

A Matemática no

Jogo Torres de Hanóí

Débora Borges Ferreira
Edvan Pontes de Oliveira

$$f(n) = 2^n - 1$$
$$a_n = 2a_{n-1}$$



A Matemática no

Jogo

Torres

de Hanói

A Matemática no Jogo Torres de Hanói

Copyright ©2023 Débora Borges Ferreira e Edvan Pontes Oliveira

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98).

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice-Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita

Diretores: Walcy Santos, Jorge Herbert Soares de Lira, Daniel Gonçalves e Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Ronaldo Alves Garcia

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Coleção Coletâneas de Matemáticas

Comitê Editorial

Gregório Silva Neto e Marcelo Viana

Capa

Pablo Diego Regino

Editoração Eletrônica

Editora Pi

(21) 97636-9137 | <https://www.editorapi.com.br> | contato@editorapi.com.br

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico, 22460-320 Rio de Janeiro RJ

(21) 2529-5073 | <http://www.sbm.org.br> | lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-211-0

DOI <https://doi.org/10.21711/SBM/000005>

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ferreira, Débora Borges

A matemática no jogo de Torres de Hanói [livro eletrônico] / Débora Borges Ferreira, Edvan Pontes de Oliveira. – Rio de Janeiro : SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-85-8337-211-0

1. Jogos no ensino de matemática 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Matemática recreativa I. Oliveira, Edvan Pontes de. II. Título.

23-154604

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

A Matemática no

Jogo Torres de Hanói

Débora Borges Ferreira
Edvan Pontes de Oliveira

1ª edição
2023
Rio de Janeiro



AGRADECIMENTOS

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela avaliação e revisão desse livro.

Edvan Pontes agradece à esposa Camila Jordana e aos seus pais Francisca Pontes e Edmilson Ferreira.

Ao Heliton Martins Reis Filho (graduando em Química Computacional na UFMG) pela contribuição no LaTeX.

APRESENTAÇÃO

É possível se divertir com Matemática!

O presente e-book é resultado de uma parceria de trabalho que iniciou-se em 2019 com o meu Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, orientado pela professora Débora Borges Ferreira, intitulado *As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática através do Jogo Torres de Hanói*.

Para ler esse livro é preciso dominar matemática básica nos primeiros 5 capítulos. O conteúdo exigido é resumidamente o domínio de sequências numéricas: monótonas, oscilantes, progressões aritméticas, progressões geométricas e recursividade. Já o último capítulo, requer um conhecimento mais aprofundado, pois inclui topologia e análise.

O Capítulo 1 é fundamental para o entendimento de todo o livro, pois o foco é compreender as regras e objetivos do jogo. Além disso, exploramos um pouco da história do quebra-cabeça torres de Hanói. No Capítulo 2, apresentamos as sequências, suas definições, teoremas, proposições e exemplos. Nesse capítulo, não há aplicação direta com o *puzzles*, porém é necessário que o leitor domine os conceitos.

Caso o leitor tenha conhecimento prévio de sequências numéricas, recorrências e das torres de Hanói, recomendo a leitura a partir do Capítulo 3. Há muitos temas aplicados da matemática no jogo, possibilitando abordagens em sala de aula para o público do ensino médio. Já no Capítulo 5, são exploradas outras variações do quebra-cabeça, não tão populares como o clássico,

entretanto, para quem já está habituado ao jogo, potencializa a motivação de novos desafios. O Capítulo 6 mostra a relação do jogo com o Triângulo de Sierpinski.

Esperamos que o leitor se divirta com as Torres de Hanói, suas variações e curiosidades. Grande parte do livro é animado e para usufruir basta abrir no Adobe Acrobat Reader através de um notebook ou Computador Pessoal (PC).

Boa leitura!

Edvan Pontes de Oliveira
João Câmara, RN, 2022

PREFÁCIO

No ano de 2010, quando cursava o técnico subsequente e era monitor de Matemática no Instituto Federal do Rio Grande do Norte, IFRN, participei indiretamente de uma atividade aplicada em sala de aula sobre as Torres de Hanói que foi realizada nas turmas do 1^a ano do técnico integrado de informática. O professor aplicador dessa atividade era Francisco Quaranta Neto e foi nesse período que conheci esse jogo fantástico. A atividade continha perguntas simples que exploravam seus objetivos, entretanto a pergunta que mais chamou minha atenção foi como escrever uma função matemática que contasse o número mínimo de jogadas em função do número de peças do jogo. Três anos depois, fui convidado para participar do Projeto Espaço do Conhecimento, destinado a professores de matemática da rede municipal de Mossoró e Pendências (RN) onde uma das atividades aplicadas foi sobre, justamente, as Torres de Hanói.

Por vivências em salas de aula, é notável a dificuldade dos alunos expressarem ideias matemáticas no papel. Executam bem as tarefas, identificam padrões, porém ao tentar descrever esses padrões no *matemátiquês*, simplesmente travam. Diante disso, por que não explorar mais a Matemática elementar e tentar chegar à solução? Existem outras maneiras de resolvê-lo? Sempre existiram críticas em relação ao ensino da matemática com a falta de atividades práticas, entretanto a essência está na abstração, é a partir desta que chegamos a soluções práticas perfeitas.

Ao invés de pensar apenas na quantidade mínima de jogadas para vencer as Torres de Hanói, pensei em *qual disco é movido numa jogada qualquer? Quantas vezes um certo disco passou*

pelo pino inicial? Como seria o gráfico da função número de jogadas e número de peças? e etc. Fiz esboços sobre essas perguntas e tentei construir relações matemáticas, contudo sem rigor, o que era natural, porque cursava o ensino básico. Posteriormente, na graduação, não dei continuidade a esses estudos. Porém, em 2017, ao ingressar no mestrado em matemática, a ideia de escrever um texto com bases sólidas sobre o jogo floresceu.

A professora Débora Borges foi primordial na minha dissertação intitulada *As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática através do Jogo Torres de Hanói* e de outros trabalhos posteriores. Ao ser apresentada ao jogo e às minhas ideias de dissertação, não pensou duas vezes em aceitar. Se alguém me perguntasse o porquê da professora Débora ser uma companheira de trabalho ao longo desses 5 anos, afirmaria com convicção que é uma profissional que ama desafios. A verdadeira essência de um professor de matemática é sempre buscar novos desafios, é o combustível resolver problemas interessantes, sejam eles de qualquer nível.

Em 2020, publicamos o artigo *A Matemática da Ordem de Movimentação das Peças da Torre de Hanói* na revista portuguesa *Gazeta de Matemática* da Sociedade Portuguesa de Matemática. A seguir, no mesmo ano, publicamos o artigo *Torres de Hanói de 3 e 4 pinos: abordagens para o Ensino Básico* na revista *Professor de Matemática Online*, da SBM.

Após essas publicações, surgiu a ideia de escrevermos um e-book dissertando mais sobre o tema. Então, estendemos os estudos para variadas formas do jogo já conhecidas na literatura. Fizemos um apanhado bibliográfico de seus criadores e suas soluções, quando existem, e as descrevemos em detalhes. Adentramos também no estudo de fractais e grafos para mostrar curiosidades da Torre de Hanói e o Triângulo de Sierpinski.

PREFÁCIO

O diferencial do nosso livro, além do rigor matemático, são as animações em tex sendo possível a interação do leitor com o tópico abordado.

