-1}\|_2 \\ &\leq 2\|u - v\|_u \|A\|_2 \\ &\leq 2\|u - v\|_2 \|A\|_2. \end{aligned}$$

Se agora $u, v: \mathbb{I} \rightarrow K$ são tais que $\max_t \|u(t) - v(t)\|_2 < \gamma$, e $f \in L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, então

$$\begin{aligned} \|\text{Ad}_u f - \text{Ad}_v f\|_2 &= \left[\int_0^1 \|\text{Ad}_{u(t)} f(t) - \text{Ad}_{v(t)} f(t)\|_2^2 dt \right]^{1/2} \\ &\leq 2\gamma \left[\int \|f(t)\|_2^2 dt \right]^{1/2} \\ &= 2\gamma \|f\|_2. \end{aligned}$$

Agora sejam $f \in L^2 \otimes \mathfrak{k}$ e $\varepsilon > 0$. Denotaremos $C = \|f\|_2$. Definamos $\delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon/2C\}$.

Seja $g \in L^2 \otimes \mathfrak{k}$ qualquer com $\|g\|_2 < \delta$. A conjugação fuf^{-1} , escrita usando a operação $*$, é igual a

$$f * u * f^{-1*} = f + \text{Ad}_{\Pi \exp f} g - \text{Ad}_{\Pi \exp f \Pi \exp g (\Pi \exp f)^{-1}} f.$$

Da fórmula de Duhamel, concluimos que $\|\Pi \exp g - 1\|_\infty \leq \delta$ (a norma de supremo no intervalo calculada usando a norma de Hilbert-Schmidt sobre as matrizes). A bi-invariância da distância de Hilbert-Schmidt sobre o grupo $SU(n)$ implica que $\|\Pi \exp f \Pi \exp g (\Pi \exp f)^{-1} - 1\|_\infty < \delta$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \|f + \text{Ad}_{\Pi \exp f} g - \text{Ad}_{\Pi \exp f \Pi \exp g \Pi \exp f^{-1}} f\|_2 &\leq \|\text{Ad}_1 f - \text{Ad}_{\Pi \exp f \Pi \exp g \Pi \exp f^{-1}} f\|_2 + \\ &\quad \|\text{Ad}_{\Pi \exp f} g\| \\ &\leq 2\delta \|f\|_2 + \|g\|_2 \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, como o espaço L^2 é separável e completo, o grupo topológico $H_c^1(\mathbb{I}, K)$ o é também, ou seja, é um grupo polonês.

3.3. APLICAÇÃO DE ITÔ

A ação do grupo topológico $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ de caminhos de energia finita sobre se mesmo por multiplicação à esquerda admite uma realização isomorfa no espaço $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$. Seja $f \in H_e^1(\mathbb{I}, K)$, então a ação por isometrias afins,

$$g \mapsto \partial^{\log} f + \text{Ad}_g f,$$

admite um isomorfismo com a ação acima mencionada no sentido de dinâmica topológica (ou de grupos de transformações). O isomorfismo numa direção é estabelecido pela derivada logarítmica ∂^{\log} , na outra direção, pela integral multiplicativa $\prod \exp$.

Nota-se que o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ imerge-se no espaço de funções contínuas $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, munido com a medida de Wiener clássica (as modificações do caso $C_0[0, 1]$ são bastante evidentes). Cada translação aditiva por um elemento f de $L^2 \otimes \mathfrak{k}$ estende-se até uma translação do espaço $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, é simplesmente a translação aditiva por $\int^\bullet f$. Cada operador ortogonal, inclusive Ad_f , estende-se até um automorfismo de espaço com medida, no caso, $\text{Ad}_{\tilde{f}}$. Deste modo, cada caminho $f \in H_e^1(\mathbb{I}, K)$ define, para w_σ -quase todas funções $g \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, a transformação:

$$C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k}) \ni g \mapsto \int^\bullet f + \text{Ad}_{\prod \exp f} \tilde{g}.$$

Pode-se verificar que, para cada $\sigma > 0$, esta fórmula define uma ação do grupo $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ sobre o espaço $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ por transformações definidas em w_σ -quase toda parte e que preservam a *classe de equivalência* da medida.

Segue-se de nossos resultados (corolário 2.32 e proposição 2.19) que as medidas de Wiener w_σ , $\sigma \rightarrow \infty$, são assintoticamente invariantes em relação à ação do grupo $H_e^1(\mathbb{I}, K)$. Por conseguinte, existe uma média sobre o espaço de funções borelianas e limitadas sobre $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, invariante sob a ação de $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ assim definida.