15 de dezembro de 2022

Os autores

SUMÁRIO

Apresentação	VII
Prefácio	IX
1 Entendendo o jogo clássico	1
1.1 Um pouco da história do jogo	1
1.2 Funcionamento do jogo	4
1.3 Estratégias para resolver o jogo com n discos . .	9
1.3.1 Estratégia pelo menor disco	10
1.3.2 Estratégia geral	11
Exercícios do Capítulo 1	13
2 Sequências Numéricas	15
2.1 Sequências monótonas	15
2.2 Progressões aritméticas e geométricas	19
2.3 Equações lineares recursivas	24
2.3.1 Equações lineares recursivas de ordem 1 .	25
2.3.2 Equações lineares recursivas de ordem 2 .	33
Exercícios do Capítulo 2	43
3 Quantidade mínima de jogadas	45
3.1 A Recorrência do Jogo	45
3.2 Modelagem matemática: que função “ a_n ” assume?	48
3.3 Progressão Geométrica	55
3.4 Número de vezes que um disco k vai para os pinos A , B ou C	58
Exercícios do Capítulo 3	64

4	Ordem de movimentação das peças	67
4.1	Sequência de duas variáveis	67
4.2	Números binários	78
4.3	Resto de divisão	82
4.4	Função parte inteira e configuração geral do jogo após parar na i -ésima jogada	85
	Exercícios do Capítulo 4	88
5	Algumas variações do jogo torres de Hanói	89
5.1	Torre de Hanói com quatro pinos	89
5.2	Torre de Hanói com m pinos	100
5.2.1	Solução apresentada por Kordrostami, Ah- madzadeh e Ghane	101
5.2.2	Solução de Frame-Stewart para m pinos .	105
5.2.3	Solução de Lu, Klavzar e Milutinovic para m pinos	110
5.3	Torre de Hanói cíclica	114
5.4	Torre de Hanói dupla	121
5.5	Torre de Hanói magnética	131
5.6	Torre de Hanói Caótica	137
5.7	Torre de Antuérpia	143
5.7.1	Pequena torre de Antuérpia	146
	Exercícios do Capítulo 5	148
6	A torre de Hanói e o triângulo de Sierpinski	151
6.1	Fractais	151
6.1.1	Curva ou triângulo de Sierpinski	156
6.1.2	Construção discreta do triângulo de Sier- pinski	161
6.2	Grafos	162
6.2.1	O problema das pontes de Königsberg . .	162

SUMÁRIO

6.2.2	O grafo da torre de Hanói	166
6.2.3	Sequência de grafos com vértices em TS	169
6.3	O triângulo de Sierpinski e a torre de Hanói	171
6.3.1	Distância média ou esperada entre pontos	173
6.3.2	Convergência em distância Hausdorff	180
Gabaritos Comentados		189
	Solução aos exercícios do Capítulo 1	189
	Solução aos exercícios do Capítulo 2	190
	Solução aos exercícios do Capítulo 3	192
	Solução aos exercícios do Capítulo 4	194
	Solução aos exercícios do Capítulo 5	195
Lista de Figuras		200
Lista de Tabelas		204
Bibliografia		206
Sobre os autores		217

ENTENDENDO O JOGO CLÁSSICO, SUAS REGRAS E ESTRATÉGIAS PARA VENCER

1.1 Um pouco da história do jogo

Hanói é uma bela cidade, capital da República Socialista do Vietname, vulgo Vietnã, foi ocupada por tropas francesas entre os anos de 1872 a 1882. Só em 1954, os franceses foram totalmente retirados de lá. Estava sempre nas manchetes dos jornais de Paris na época da ocupação, era um nome recorrente e muito comum. Hoje, mais famoso que a própria cidade é um quebra cabeças conhecido por Torres de Hanói, e a escolha do seu nome se deve à fama da cidade na época em que foi criado. Vamos conhecer um pouco sua história que foi retirada de [15].

Há no Museu das Artes e Ofício em Paris um quebra cabeças com 8 discos em madeira denominado Torres de Hanói, com data de 1883, e cuja patente é dada ao matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891). Acredita-se que seja o primeiro exemplar do jogo. O mesmo foi comercializado e popularizado rapidamente nos Estados Unidos e Reino Unido, inclusive aqui no Brasil há uma ampla variedade de fabricantes para todas as idades.

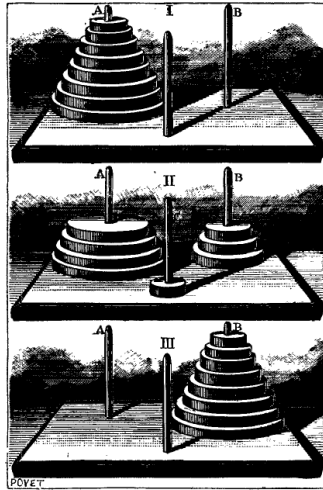


Figura 1.1: Ilustração da Torre de Hanói do século XIX

Em 1892, na obra *Récréations Mathématiques, Vol.III*, Lucas detalha o jogo e explica suas origens. Segundo ele, foi apresentado ao jogo pelo professor N. Claus, que na verdade era o seu pseudônimo quando trabalhava no colégio Observatório de Paris, Lycée Saint-Louis. Segundo ele, N. Claus conheceu o jogo em uma de suas viagens ao Vietnã, o mesmo lecionava no colégio Li-Si-Sou-Stian, que nada mais é que um anagrama de Lucas e Saint-Louis!!!

Lucas estimou o tempo necessário para resolver o quebra-cabeças considerando um movimento por segundo. Por curiosidade, ele cita um jogo com 64 discos, no qual são necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para vencê-lo, o que levaria bilhões de séculos para resolver sem pausas. Além disso, Lucas equiparou a solução matemática com um quebra-cabeça muito famoso da China, o Baguenaudier, que é um quebra-cabeça de desemaranhamento de anéis. Junto com o jogo, também é muito famosa a lenda por trás das Torres de Hanói:

§1.1. UM POUCO DA HISTÓRIA DO JOGO

No grande templo em Benares, Índia, abaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há três pinos de diamante fixados em uma placa de latão. Em um desses pinos, Deus colocou, no início dos tempos, sessenta e quatro discos de ouro puro, o maior apoiado no metal, e os outros, cada vez mais estreitos, sobrepostos um ao outro de forma crescente. É a torre sagrada de Brahma. Noite e dia, os sacerdotes se sucedem nos degraus do céu, ocupados carregando os discos do primeiro pino de diamante ao terceiro, sem se afastar das regras, e foram impostas por Brahma. Quando tudo estiver terminado, a torre de Benares se transformará em pó, e então será o fim dos mundo. [38]



Figura 1.2: Édouard Lucas

Segundo [11], logo após a descoberta do jogo, surgiram outras variações do desafio no início do século XX, dentre as quais falaremos aqui, no Capítulo 5, da torre com quatro pinos, cíclica, dupla, de Antuérpia, magnética e caótica. A mais famosa destas é a Torre de Hanói com quatro pinos.

Há muitas curiosidades envolvidas nesse jogo e trataremos algumas delas, por exemplo, no Capítulo 6, veremos a semelhança entre o Triângulo de Sierpinski e um grafo representando os possíveis movimentos dos discos da Torre, ver também em [1]. Para o caso clássico, isto é, a torre com três pinos proposta por Lucas, em uma solução do jogo utilizando a menor quantidade de movimentos possível, suponha que esta é interrompida em uma

jogada i , no Capítulo 4 ou em [13] ou [29] é descrita a configuração da torre nesse instante, isto é, em qual pino cada um dos discos estará. Mais curiosidades e detalhes sobre o assunto no livro [15].

1.2 Funcionamento do jogo

As Torres de Hanói são um quebra-cabeça composto por uma base e três pinos. Em um dos pinos há discos empilhados com diferentes tamanhos, em sequência do menor para o maior, como mostra a Figura 1.3.

O objetivo do jogo é transferir a pilha de discos do pino inicial, onde se encontra, para o pino livre na outra extremidade da base, usando as regras a seguir:

- apenas um disco pode ser movido por vez;
- nenhum disco pode ficar em cima de um de raio menor;
- apenas o disco do topo pode ser movido.

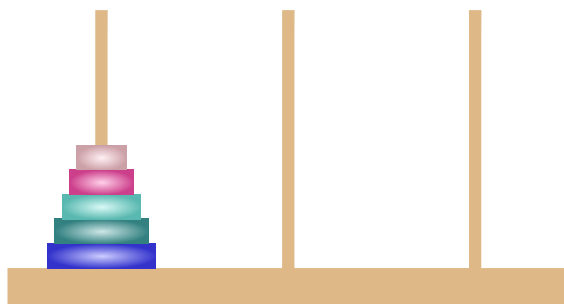


Figura 1.3: Torre de Hanoi com 5 discos

Identificaremos os pinos pelas letras A (pino da esquerda), B (pino intermediário) e C (pino da direita). Será usado números

§1.2. FUNCIONAMENTO DO JOGO

para diferenciar os discos (de 1 a n , número 1 para o menor e n para o maior disco). Para simbolizar o movimento realizado, é feita a combinação da representação do pino com o disco. Por exemplo, na figura a seguir o disco 1 foi movimentado para o pino C :

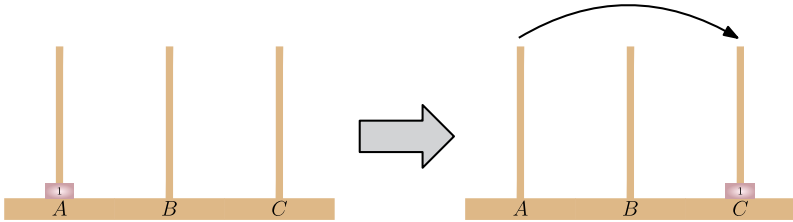


Figura 1.4: Solução com um disco

Agora, veja o mesmo movimento da forma animada:

Chamamos de S_1 a solução única para um disco e a representamos por: $S_1 = (1C)$.

Esse tipo de notação funciona como coordenadas, primeiro é identificado o disco (número do disco de acordo com o seu ta-

manho) e logo em seguida o pino de destino para onde queremos mover o disco (A , B ou C). A próxima figura apresenta outro exemplo, agora com dois discos, e uma possível solução:

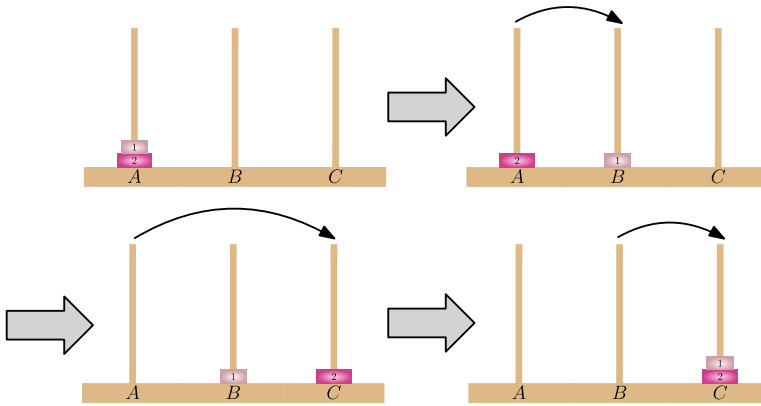


Figura 1.5: Solução com dois discos

Agora, veja a mesma solução animada:

§1.2. FUNCIONAMENTO DO JOGO

Chamamos de S_2 essa solução para dois discos. O disco 1 (menor disco), que estava no pino A , vai para o pino B ; o disco 2 é movido para o pino C ; o disco 1 para o pino C , totalizando três movimentos (quantidade mínima de movimentos). A solução utilizando o registro dos movimentos já mencionado é:

$$S_2 = (1B, 2C, 1C).$$

Observe que, nas soluções S_1 e S_2 seus elementos estão entre parênteses, isso acontece porque esses elementos representam uma sequência de movimentos e devem estar em ordem. Denotamos por S_n a solução do problema com n discos. A seguir, a solução animada para três discos, ou seja, S_3 . Veremos, no Capítulo 3, que essa solução é única.

Logo, $S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)$. O passo-a-passo dessa solução está na próxima figura:

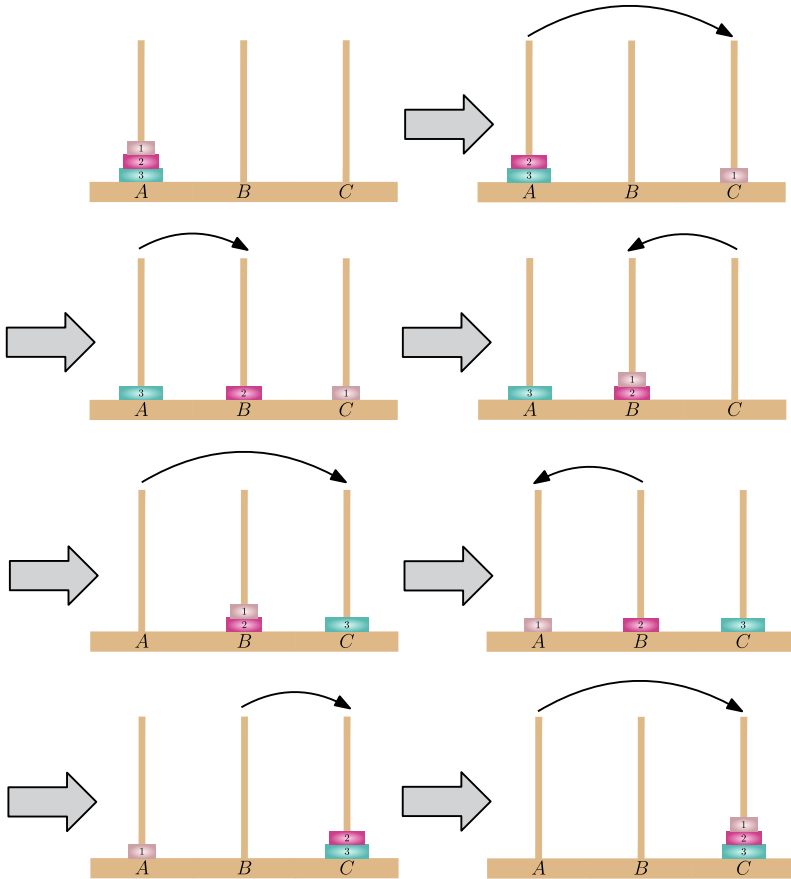


Figura 1.6: Solução com três discos

E se tivéssemos 4 discos? Nesse caso, uma solução seria:

$$S_4 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C).$$

Veremos uma animação com 4 discos seguida de outra com 5 discos:

1.3 Estratégias para resolver o jogo com n discos

Nesta seção veremos duas estratégias para vencer o jogo. A primeira, focada nos movimentos do menor disco, e a segunda, utilizando uma ideia mais geral do que a primeira.