Agora seria desejável de transferir as medidas w_σ (ou simplesmente a média invariante) para o grupo $C_0(\mathbb{I}, K)$ de aplicações contínuas. De mesmo modo como o espaço de Banach $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ é um completamento do espaço de Hilbert

$L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ em relação a uma norma mais fraca, o grupo topológico de funções contínuas $C_0(\mathbb{I}, K)$ é um completamento do grupo $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ em relação a uma métrica bi-invariante mais fraca. O grupo $H_e^1(\mathbb{I}, K)$ age sobre os dois – o espaço de Banach $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ assim como o grupo polonês $C_0(\mathbb{I}, K)$ – e a ideia parece atraente, de estabelecer um isomorfismo entre os dois sistemas dinâmicos, estendendo o isomorfismo já existente entre as duas realizações do grupo $H_e^1(\mathbb{I}, K)$. Um tal isomorfismo deve ser (1) mensarável, para nossas medidas (ou a média invariante) descenderem de $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ para $C_0(\mathbb{I}, K)$, e (2) equivariante, ou seja, comutar com a ação do grupo $H_e^1(\mathbb{I}, K)$.

A nossa aplicação hipotética, I , deve estender a integral multiplicativa. Mas exatamente, a imagem de $L^2(0, 1) \otimes \mathfrak{k}$ sob a aplicação \int^\bullet consiste de todas as funções de classe H^1 de Sobolev: as funções absolutamente contínuas cuja derivada é somável com o quadrado. Como o domínio de I vai ser $C_0[0, 1] \otimes \mathfrak{k}$, a restrição de I sobre $H^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ deve ser igual à composição $f \mapsto \prod \exp f'(s) ds$. Como $f' \Delta t_i$ aproxima $\Delta f_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$, a eq. (3.6) sugere aproximar I por expressões

$$I_n(f)(t) = \exp \left(\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} (f(t_{j+1}) - f(t_j)) \right) \exp(f(t_j) - f(t_{j-1})) \dots \exp f(t_1), \quad (3.10)$$

onde $f \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ e $t \in [t_j, t_{j+1})$.

Em outras palavras, a partir da função f , construímos uma função simples, f_n^Δ , cujo valor constante sobre cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ é o quociente diferencial:

$$f_n^\Delta(t) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \quad \text{se } t \in [t_{i-1}, t_i).$$

Esta função f_n^Δ é uma aproximação da (em geral não existente) derivada de f . Nesta notação,

$$I_n(f)(t) = \prod_0^t \exp f_n^\Delta(s) ds.$$

Espera-se que a sequência $(I_n(f))$ convirja uniformemente para um limite, $I(f) = \prod^\bullet \exp df$, a aplicação de Itô.

Nota-se que se $f \in H_0^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, então a sequência f_n^Δ aproxima f' no espaço $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$. Neste caso, a sequência $(I_n(f))$ de fato converge uniformemente, e o

limite é exatamente a integral multiplicativa de f' :

$$\prod \exp f_n^\Delta(s) ds \rightarrow \prod \exp f'(s) ds.$$

Isso mostra que estamos no caminho certo. Agora vamos concentrar sobre a convergência uniforme de $I_n(f)$.

Se K é abeliano, então $\exp(x + y) = \exp x \exp y$, os termos no produto na eq. (3.10) se anulam de forma telescópica, e obtemos simplesmente $I(f)(t) = \exp(f)(t)$.

No caso não comutativo,

$$\begin{aligned} \exp x \exp y &= (1 + x + x^2/2 + \dots)(1 + y + y^2/2 + \dots) \\ &= 1 + x + y + x^2/2 + y^2/2 + xy + \dots, \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} \exp(x + y) &= 1 + x + y + (x + y)^2/2 + \dots \\ &= 1 + x + y + x^2/2 + y^2/2 + xy/2 + yx/2 + \dots, \end{aligned}$$

então, a diferença entre eles é

$$\frac{1}{2}[x, y] = \frac{1}{2}(xy - yx),$$

mais termos de terceira ordem. O comutador, sendo de segunda ordem de grandeza, vai causar dificuldades para funções não suaves.

Suponha que a nossa partição tem 2^n elementos, e que dividamos cada subintervalo em dois subintervalos de mesmo tamanho. Denotemos o incremento da função f em cada um destes dois subintervalos $\Delta f_1, \Delta f_2$. Logo, o incremento no subintervalo original é igual a $\Delta_1 + \Delta_2$, e a diferença de termos correspondentes nas expressões de I_{2^n} e $I_{2^{n+1}}$ vai ser

$$\exp(\Delta_1 + \Delta_2) - \exp \Delta_1 \exp \Delta_2 \approx -\frac{1}{2}[\Delta_1, \Delta_2].$$

O mesmo vale, a terceira ordem menos, para quociente:

$$\exp(\Delta_1 + \Delta_2)^{-1} \exp \Delta_1 \exp \Delta_2 \approx \exp \frac{1}{2}[\Delta_1, \Delta_2].$$

Se os termos a livrar-se fossem de terceira ordem, nós poderíamos usar o fato que a medida de Wiener é suportada nas funções α -Lischitz contínuas para qualquer $\alpha < 1/2$. Se além disso $\alpha > 1/3$, então cada termo de 3ª ordem pode ser estimado por

$$\Delta f_i^3 \leq C((t_i - t_{i-1})^\alpha)^3 = C2^{-n3\alpha},$$

onde $C = C(f) = \|f\|_{0,\alpha}$. A soma de todos os 2^n termos é limitada por

$$C2^{n(1-3\alpha)},$$

e como $3\alpha > 1$, a série é ainda somável. Então, os termos de terceira ordem não causam dificuldade. Porém, o mesmo jeito apenas vai dar certo para termos de segunda ordem se $\alpha > 1/2$, e tais funções já tem a medida de Wiener nula.

E os termos de segunda ordem são tipicamente bastante grandes para uma função aleatória seguindo a distribuição de Wiener, $f \sim w$.

Exercício 3.9. Mostre que o incremento $\Delta f = f(s) - f(t)$, onde $s < t$, $f \in C_0[0, 1]$, and $f \sim w$, segue a lei gaussiana com $\sigma^2 = |s - t|$. (Calcule a norma da restrição do funcional correspondente sobre L^2).

Exercício 3.10. Deduza que o incremento análogo no espaço $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ segue a lei $\gamma^d \sqrt{|s-t|}$, onde d é a dimensão de \mathfrak{k} como espaço vetorial.

Então, o valor típico de Δf_i é de ordem de grandeza $\sqrt{\Delta x_i}$, e a cota ingênua para a soma de n colchetes de forma $[\Delta_1, \Delta_2]$ vai ser de ordem $O(1)$, que é inútil.

Exercício 3.11. Mostra que os incrementos sobre dois intervalos disjntos, $[t, s]$ e $[a, b]$, onde $t < s \leq a < b$, são variáveis aleatórias independentes.

Isso oferece a solução: um grande número de incrementos grandes e independentes vão se anular mutuamente, no mesmo espírito como no Teorema Central do Limite.

Teorema Central do Limite diz que, dada uma sequência X_1, X_2, \dots de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, seguindo uma lei μ com média 0 e variância 1, as variáveis S_n/\sqrt{n} , onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

convergem em lei para a distribuição normal padrão. Em outras palavras, as distribuições de S_n/\sqrt{n} convergem fracamente para γ^1 .

Relembramos que D_ε denota o disco de raio $\varepsilon > 0$ em \mathbb{R}^2 . Para cada $\varepsilon > 0$, pelas considerações geométricas,

$$\begin{aligned} 2\gamma^1[\varepsilon, +\infty) &< 1 - \gamma^2(D_\varepsilon) \\ &= 1 - (1 - e^{-\varepsilon^2/2}) \\ &= e^{-\varepsilon^2/2}. \end{aligned}$$

Então, para $X \sim \gamma^1$,

$$P[|X| > \varepsilon] < e^{-\varepsilon^2/2}.$$

Segue-se que, para cada $\varepsilon > 0$ e n bastante grande,

$$P\left[\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right] < e^{-\varepsilon^2/2},$$

e para cada a e n bastante grande,

$$\begin{aligned} P\left[\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| > \sqrt{2a \log n}\right] &< e^{-a \log n} \\ &= n^{-a}. \end{aligned}$$

Quando $a > 1$, a série é somável. Agora seja $n = 2^k$. Denotamos μ a lei de X_1 . Escolhemos $a > 1$ qualquer e denotemos

$$p_k = p_k(\mu) = P\left[\max_{i=1}^{2^k} |X_1 + X_2 + \dots + X_i| > 2^{k/2+1} \sqrt{a(k+1)}\right]. \quad (3.11)$$

Temos:

$$\begin{aligned} p_k &= P\left[\max_{i=1}^{2^k} |X_1 + X_2 + \dots + X_i| > \sqrt{2a(2^k) \log(2^{k+1})}\right] \\ &\leq P\left[\max_{i=1}^{2^k} \left|\frac{X_{2^{k+1}} + X_{2^{k+2}} + \dots + X_{2^{k+i}}}{\sqrt{2^k + i}}\right| > \sqrt{2a \log(2^k + i)}\right] \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^k} (2^k + i)^{-a} \\ &= s_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nota-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} < \infty.$$

Lema 3.12. *Seja μ uma medida de probabilidade sobre \mathbb{R} com média 0 e variância finita. Seja $a > 1$ qualquer. Sejam X_1, \dots, X_{2^k} variáveis aleatórias i.i.d., seguindo a lei $2^{-k} = D_{2^{-k}}\mu$ (a imagem de μ pela dilatação). Denotemos*

$$s_k = P \left[\max_{i=1}^{2^k} |X_1 + X_2 + \dots + X_i| > 2^{-k/2+1} \sqrt{a(k+1)} \right].$$

Então, a sequência (s_k) é somável. Em particular, quase certamente, para cada k bastante grande,

$$\max_{i=1}^{2^k} |X_1 + X_2 + \dots + X_i| \leq 2^{-k/2+1} \sqrt{a(k+1)}.$$

◁ As probabilidades p_k são as mesmas probabilidades da eq. (3.12). A coisa importante é que as variáveis $2^k X_i$ do lema todas seguem a mesma lei μ para valores de k diferentes. ▷