1.3.1 Estratégia pelo menor disco

Uma estratégia para resolver a Torre de Hanói intuitivamente é saber onde o menor disco deve se mover nas primeiras jogadas. Vejamos possíveis soluções do jogo com até 5 discos, considerando o pino final da torre como o C :

$$S_1 = (1C)$$

$$S_2 = (1B, 2C, 1C)$$

$$S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C)$$

$$S_4 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C)$$

$$S_5 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C, 4B, 1B, 2A, 1A, 3B, 1C, 2B, \\ 1B, 5C, 1A, 2C, 1C, 3A, 1B, 2A, 1A, 4C, 1C, 2B, 1B, 3C, \\ 1A, 2C, 1C).$$

Observando as soluções anteriores e acreditando que essas executam a menor quantidade de movimentos, (provaremos isso no Capítulo 3) é possível notar um padrão referente à paridade com a primeira jogada do menor disco. Quando o total de discos é ímpar, o menor disco inicialmente vai para haste C , em seguida para haste B , por fim haste A , seguindo a sequência $(C, B, A, C, B, A, \dots, C)$. Caso o número de discos seja par, a sequência de movimentos muda. O menor disco inicialmente vai para haste B , depois para haste C , depois A , então a sequência fica $(B, C, A, B, C, A, \dots, B, C)$. Conhecendo o primeiro movimento do menor disco e sabendo que ele se movimenta alternadamente com os demais discos, podemos resolver o quebra cabeças de modo prático. Agora, já temos uma estratégia para resolver o problema da Torre com n discos.

Uma outra estratégia é sempre mover o menor disco para o pino intermediário B , independentemente da paridade do total de discos. Nessa estratégia, o pino destino para finalização do

§1.3. ESTRATÉGIAS PARA RESOLVER O JOGO COM n DISCOS

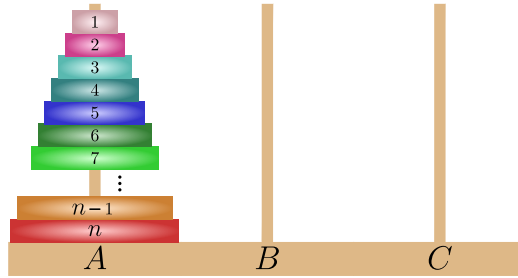


Figura 1.7: Torre de Hanói com n discos

jogo varia entre o pino B e C .

$$S_1 = (1B)$$

$$S_2 = (1B, 2C, 1C)$$

$$S_3 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B)$$

$$S_4 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C).$$

Nesse caso, a menor peça sempre segue uma mesma sequência de movimentos para os pinos (B, C, A) .

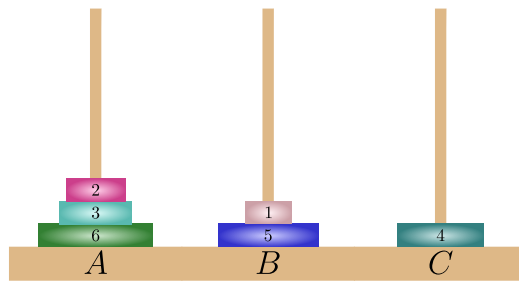
1.3.2 Estratégia geral

Como o objetivo do jogo é transferir os n discos para o pino C , então devemos primeiro transferir os $n - 1$ discos para o pino intermediário B , assim o maior disco de tamanho n ficará livre para ir para o pino C . Em seguida, transferiremos os $n - 2$ menores discos para o pino A , logo o disco de tamanho $n - 1$ ficará livre para ir para o pino C , e assim sucessivamente. Veja um exemplo para 3 discos:

Podemos reduzir o problema principal (resolver o jogo com n discos) em problemas menores, ou seja, a ideia é resolver por etapas. Agora veja uma solução com 4 discos:

Exercícios do Capítulo 1

- 1.1. Resolva o quebra cabeças para uma torre com 5 discos usando a estratégia de transferir o primeiro disco para o pino B .
- 1.2. Suponha que você encontra a torre distribuída assim:



Como você terminaria de resolver o problema? Será a melhor solução?

- 1.3. Dada uma torre com 3 discos empilhados na haste A , é possível transferir esses discos para outra haste de modo que a quantidade de movimentos seja qualquer número natural? Há alguma limitação para essa quantidade?

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Os tópicos abordados nesse capítulo aparecerão ao longo da leitura no livro. Trataremos, de forma iniciante, temas relacionados a sequências numéricas: monótonas, oscilantes, progressões aritméticas, progressões geométricas e recursividade. Caso o leitor já esteja familiarizado com esse assunto, sugerimos que desconsidere esse capítulo.

2.1 Sequências monótonas

Uma sequência numérica é uma função com domínio no conjunto dos naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e imagem no conjunto dos números reais, nos restringiremos a esse caso:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Usualmente, se escreve $f(n) = x_n$, e, para simplificar a notação, representamos essas funções por

$$(x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots).$$

2.1. DEFINIÇÃO.

Denominamos uma sequência (x_n) de monótona quando seus termos estão ordenados de uma das formas a seguir:

- não-decrescente: $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$

- crescente: $x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$
 - não-crescente: $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$
 - decrescente: $x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots$
 - constante: $x_0 = x_1 = \dots = x_n = \dots$
-

Há sequências que possuem uma forma fechada, isto é, há uma expressão algébrica que caracteriza seu termo geral e a define. Há várias outras que não.

2.2. EXEMPLO.

A sequência dos números pares positivos é crescente e tem termo geral com forma fechada

$$x_n = 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$(x_n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots).$$

2.3. EXEMPLO.

Uma das sequências mais famosas e intrigantes é a sequência de Fibonacci. Lucas, o criador do jogo Torres de Hanói clássico, gostava muito de estudar essa sequência numérica. A sequência é crescente e:

$$(x_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots).$$

§2.1. SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

Seu termo geral espantosamente é

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2.4. EXEMPLO.

A seqüência crescente formada por todos os números da forma $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, é conhecida por números de Fermat:

$$(3, 5, 17, 257, 65537, \dots).$$

Fermat, em 1640, propôs que esse conjunto de números era composto apenas por primos. Mas, quase 100 anos depois, Leonard Euler mostrou que o sexto termo da seqüência não era primo:

$$2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6700417.$$

2.5. EXEMPLO.

A seqüência formada por todos os números primos não tem ainda uma forma fechada definida.

Há seqüências cujo domínio é um subconjunto dos números naturais, nesse caso, é preciso especificar quem é o domínio.

2.6. EXEMPLO.

A seqüência dos números de Mersenne tem termo geral

$$x_p = 2^p - 1, \text{ para todo } p \text{ primo.}$$

Assim,

$$(x_p)_{p \text{ primo}} = (3, 7, 31, 127, \dots).$$

2.7. EXEMPLO.

Uma sequência numérica pode ser definida por partes, ou seja, para alguns valores de n ela possui certa expressão algébrica, e para os demais, outra expressão. Por exemplo,

$$x_n = \begin{cases} 2^n - 1, & n \text{ par} \\ 2^n, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim,

$$(x_n) = (0, 2, 3, 8, 15, 32, 63, \dots).$$

Há muitas sequências que não são monótonas, ou seja, seus termos não estão todos ordenados.

2.8. EXEMPLO.

A sequência com termo geral

$$x_n = (-1)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

não é monótona, recebe o nome de oscilante pois seus termos variam entre positivos e negativos, e

$$(x_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

2.9. EXEMPLO.

A sequência com termo geral

$$x_n = 3(-2)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

não é uma sequência monótona e sim oscilante:

$$(x_n) = (3, -6, 12, -24, \dots).$$

2.2 Progressões aritméticas e geométricas

2.10. DEFINIÇÃO.

Uma sequência numérica (x_n) é chamada de progressão aritmética quando a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante c , $c \in \mathbb{R}$, c é chamado de razão da progressão, isto é,

$$x_{n+1} - x_n = c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2.11. PROPOSIÇÃO.

O termo geral de uma progressão aritmética qualquer (x_n) , com razão c , tem a forma

$$x_n = x_0 + nc.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Pela definição de progressão aritmética:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + c \\x_2 &= x_1 + c \\&\vdots \\x_n &= x_{n-1} + c.\end{aligned}$$

Somando os membros do lado esquerdo da igualdade, somando os membros do lado direito e igualando-os, obtemos:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_0 + c + x_1 + c + \dots + x_{n-1} + c,$$

eliminando os que aparecem nos dois lados da igualdade temos:

$$x_n = x_0 + nc.$$

2.12. EXEMPLO.

A sequência

$$(x_n) = (3, 6, 9, 12, 15, \dots)$$

é uma progressão aritmética com razão 3. Seu termo geral é

$$x_n = 3 + 3n.$$

2.13. TEOREMA.

A soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética (x_n) de razão c é

§2.2. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{(x_0 + x_{n-1}) \cdot n}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Observe que se n é par, a soma $\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ possui um número par de termos, e a soma dos pares equidistantes das extremidades são iguais, isto é,

$$\begin{aligned} x_0 + x_{n-1} = x_1 + x_{n-2} = x_2 + x_{n-3} = \dots = & x_{n/2-1} + x_{n/2} \\ & = 2x_0 + (n-1)c. \end{aligned}$$

Logo, temos $\frac{n}{2}$ pares cuja soma de seus termos são iguais. Assim,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{n}{2}(x_0 + x_{n-1}).$$

Se n fosse ímpar, então teríamos $\frac{n-1}{2}$ pares cuja soma dos termos é igual a $x_0 + x_{n-1}$ e o termo central $x_{\frac{n-1}{2}} = x_0 + \frac{n-1}{2}c$. Então

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= \frac{n-1}{2}(x_0 + x_{n-1}) + x_0 + \frac{n-1}{2}c \\ &= \frac{n}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{n-1}{2}c + \frac{n-1}{2}x_{n-1} \\ &= \frac{n}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{n-1}{2}x_{n-1} \\ &= \frac{n}{2}(x_0 + x_{n-1}). \end{aligned}$$

2.14. DEFINIÇÃO.

Uma sequência numérica (x_n) é chamada de progressão geométrica quando o quociente entre dois termos consecutivos é sempre constante c , isto é,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esse $c \in \mathbb{R}$ é chamado de razão.

2.15. PROPOSIÇÃO.

O termo geral de uma progressão geométrica qualquer (x_n) , de razão c , $c \in \mathbb{R}$, tem a forma

$$x_n = x_0 \cdot c^n.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Pela definição de progressão geométrica:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cdot c \\x_2 &= x_1 \cdot c \\&\vdots \\x_n &= x_{n-1} \cdot c.\end{aligned}$$

Agora, multiplique todos os membros do lado esquerdo e iguale ao produto dos membros do lado direito:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = x_0 \cdot c \cdot x_1 \cdot c \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot c,$$

cancelando os termos iguais temos $x_n = x_0 \cdot c^n$.

2.16. EXEMPLO.

A sequência

$$(x_n) = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

tem a forma de uma progressão geométrica com razão 3. Seu termo geral é

$$x_n = 3^n.$$

2.17. TEOREMA.

A soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica (x_n) de razão c é

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = x_0 \frac{(1 - c^n)}{1 - c}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Denomine por S_n a soma procurada:

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \\ &= x_0 + x_0 \cdot c + \dots + x_0 \cdot c^{n-1} \\ &= x_0 + c \cdot (x_0 + x_0 \cdot c + \dots + x_0 \cdot c^{n-2}) \\ &= x_0 + c \cdot S_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $S_n = S_{n-1} + x_0 \cdot c^{n-1}$, então $S_{n-1} = S_n - x_0 \cdot c^{n-1}$, por conseguinte

$$S_n = x_0 + c \cdot \underbrace{(S_n - x_0 \cdot c^{n-1})}_{S_{n-1}},$$

daí,

$$S_n(1 - c) = x_0 - c \cdot (x_0 \cdot c^{n-1}) = x_0 \cdot (1 - c^n),$$

logo

$$S_n = x_0 \frac{1 - c^n}{1 - c}.$$

2.3 Equações lineares recursivas

Ao longo do texto, principalmente do Capítulo 5, nos depararemos com um tipo de equação denominada recursiva, portanto, dedicamos essa seção à resolução dessas equações, mas nos restringiremos a alguns casos de interesse. Tudo que será feito aqui se encontra em [27].

Seja (x_n) uma sequência numérica que desejamos encontrar seu termo geral. Suponha que existe uma relação entre seus elementos da seguinte forma:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (2.2)$$

para algum $k \leq 1$ e alguma função f . Essa expressão (2.2) é denominada de *equação recursiva ou recorrente de ordem k* . Nesse livro, aparecerão apenas os casos em que f é função de primeiro grau e depende de x_{n-1} ou de x_{n-2} .

2.3.1 Equações lineares recursivas de ordem 1

2.18. DEFINIÇÃO.

Seja (x_n) uma sequência numérica, se

$$x_n = f(x_{n-1}), \text{ para } n \geq 1,$$

onde f é uma função polinomial de primeiro grau, isto é, $f(x)$ tem a forma $a_n x + b_n$, onde (a_n) e (b_n) são sequências quaisquer, $a_n \neq 0$ para algum n , então:

$$x_n = a_n x_{n-1} + b_n. \quad (2.3)$$

Dizemos que (2.3) é uma equação linear recursiva de ordem 1. Quando $b_n = 0$, para todo n , ela recebe mais um nome extra: homogênea. Nos casos em que $b_n \neq 0$ para algum n , será chamada de não-homogênea.

2.19. EXEMPLO.

Em toda progressão geométrica (x_n) a relação entre seus termos consecutivos é uma equação linear recursiva de ordem 1 homogênea:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = c \Rightarrow x_{n+1} = c \cdot x_n, \quad n \geq 0,$$

portanto

$$x_n = c x_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Logo, por (2.3) temos que $a_n = c$ e $b_n = 0$, para todo $n \geq 0$.