Lema 3.13. *Seja X uma variável aleatória tomando valores em \mathbb{R}^d e seguindo a lei γ^d . Seja U uma variável aleatória tomando valores no grupo ortogonal $O(d)$ de \mathbb{R}^d e independente de X . Então a variável aleatória $UX \in \mathbb{R}^d$ segue a lei γ^d e é independente de U .*

◁ Cada matriz ortogonal u preserva a medida gaussiana, então a lei condicional de UX dado $U = u$ é igual a γ^d quase sempre. Isso implica que a lei de UX é γ^d , e também que UX é independente de U . ([22], lemma 86.(i), p. 169). ▷

Agora vamos estimar a diferença entre $I_{2^n}(f)$ e $I_{2^{n+1}}(f)$, para simplicidade, usando as partições uniformes. Para cada intervalo $[i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]$, denotaremos $\Delta_{i,1} = f(i2^{-n} + 2^{-n-1}) - f(i2^{-n})$ o incremento de f na primeira metade do intervalo, e $\Delta_{i,2} = f((i+1)2^{-n}) - f(i2^{-n} + 2^{-n-1})$ o incremento na segunda metade. Deste modo, $\Delta_{i,1} + \Delta_{i,2}$ é o incremento no intervalo inteiro. Denotaremos

$$a_i = \exp(\Delta_{i,1} + \Delta_{i,2}), \quad b_i = \exp(\Delta_{i,1} + \Delta_{i,2})^{-1} \exp(\Delta_{i,1}) \exp(\Delta_{i,2}).$$

É bastante estimar o valor só em pontos extremos dos intervalos. Temos

$$\begin{aligned}
I_{2^n}(f)((i+1)2^{-n}) &= a_i a_{i-1} a_{i-2} \dots a_2 a_1, \\
I_{2^{n+1}}(f)((i+1)2^{-n}) &= a_i b_i a_{i-1} b_{i-1} a_{i-2} b_{i-2} \dots a_2 b_2 a_1 b_1 \\
&= a_i a_{i-1} a_{i-2} \dots a_2 a_1 \times (a_{i-1} \dots a_2 a_1)^{-1} b_i (a_{i-1} \dots a_2 a_1) \times \\
&\quad (a_{i-2} \dots a_2 a_1)^{-1} b_{i-1} (a_{i-2} \dots a_2 a_1) \times \\
&\quad \dots \times \\
&\quad a_1^{-1} b_2 a_1 \times b_1.
\end{aligned}$$

Nós sabemos lidar com os termos de terceira ordem. A estes termos menos,

$$\begin{aligned}
&(a_{i-1} \dots a_2 a_1)^{-1} b_i (a_{i-1} \dots a_2 a_1) \times (a_{i-2} \dots a_2 a_1)^{-1} b_{i-1} (a_{i-2} \dots a_2 a_1) \times \\
&\quad \dots \times a_1^{-1} b_2 a_1 \times b_1 - 1 \\
&\approx (a_{i-1} \dots a_2 a_1)^{-1} \frac{1}{2} [\Delta_{i,1} \Delta_{i,2}] (a_{i-1} \dots a_2 a_1) + \\
&\quad (a_{i-2} \dots a_2 a_1)^{-1} \frac{1}{2} [\Delta_{i-1,1}, \Delta_{i-1,2}] (a_{i-2} \dots a_2 a_1) + \\
&\quad \dots + a_1^{-1} \frac{1}{2} [\Delta_{2,1}, \Delta_{2,2}] a_1 + \frac{1}{2} [\Delta_{i,1}, \Delta_{i,2}].
\end{aligned}$$

Aplicação recursiva do lema 3.13 mostra que as variáveis aleatórias

$$(a_{j-1} \dots a_2 a_1)^{-1} (\Delta_{j,1}, \Delta_{j,2}) a_{j-1} \dots a_2 a_1 \quad (3.13)$$

são i.i.d. gaussianas com a lei $\gamma_{2^{-(n+1)/2}}^{2d}$, onde $d = \dim \mathfrak{k}$. Segue-se que as v.a.

$$(a_{j-1} \dots a_2 a_1)^{-1} [\Delta_{j,1}, \Delta_{j,2}] a_{j-1} \dots a_2 a_1$$

são i.i.d. (não mais gaussianas), simétricas, com a média 0. As componentes delas (projeções para espaço funcional gerado pelo qualquer vetor de base de \mathfrak{k}) são variáveis aleatórias reais i.i.d., simétricas, e tem variância limitada pelo produto de variâncias de $\Delta_{j,1}$, $\Delta_{j,2}$, ou seja, $\sigma = O(2^{-n})$. Denotemos estas componentes Y_i .

Agora apliquemos lema 3.12 à nossa sequência de variáveis Y_i . Nota-se que a imagem de cada variável $[X, Y]$ pela dilatação D_{2^n} segue a mesma lei,

com variância 1. Para w -quase todas f , para n bastante grande, a distância uniforme entre $I_n(f)$ e $I_{n+1}(f)$ satisfaz

$$\|I_n(f) - I_{n+1}(f)\| = O(2^{-n/2}).$$

Isso permite concluir que a sequência funcional $I_n(f)$ é uniformemente Cauchy, logo converge uniformemente, para w -quase todas funções f . Denotemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f) = \prod \exp df.$$

Sendo um limite pontual de uma sequência de aplicações contínuas, I é mensurável (admite uma realização de classe de Baire, [24], p. 52).

Nós mostramos:

Teorema 3.14. *As aplicações*

$$I_n(f) = \Pi \exp(f_n^\Delta)$$

convergem para w -quase toda $f \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ para uma aplicação mensurável

$$I: C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k}) \rightarrow C_e(\mathbb{I}, K)$$

(a aplicação de Itô).

Observação 3.15. A aplicação de Itô I pode ser também chamada a integral multiplicativa estocástica. Porém, isto precisa de uma clarificação.

As medidas de Wiener de parâmetros diferentes são duas a duas singulares: $\|w_\sigma - w_{\sigma'}\|_{TV} = 1$ se $\sigma \neq \sigma'$. (Exercício). Então, existe uma versão da aplicação de Itô para cada valor de parâmetro $\sigma^2 > 0$.

Porém, como para cada f a convergência uniforme de $I_n(f)$ (se tivesse lugar) não dependem da medida, podemos concluir que o conjunto de todos $f \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ onde $I(f)$ é bem definido tem medida plena para qualquer w_σ . Neste sentido, I é uma aplicação boreliana determinística, definida parcialmente, sobre um subconjunto boreliano de $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$.

3.4. EQUIVARIÂNCIA

Denotemos $C_0^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ o subgrupo de $H_0^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ que consiste de todas as funções $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{k}$ de classe C^1 tais que $f(0) = 0$. De mesmo jeito, $C_e^1(\mathbb{I}, K)$ denota o grupo de aplicações de classe C^1 do intervalo para K tais que $f(0)$ é identidade de K .

Teorema 3.16 (Malliavin e Malliavin [25]). *Para todas $f \in C_0^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ e w -quase todas $g \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$,*

$$I(f + \text{Ad}_{\tilde{I}(f)} g) = I(f) \cdot I(g). \quad (3.14)$$

Ou, de modo equivalente, para todas funções $h \in C(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ e w -quase todas $g \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$,

$$I(fh + \text{Ad}_{\tilde{\Pi \exp} h} g) = \Pi \exp(h) \cdot I(g).$$

Mais uma reformulação equivalente: para todas $k \in C_e^1(\mathbb{I}, K)$ e w -quase todas $g \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$,

$$I(\partial^{\log} k + \text{Ad}_{\tilde{k}} g) = k \cdot I(g).$$

Aqui, $\text{Ad}_{\tilde{x}}$ significa a extensão, definida em w -quase toda parte, do operador ortogonal Ad_x de $L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ para $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$.

Observação 3.17. Parece provável que o resultado seja válido para todos $f \in H_0^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, mas eu não sei verificar isso.

Relembramos que, dado uma função $g \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ e uma partição do intervalo t_1, t_2, \dots, t_n , a função simples g_n^Δ é definida por

$$g_n^\Delta(t) = \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{t_{j+1} - t_i},$$

onde $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Se $h \in L^1(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, definamos a função simples h_n^- por

$$h_n^-(t) = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} h(s) ds}{t_{j+1} - t_i},$$

quando $t \in [t_i, t_{i+1})$. Então, sobre cada subintervalo da partição a função h_n^- toma valor constante igual ao valor médio de h sobre este intervalo. Em outras palavras,

$$h_n^- = \left(\int_{\bullet} h \right)_n^{\Delta}.$$

Agora voltemos para eq. (3.14). Como $f', g_n^{\Delta} \in L^2(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, nós já sabemos graças à eq. (3.3) e teorema 3.14 que

$$\begin{aligned} \Pi \exp(f' + \text{Ad}_{\Pi \exp f'} g_n^{\Delta}) &= \Pi \exp f' \cdot \Pi \exp g_n^{\Delta} \\ &\stackrel{q.c.}{\rightarrow} \Pi \exp f' \cdot I(g) \\ &= I(f) \cdot I(g). \end{aligned}$$

Resta a verificar que

$$\Pi \exp(f' + \text{Ad}_{\Pi \exp f'} g_n^{\Delta}) \stackrel{q.c.}{\rightarrow} I(f + \text{Ad}_{\tilde{I}(f)} g), \quad (3.15)$$

ou seja, que

$$\left\| \Pi \exp(f' + \text{Ad}_{\Pi \exp f'} g_n^{\Delta}) - \Pi \exp((f + \text{Ad}_{\tilde{I}(f)} g)_n^{\Delta}) \right\|_{\infty} \stackrel{q.c.}{\rightarrow} 0.$$