Iniciamos resolvendo equações lineares recursivas de ordem 1 homogêneas:

2.20. TEOREMA.

Se (x_n) é uma sequência que satisfaz a equação linear recursiva de ordem 1 homogênea do tipo

$$x_{n+1} = a_n x_n,$$

então

$$x_n = \prod_{k=0}^{n-1} a_k x_0 = a_0 a_1 \dots a_{n-1} x_0.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Temos que

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0 \\ x_2 &= a_1 x_1 \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n-1} x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando todos os membros do lado esquerdo da igualdade e igualando com o produto do membros do lado direito, obtemos

$$x_1 x_2 \dots x_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1} x_0 x_1 \dots x_{n-1},$$

cancelando os fatores iguais, obtemos

$$x_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1} x_0.$$

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

2.21. EXEMPLO.

Vimos no Exemplo 2.19, que toda relação entre termos consecutivos de uma progressão geométrica é recursiva homogênea de ordem 1. Nesse caso, (a_n) é uma sequência constante igual a c , segundo o Teorema 2.20, seu termo geral deve ser

$$x_n = c^n \cdot x_0 = x_0 \cdot c^n.$$

2.22. EXEMPLO.

Se $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_0 = 1$, seu termo geral x_n tem a forma

$$x_n = 2^n \cdot 1 = 2^n.$$

Agora, o caso não-homogêneo:

2.23. TEOREMA.

Se (x_n) é uma sequência que satisfaz a equação linear recursiva de ordem 1 não-homogênea do tipo

$$x_{n+1} = x_n + b_n,$$

então

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k = x_0 + b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Nesse caso

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + b_0 \\x_2 &= x_1 + b_1 \\&\vdots \\x_n &= x_{n-1} + b_{n-1}.\end{aligned}$$

Somando todos os membros do lado esquerdo da igualdade e igualando com o somatório do lado direito, obtemos

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} + b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1},$$

cancelando os termos iguais, obtemos

$$x_n = x_0 + b_0 + \dots + b_{n-1}.$$

2.24. EXEMPLO.

Seja (x_n) uma progressão aritmética com $x_{n+1} - x_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$. Seu termo geral deve ser encontrado levando em consideração que $b_n = c$, para todo n , segundo o teorema anterior. Então $x_n = x_0 + nc$.

2.25. EXEMPLO.

Seja $c_n = c_{n-1} + 2^{n+1}$, com $c_1 = 3$. Vamos encontrar uma expressão para c_n . Como não temos o valor de c_0 , iniciamos com $c_2 = c_1 + 2^3$, como na demonstração do teorema anterior:

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

$$\begin{aligned}c_2 &= c_1 + 2^3 \\c_3 &= c_2 + 2^4 \\&\vdots \\c_n &= c_{n-1} + 2^{n+1}\end{aligned}$$

Cancelando os termos iguais:

$$c_n = c_1 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1} = 3 + 2^3 \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1},$$

donde

$$c_n = 2^{n+2} - 5.$$

2.26. EXEMPLO.

Seja $x_{n+1} = x_n + 2^{k_n}$, para alguma sequência (k_n) . Segundo o teorema anterior:

$$x_n = x_0 + 2^{k_0} + 2^{k_1} + \dots + 2^{k_{n-1}}.$$

2.27. TEOREMA.

Se (x_n) é uma sequência que satisfaz a equação linear recursiva de ordem 1 não-homogênea do tipo

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \tag{2.4}$$

então $x_n = h_n y_n$, onde h_n é uma solução não-nula qualquer da parte homogênea de (2.4), isto é,

$$h_{n+1} = a_n h_n,$$

e y_n é solução de

$$y_{n+1} = y_n + \frac{b_n}{a_n h_n}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Temos que h_n é solução de $x_{n+1} = a_n x_n$, logo $h_{n+1} = a_n h_n$. Fazendo a substituição $x_n = h_n y_n$ em (2.4), temos

$$h_{n+1} y_{n+1} = a_n h_n y_n + b_n \Rightarrow a_n h_n y_{n+1} = a_n h_n y_n + b_n,$$

logo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{b_n}{a_n h_n}.$$

A ideia desse resultado é resolver equações mais complicadas como (2.4) usando as que conseguimos resolver com mais facilidade, que são as homogêneas. Vejamos um exemplo para entender melhor.

2.28. EXEMPLO.

Seja (x_n) uma sequência que satisfaz $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_0 = 0$. Para encontrar x_n observe que essa recursão é do tipo (2.4) para $a_n = 2$ e $b_n = 1$, para todo n . A solução é $x_n = h_n y_n$, onde h_n é solução de

$$x_{n+1} = 2x_n,$$

que é, segundo o Teorema 2.20, igual a $h_n = 2^n c$, $c \in \mathbb{R}$. Observe que existem várias soluções para o problema, arbitrariamente

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

escolhemos uma, por exemplo $c = 1$, então $h_n = 2^n$. Agora, faremos a substituição $x_n = h_n y_n = 2^n y_n$ na equação do problema:

$$2^{n+1}y_{n+1} = 2 \cdot 2^n y_n + 1 \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Segundo o Teorema 2.23,

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= y_0 + \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \\ &= y_0 + 1 - (1/2)^n. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$x_n = 2^n y_n = 2^n (y_0 + 1 - (1/2)^n) = y_0 2^n + 2^n - 1.$$

Vamos determinar o valor de y_0 . Como $x_0 = 0$ e $x_n = 2^n y_n$, então $x_0 = 0 = 2^0 y_0 = y_0$, então $y_0 = 0$ também. Finalizando:

$$x_n = 2^n - 1.$$

Uma solução geral para o caso $a_n = a$ e $b_n = b$, para todo n , é proposta a seguir.

2.29. PROPOSIÇÃO.

Seja (x_n) uma sequência que satisfaz $x_{n+1} = ax_n + b$, sua forma fechada, para $x_0 = c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, é

$$x_n = ca^n + \frac{b}{a-1} (a^n - 1).$$

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiro, encontraremos uma solução qualquer de

$$x_{n+1} = ax_n,$$

que é segundo o Teorema 2.20 igual a, por exemplo, $h_n = a^n$.

Agora, faremos a substituição $x_n = h_n y_n = a^n y_n$ na equação do problema:

$$a^{n+1} y_{n+1} = a \cdot a^n y_n + b \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{b}{a^{n+1}}.$$

Segundo o Teorema 2.23,

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \dots + \frac{b}{a^n} \\ &= y_0 + \frac{b}{a} \frac{1 - (1/a)^n}{1 - 1/a} \\ &= y_0 + \frac{b}{a-1} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} x_n &= a^n y_n \\ &= a^n \left(y_0 + \frac{b}{a-1} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \right) \\ &= y_0 a^n + \frac{b}{a-1} (a^n - 1). \end{aligned}$$

Vamos determinar o valor de y_0 . Como $x_0 = c$ e $x_0 = h_0 y_0 = 1 \cdot c = c$, então $y_0 = c$, finalizando:

$$x_n = ca^n + \frac{b}{a-1} (a^n - 1).$$

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

Observe que a escolha de h_n não altera a solução. Se escolhermos $h_n = 2a^n$, por exemplo, então $x_n = 2a^n y_n$, substituindo em $x_{n+1} = ax_n + b$:

$$2a^{n+1}y_{n+1} = a2a^n y_n + b \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{b}{2a^{n+1}},$$

logo

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a^2} + \dots + \frac{b}{2a^n} \\ &= y_0 + \frac{b}{2(a-1)} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right). \end{aligned}$$

Como $x_0 = c = h_0 y_0 = 2a^0 y_0$, então $y_0 = \frac{c}{2}$. E assim,

$$x_n = 2a^n \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{2(a-1)} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \right) = ca^n + \frac{b}{a-1} (a^n - 1).$$

Resolvemos até aqui todos os tipos de equações recursivas lineares de ordem 1. Agora, veremos apenas alguns tipos das recursivas de ordem 2 que são do nosso interesse.

2.3.2 Equações lineares recursivas de ordem 2

As recursividades lineares de ordem 2 são aquelas do tipo

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2})$$

para f uma função polinomial de grau 1, isto é,

$$x_n = a_n x_{n-2} + b_n x_{n-1} + c_n,$$

e (a_n) , (b_n) e (c_n) são seqüências numéricas quaisquer, $a_n \neq 0$ para algum n .

Começaremos pelo caso mais simples que é a_n e b_n constantes, e $c_n = 0$, para todo n .