Segundo o corolário do fórmula de Duhamel (observação 3.6), basta mostrar a convergência para a distância L^1 entre os argumentos. Como

$$(f + \text{Ad}_{\tilde{I}(f)} g)_n^{\Delta} = f_n^{\Delta} + (\text{Ad}_{\tilde{I}(f)} g)_n^{\Delta},$$

e

$$\|f' - f_n^{\Delta}\|_1 = \|f' - (f')_n^{\Delta}\|_1 \rightarrow 0,$$

a afirmação a mostrar simplifica-se assim:

$$\left\| \text{Ad}_{\Pi \exp f'} g_n^{\Delta} - (\text{Ad}_{\tilde{I}(f)} g)_n^{\Delta} \right\|_1 \stackrel{q.c.}{\rightarrow} 0.$$

Escolhemos uma base ortonormal e_1, \dots, e_k de \mathfrak{k} . Escrevemos

$$s_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{k=1}^d a_{ijk} \beta_{ij} \otimes e_k, \quad r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{k=1}^d a_{ijk} \beta_{ij} \otimes e_k,$$

a soma parcial e o resto de desenvolvimento de g na base de Faber–Schauder (teorema 2.42, com ajustes evidentes para o caso de $C(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$). Então, $s_n \rightrightarrows g$ (convergência uniforme sobre $[0, 1]$) e $r_n \rightrightarrows 0$. Segundo exercício 2.39,

$$(s_n)_n^\Delta = g_n^\Delta.$$

Para simplicidade, denotamos

$$h = \Pi \exp f' \in H_e^1(\mathbb{I}, K).$$

Esrevemos

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_{\tilde{\Pi \exp f' g}})_n^\Delta &= (\text{Ad}_{\tilde{h} g})_n^\Delta \\ &= (\text{Ad}_{\tilde{h} s_n})_n^\Delta + (\text{Ad}_{\tilde{h} r_n})_n^\Delta \\ &= (\text{Ad}_{h g_n^\Delta})_n^- + (\text{Ad}_{\tilde{h} r_n})_n^\Delta. \end{aligned}$$

Então,

$$\left\| \text{Ad}_{\Pi \exp f' g_n^\Delta} - (\text{Ad}_{\tilde{\Pi \exp f' g}})_n^\Delta \right\|_1 \leq \underbrace{\left\| \text{Ad}_{h g_n^\Delta} - (\text{Ad}_{h g_n^\Delta})_n^- \right\|_1}_{(I)} + \underbrace{\left\| (\text{Ad}_{\tilde{h} r_n})_n^\Delta \right\|_1}_{(II)}.$$

Estimemos os dois termos separadamente.

(I). Como a função $h = \Pi \exp f'$ é de classe C^1 , o incremento de h em cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$ pode ser aproximado, menos a termos de segunda ordem, por $h'(t_i) \Delta t_i$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{g \sim w} \left\| \text{Ad}_{h g_n^\Delta} - (\text{Ad}_{h g_n^\Delta})_n^- \right\|_1 &= \mathbb{E}_{g \sim w} \int_0^1 \left\| \text{Ad}_{h g_n^\Delta}(s) - (\text{Ad}_{h g_n^\Delta})_n^-(s) \right\|_2 ds \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{g \sim w} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \text{Ad}_{h g_n^\Delta}(s) - (\text{Ad}_{h g_n^\Delta})_n^-(s) \right\|_2 ds \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{g \sim w} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta h_i \left\| \frac{\Delta g_i}{\Delta t_i} \right\|_2 ds \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f'\|_\infty \Delta t_i \frac{\sqrt{\Delta t_i}}{\Delta t_i} \Delta t_i \\ &\leq \|f'\|_\infty \sqrt{\Delta t_i}. \end{aligned}$$

Agora relembremos que s_n é a soma de n primeiros blocos no desenvolvimento de Faber–Schauder, e que o bloco n -ésimo corresponde à partição do intervalo em 2^n subintervalos. A estimativa torna-se $O(2^{-n/2})$, uma série convergente, e por isso temos a convergência do termo (I) para zero para w -quase toda função g .

(II). Para cada elemento β_{ijk} da base de Schauder do espaço de Banach $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$, temos

$$\text{Ad}_{\tilde{h}}(\beta_{ijk}) = \int^{\bullet} \text{Ad}_h h_{ijk} ds,$$

e

$$(\text{Ad}_{\tilde{h}}(\beta_{ijk}))_n^{\Delta} = (\text{Ad}_h h_{ijk})_n^{-}.$$

Por conseguinte, se h_i é uma função simples tomando valores constantes sobre todos os intervalos $(j2^{-i}, (j+1)2^{-i})$, então

$$\left(\text{Ad}_{\tilde{h}_i} \left(\sum_{j,k} a_{ijk} \beta_{ijk} \right) \right)_n^{\Delta} = 0.$$

Denotando h_i uma aproximação simples de h (por exemplo, $h_i(t) = h(j2^{-i})$ sobre cada intervalo $[j2^{-i}, (j+1)2^{-i})$) e usando o fato que $h \in C^1(\mathbb{I}, K)$, concluímos:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\text{Ad}_{\tilde{h}} \sum_{j,k} a_{ijk} h_{ijk} \right)_n^{\Delta} \right\|_1 &\leq \left\| (\text{Ad}_h - \text{Ad}_{\tilde{h}_i}) \sum_{j,k} a_{ijk} h_{ijk} \right\|_1 \\ &\leq \max_{j,k} |a_{ijk}| \sum_{j,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'\|_{\infty} \Delta t_i ds \\ &= \max_{j,k} |a_{ijk}| k \|f'\|_{\infty} 2^{-i}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| (\text{Ad}_{\tilde{h}} r_n)_n^{\Delta} \right\|_1 &= \left\| \text{Ad}_{\tilde{h}} \sum_{i \geq n, j, k} a_{ijk} h_{ijk} \right\|_1 \\ &\leq \sum_{i \geq n, j, k} \max_{j,k} |a_{ijk}| k \|f'\|_{\infty} 2^{-i}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Denotaremos K_C o conjunto de funções $f \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ cujos coeficientes de Faber–Schauder crescem como $C \cdot 2^{i/4}$:

$$|a_{ijk}| \leq C \cdot 2^{i/4}.$$

A cota superior na eq. (3.16) será uma série somável, e o primeira lema de Glivenko–Cantelli garante a convergência em quase toda parte de K_C . Como $\cup_{C>0} K_C$ tem medida de Wiener plena, concluímos.

3.5. MÉDIAS INVARIANTES SOBRE GRUPOS DE CAMINHOS E LAÇOS

Teorema 3.18. *Existe uma média sobre o espaço de funções borelianas limitadas sobre o grupo $C_0(\mathbb{I}, K)$ invariante à esquerda pela multiplicação por funções de subgrupo denso $H^1(\mathbb{I}, K)$.*

◁ As medidas (w_σ) , $\sigma \rightarrow \infty$ sobre o espaço de Banach $C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k})$ formam uma família assintoticamente invariante sob as transformações

$$C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k}) \ni g \mapsto \partial^{\log} f + \text{Ad}_f g \in C_0(\mathbb{I}, \mathfrak{k}),$$

onde $f \in H^1(\mathbb{I}, K)$. Por conseguinte, as imagens direitas $I_*(w_\sigma)$ (*medidas de Wiener não lineares*) formam uma família de medidas de probabilidade borelianas sobre o grupo $C_0(\mathbb{I}, K)$, que é assintoticamente invariante pela multiplicação à esquerda por elementos de $H^1(\mathbb{I}, K)$. ▷

Corolário 3.19. *Os grupos topológicos de caminhos baseados $C_0(\mathbb{I}, K)$, laços baseados $C_0(\mathbb{S}^1, K)$, caminhos livres $C(\mathbb{I}, K)$, e laços livres $C(\mathbb{S}^1, K)$ são mediáveis.*

◁ O resultado para $C_0(\mathbb{I}, K)$ segue do teorema 3.18 e exercício 1.15. Agora o caso $C_0(\mathbb{S}^1, K)$ segue-se do teorema 1.18, e os casos restantes $C(\mathbb{I}, K)$ e $C(\mathbb{S}^1, K)$ seguem do exercício 1.16. ▷

Observação 3.20. Nota-se que na prova do corolário 3.19 nós apenas usamos o fato que a média sobre o grupo de caminhos é invariante pela ação de um sub-grupo denso. A natureza desse subgrupo não importa.

Isolemos a versão de mediabilidade seguinte. Digamos que um grupo topológico G é mediável no sentido de Malliavin–Malliavin, ou M-M mediável, se existe uma média sobre o espaço de funções borelianos e limitados sobre G , invariante pela ação de um subgrupo H denso de G à esquerda.

Essa propriedade implica que G é mediável (exercício 1.15). Para grupos localmente compactos, as duas propriedades são equivalentes (observação ??). Vários grupos topológicos de dimensão infinita possuem esta propriedade de ser M-M mediáveis, inclusive $U(\ell^2)$ com a topologia forte e $\text{Aut}(X, \mu)$ com a topologia fraca.

Até o momento quando comecei trabalhar sobre o meu minicurso, eu não tive dúvidas de que poderia facilmente construir um exemplo que distinguísse dois conceitos, ou seja, um grupo topológico (digamos, polonês) mediável, mas não M-M mediável. O candidato de grupo que tive em mente foi o grupo de bijeções de racionais que preservam a medida, $\text{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, com a topologia mais fraca tal que os estabilizadores de todos os pontos sejam sub-grupos abertos. (Este grupo é extremamente mediável, cada ação dele sobre um espaço compacto tem um ponto fixo [31]).