2.30. TEOREMA.

Se (x_n) é uma sequência que satisfaz a equação linear recursiva de ordem 2 do tipo

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad (2.5)$$

e $a^2 + 4b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

é a única solução de (2.5) para quaisquer C_1 e C_2 reais e r_1, r_2 raízes de $r^2 - ar - b = 0$.

DEMONSTRAÇÃO.

O problema (2.5) parece bem mais difícil que as recursões de ordem 1 já vistas até aqui. É natural imaginarmos que uma solução de uma equação recursiva de ordem 1 talvez possa nos ajudar a chegar na solução da equação de ordem 2. A equação recursiva de ordem 1 mais parecida é $x_n = ax_{n-1}$, cuja solução é $x_n = a^n$. Então, será que a solução de (2.5) não seria do tipo r^n , para algum $r \in \mathbb{R}$? Se sim, vamos tentar fazer a substituição:

$$r^n = ar^{n-1} + br^{n-2} \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - ar - b) = 0,$$

queremos achar o $r \neq 0$, assim $r^2 - ar - b = 0$, logo $r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$. Por hipótese, $a^2 + 4b > 0$, então temos 2 raízes reais distintas r_1 e r_2 . E r_1^n e r_2^n são soluções de (2.5). É fácil mostrar que $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução de (2.5) também para quaisquer C_1 e C_2 reais:

$$\begin{aligned} C_1 r_1^n + C_2 r_2^n &= a(C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}) + b(C_1 r_1^{n-2} + C_2 r_2^{n-2}) \\ \Rightarrow C_1 r_1^n + C_2 r_2^n - a(C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}) - b(C_1 r_1^{n-2} + C_2 r_2^{n-2}) &= 0 \\ \Rightarrow C_1 r_1^{n-2}(r_1^2 - ar_1 - b) + C_2 r_2^{n-2}(r_2^2 - ar_2 - b) &= 0, \end{aligned}$$

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

todos os parênteses são nulos, pois r_1 e r_2 são raízes de $r^2 - ar - b = 0$.

Na verdade, essa é a única solução de (2.5). Se y_n é outra solução qualquer com valores iniciais y_1 e y_2 fixados, mostraremos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para alguns C_1 e C_2 . O modo padrão desse tipo de prova é: seja $z_n = y_n - x_n$, para x_n a solução apresentada anteriormente, mostraremos que $z_n = 0$ para todo n .

Primeiro, veremos que z_n satisfaz (2.5):

$$\begin{aligned} az_{n-1} + bz_{n-2} &= a(y_{n-1} + x_{n-1}) + b(y_{n-2} + x_{n-2}) \\ &= ay_{n-1} + by_{n-2} + ax_{n-1} + bx_{n-2} \\ &= y_n + x_n \\ &= z_n. \end{aligned}$$

Agora, $z_1 = y_1 - x_1$, $z_2 = y_2 - x_2$, como $x_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2$ e $x_2 = C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2$, para quaisquer C_1 e C_2 , escolha-os tais que $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, então $z_1 = z_2 = 0$. Logo, $z_3 = z_4 = \dots = 0$.

2.31. EXEMPLO.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência que satisfaz $x_n = 2x_{n-2}$, encontramos uma forma fechada para x_n .

Esse problema está na forma (2.5) para $a = 0$ e $b = 2$. Como $0^2 + 4.2 = 8 > 0$, então $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para r_1, r_2 raízes de $r^2 - 2 = 0$, que são $r_1 = \sqrt{2}$ e $r_2 = -\sqrt{2}$. Logo,

$$x_n = C_1 (\sqrt{2})^n + C_2 (-\sqrt{2})^n.$$

2.32. EXEMPLO.

Na sequência de Fibonacci (x_n) seus termos têm a propriedade

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$

logo, é uma equação linear recursiva de ordem 2. Encontraremos uma forma fechada para x_n usando o resultado anterior para $a = 1$ e $b = 1$.

Como $1^2 + 4 \cdot 1 = 5 > 0$, então $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para r_1, r_2 raízes de $r^2 - r - 1 = 0$, que são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo,

$$x_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Como $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, então $C_1 + C_2 = 0$ e $C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$. Logo, $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, e

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

2.33. TEOREMA.

Se (x_n) é uma sequência que satisfaz a equação linear recursiva de ordem 2 do tipo

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \tag{2.6}$$

e $a^2 + 4b = 0$, então

$$x_n = (C_1 + nC_2) \left(\frac{a}{2} \right)^n$$

é a única solução de (2.6) para quaisquer C_1 e C_2 reais.

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

DEMONSTRAÇÃO.

Veremos que $x_n = (C_1 + nC_2) \left(\frac{a}{2}\right)^n$ satisfaz (2.6):

$$ax_{n-1} + bx_{n-2} = a(C_1 + (n-1)C_2) \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + b(C_1 + (n-2)C_2) \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}$$

como $b = -\frac{a^2}{4}$, então

$$\begin{aligned} ax_{n-1} + bx_{n-2} &= \left(\frac{a}{2}\right)^n (2C_1 + 2C_2n - 2C_2) \\ &\quad - \left(\frac{a}{2}\right)^n (C_1 + C_2n - 2C_2) \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^n (C_1 + nC_2n) \\ &= x_n. \end{aligned}$$

A prova da unicidade da solução é exatamente igual à do teorema anterior.

Para concluir o capítulo, estudaremos o caso não-homogêneo das equações lineares recursivas de ordem 2 com coeficientes constantes.

2.34. TEOREMA.

Se (x_n) é uma sequência que satisfaz a equação linear recursiva de ordem 2 não-homogênea do tipo

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c_n, \quad (2.7)$$

então x_n pode ser decomposta em duas partes:

$$x_n = h_n + p_n$$

para h_n solução de $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, e p_n uma solução particular qualquer de (2.7).

DEMONSTRAÇÃO.

Mostraremos que $x_n = h_n + p_n$ é solução de (2.7):

$$\begin{aligned} ax_{n-1} + bx_{n-2} + c_n &= a(h_{n-1} + p_{n-1}) + b(h_{n-2} + p_{n-2}) + c_n \\ &= (ah_{n-1} + bh_{n-2}) + (ap_{n-1} + bp_{n-2} + c_n), \end{aligned}$$

o primeiro parêntese vale h_n conforme o enunciado do teorema. O segundo parêntese vale p_n pois é uma solução particular qualquer de (2.7). Assim,

$$ax_{n-1} + bx_{n-2} + c_n = h_n + p_n = x_n.$$

Essa decomposição é sempre válida, vejamos: seja y_n uma solução qualquer de (2.7) e p_n uma solução particular qualquer, isto é, $p_n = ap_{n-1} + bp_{n-2} + c_n$. Então $y_n - p_n$ é solução de $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, pois

$$\begin{aligned} &a(y_{n-1} - p_{n-1}) + b(y_{n-2} - p_{n-2}) \\ &= ay_{n-1} + by_{n-2} - ap_{n-1} - bp_{n-2} \\ &= ay_{n-1} + by_{n-2} + c_n - ap_{n-1} - bp_{n-2} - c_n \\ &= y_n - p_n. \end{aligned}$$

Logo, $h_n = y_n - p_n$ e $y_n = h_n + p_n$.