Porém, depois eu notei que mostrar que $\text{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ não é M-M mediável implicaria uma solução do famoso problema em aberto sobre o grupo (F) de Thompson sendo ou não mediável... então, pode ser um problema difícil. No entanto, não tenho outro candidato e não sei dizer se cada grupo topológico mediável será M-M mediável também.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S.A. Albeverio, R.J. Høegh-Krohn, J.A. Marion, D.H. Testard, B.S. Torrésani, *Noncommutative distributions. Unitary representation of gauge groups and algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **175**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.
- [2] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Anniversary Edition, John Wiley & Sons, 2012.
- [3] V.I. Bogachev, *Gaussian Measures*, Mathematical Surveys and Monographs **62**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [4] B. Brosowski, F. Deutsch, *An elementary proof of the Stone-Weierstrass theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), pp. 89–92.
- [5] A. Carey and H. Grundling, *On the problem of the amenability of the gauge group*, Lett. Math. Phys. **68** (2004), 113–120.
- [6] Z. Ciesielski, *On the isomorphisms of the spaces H_α and m* . Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **8** (1960), 217–222.
- [7] J. de Vries, *Elements of topological dynamics*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [8] P. Diaconis and D. Freedman, *A dozen de Finetti-style results in search of a theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **23** (1987), 397–423.

- [9] J.D. Dollard and C.N. Friedman, *Product integration with applications to differential equations*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979.
- [10] J.L. Doob, *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **143**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [11] Pierre Eymard, *Initiation à la théorie des groupes moyennables*, Lecture Notes in Math. **497**, Springer, Berlin, 1975, pp. 89–107.
- [12] H.C. Finlayson, *Approximation of Wiener integrals of functionals continuous in the uniform topology*, Pacific J. Math. **34** (1970), 61–71.
- [13] H.C. Finlayson, *Measurability of norm proved by Haar functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 334–336.
- [14] Thierry Giordano and Vladimir Pestov, *Some extremely amenable groups related to operator algebras and ergodic theory*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), 279–315.
- [15] E. Glasner e B. Weiss, *Spatial and non-spatial actions of Polish groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (2005), 1521–1538.
- [16] E. Glasner, B. Tsirelson and B. Weiss, *The automorphism group of the Gaussian measure cannot act pointwise*, Israel J. Math. **148** (2005), 305–329.
- [17] F.P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Reinhold Co., 1969.
- [18] R. Grigorchuk and P. de la Harpe, *Amenability and ergodic properties of topological groups: from Bogolyubov onwards*, in: Groups, graphs and random walks, 215–249, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **436**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2017.
- [19] L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 372–390.

- [20] L. Gross, *Abstract Wiener spaces*, in: Proc. 1967 Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1, pp. 31–42, Univ. California Press, Berkeley, Calif.
- [21] P.R. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea Publ. Co., New York, 1960.
- [22] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Third ed., Springer, Cham, 2021.
- [23] Hui Hsiung Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics **463**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [24] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.
- [25] M.-P. Malliavin and P. Malliavin, *Integration on loop group III. Asymptotic Peter–Weyl orthogonality*, J. Funct. Analysis **108** (1992), 13–46.
- [26] Michael Megrelishvili, *Topological group actions and Banach representations*, a versão preliminar do livro, <https://u.math.biu.ac.il/~megereli/>
- [27] Justin Tatch Moore, *A note on Shavgulidze’s papers concerning the amenability problem for Thompson’s group F* , arXiv:1102.0747v2 [math.GR].
- [28] H. Omori, *Infinite-dimensional Lie groups*, Translations of Mathematical Monographs, **158**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [29] J.C. Oxtoby, *Invariant measures in groups which are not locally compact*, Trans. Amer. Math. Soc. **60** (1946), 215–237.
- [30] R.S. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, W.A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1968.
- [31] V. Pestov, *Dynamics of Infinite-Dimensional Groups: The Ramsey–Dvoretzky–Milman Phenomenon*, University Lecture Series **40**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

- [32] Vladimir G. Pestov, *Elementos da teoria de aprendizagem automática supervisionada*, 488 + vii páginas, IMPA, Rio de Janeiro, 2019: https://impa.br/wp-content/uploads/2022/03/32CBM07_eBook.pdf
- [33] V. Pestov, *An amenability-like property of finite energy path and loop groups*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **358** (2020), no. 11-12, 1139–1155.
- [34] Ian Putnam, *Lecture notes on C^* -algebras*, University of Victoria, B.C., Canada, 2019, https://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf
- [35] Wulf Rossmann, *Lie groups. An Introduction Through Linear Groups*, Oxford University Press, 2002.
- [36] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- [37] Z. Semadeni, *Schauder bases in Banach spaces of continuous functions*, Lecture Notes in Mathematics **918**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [38] Daniel W. Stroock, *Gaussian measures in traditional and not so traditional settings*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **33** (1996), 135–155.
- [39] Gerald Teschl, *Topics in Real Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence (to appear).
<https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ra/ra.pdf>
- [40] Marcelo Viana e Krerley Oliveira, *Fundamentos da teoria ergódica*, Segunda ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2019.
- [41] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Corrected reprint of the 1985 original, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [42] André Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann & Cie, Paris, 1940.