2.1. OBSERVAÇÃO.

Essa solução particular para a recursividade (2.7) é obtida da parte não-homogênea c_n . É intuitivo esperar que a natureza

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

dessa solução particular seja a mesma de c_n , então supõe-se que um caso geral da parte não-homogênea seja a solução e substitui-se na equação recursiva inicial para encontrar a tal solução particular. Vejamos algumas situações:

- $c_n = n^3$, então espera-se que $p_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$, substitui-se em (2.7) e obtém-se os valores de A, B, C e D ;
- $c_n = n \sin(n)$, então colocaríamos $p_n = (An + B)(\sin(n) + \cos(n))$;
- Pode ocorrer que o p_n suposto não seja solução da equação recursiva em questão, nesse caso, faz-se alterações como aumentar o grau do polinômio sugerido para solução particular.

2.35. EXEMPLO.

Seja (y_n) uma sequência tal que $y_n = 2y_{n-2} + 3$, $y_1 = 1$ e $y_2 = -3$. Calcularemos y_n .

Encontraremos primeiro h_n , solução de $y_n = 2y_{n-2}$. A equação do segundo grau relacionada a esse problema é $r^2 - 2 = 0$, logo $r = \sqrt{2}$ ou $r = -\sqrt{2}$. Assim,

$$h_n = C_1(\sqrt{2})^n + C_2(-\sqrt{2})^n.$$

Agora, encontraremos uma solução particular para o problema. Veja que a parte não homogênea da recorrência é igual a 3, assim, a primeira coisa que se imagina sobre a natureza de uma solução particular para a equação é que essa seja uma constante qualquer C , isto é, $p_n = C$, vamos determiná-la.

$$p_n = 2p_{n-2} + 3 = 2C + 3 = C \Rightarrow C = -3.$$

Logo,

$$y_n = C_1(\sqrt{2})^n + C_2(-\sqrt{2})^n - 3.$$

Agora, determinaremos C_1 e C_2 usando as condições iniciais $y_1 = 1$ e $y_2 = -3$:

$$y_1 = C_1\sqrt{2} + C_2(-\sqrt{2}) - 3 = 1$$

e

$$y_2 = 2C_1 + 2C_2 - 3 = -3,$$

da segunda informação temos $C_1 = -C_2$, substituindo na primeira informação: $C_1\sqrt{2} - C_1(-\sqrt{2}) = 4$ logo, $C_1 = \sqrt{2}$ e $C_2 = -\sqrt{2}$.

2.36. EXEMPLO.

Seja (x_n) uma sequência tal que $x_{n+2} = x_n + 2$. Encontraremos x_n .

Primeiro, seja h_n solução de $x_{n+2} = x_n$, precisamos de r solução de $r^2 - 1 = 0$, assim $r = 1$ ou $r = -1$. Logo,

$$h_n = C_1 + C_2(-1)^n.$$

A solução particular deve ser de mesma natureza da parte não-homogênea 2. Então, supõe-se que $p_n = C$, vamos determiná-la:

$$p_{n+2} = p_n + 2 = C + 2 = C \Rightarrow 2 = 0,$$

um absurdo! Logo, precisamos alterar nossa proposta de p_n . Suponha agora que $p_n = An + B$, então

$$A(n+2) + B = An + B + 2 \Rightarrow An + 2A + B = An + B + 2,$$

§2.3. EQUAÇÕES LINEARES RECURSIVAS

logo, $A = 1$ e $B \in \mathbb{R}$. A escolha de B é arbitrária, tome $B = 1$, então $p_n = n + 1$. A solução será $x_n = C_1 + C_2(-1)^n + n + 1$.

2.37. EXEMPLO.

Seja (d_n) uma sequência tal que $d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2} + n$, encontraremos d_n .

Primeiro, d_n é solução de $d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2}$. A equação do segundo grau relacionada a esse problema é $r^2 - 2r - 2 = 0$, logo $r = 1 + \sqrt{3}$ ou $r = 1 - \sqrt{3}$. Assim,

$$h_n = C_1(1 + \sqrt{3})^n + C_2(1 - \sqrt{3})^n.$$

Agora, encontraremos uma solução particular para o problema. A parte não homogênea da recorrência é igual a n , assim, é de se esperar que uma solução para a equação seja uma polinomial do tipo $An + B$, isto é, $p_n = An + B$, vamos determiná-la.

$$\begin{aligned} p_n &= 2p_{n-1} + 2p_{n-2} + n \\ &= 2(A(n-1) + B) + 2(A(n-2) + B) + n \\ &= An + B, \end{aligned}$$

logo

$$An + B = 4An + n - 6A + 4B = (4A + 1)n - 6A + 4B,$$

igualando os coeficientes: $A = 4A + 1 \Rightarrow A = -1/3$ e $B = -6A + 4B \Rightarrow B = -2/3$. Portanto,

$$y_n = C_1(1 + \sqrt{3})^n + C_2(1 - \sqrt{3})^n - n/3 - 2/3.$$

2.2. OBSERVAÇÃO.

Uma situação que pode surgir é a solução particular coincidir com a solução da parte homogênea. Nesse caso, devemos propor que a solução particular seja uma generalização da parte não-homogênea multiplicada por uma polinomial, altera-se até encontrar a solução particular.

2.38. EXEMPLO.

Seja $x_{n+2} = 4x_n + 2^n$. Encontremos x_n .

A homogênea associada a esse problema é $h_{n+2} = 4h_n$, cuja solução é

$$h_n = C_1 2^n + C_2 (-2)^n.$$

A parte não-homogênea é 2^n , e esta já aparece na solução homogênea! Então, propomos que $p_n = (An + B)2^n$. Substituindo na equação original obtemos

$$[A(n+2) + B]2^{n+2} = 4(An + B)2^n + 2^n,$$

donde

$$4A(n+2) + 4B = 4(An + B) + 1,$$

logo $A = 1/8$, e $B \in \mathbb{R}$. Assim, tome por exemplo $B = 0$, então

$$p_n = \frac{1}{8}n2^n = n2^{n-3}.$$

Portanto, a solução será

$$x_n = C_1 2^n + C_2 (-2)^n + n2^{n-3}.$$

Exercícios do Capítulo 2

- 2.1.** Júlia observou a sequência numérica $(0, 2, 6, 14, 30, 62, \dots)$. Depois de muito pensar, percebeu que os termos da sequência tinham uma relação entre si: o n -ésimo termo era o dobro do anterior a ele somado 2 unidades. Será que 10878 pertence a essa sequência?
- 2.2.** Seja a equação recursiva $x_{n+1} = 2^{n+1}x_n + n^2$. Encontre duas soluções possíveis para x_n .

QUANTIDADE MÍNIMA DE JOGADAS

Nesse capítulo, exploramos as ferramentas matemáticas básicas no estudo da quantidade mínima de movimentos necessários para vencer o quebra-cabeça com n discos, no caso clássico com 3 pinos ou hastes. Seja (a_n) uma sequência numérica que representa a quantidade mínima de jogadas para vencer o jogo com n discos, obteremos uma forma fechada para a_n de diversas maneiras distintas usando ferramentas matemáticas básicas.

Apresentamos também quantas vezes cada disco se moverá para os pinos A , B e C , para o caso clássico com 3 pinos, durante a solução do quebra-cabeças.

3.1 A Recorrência do Jogo

Suponha que temos os n discos empilhados no pino A em forma de cone, do menor para o maior, e desejamos transferi-los para o pino C . Seja (a_n) uma sequência numérica que representa a quantidade mínima de movimentos necessários para mover os n discos do pino A para o pino C . Observe que o último disco, ou seja, o maior de todos, será movido após retirarmos os $n-1$ discos que estão em cima dele, para isso usaremos a_{n-1} movimentos e os colocaremos no pino B . Veja a figura a seguir:

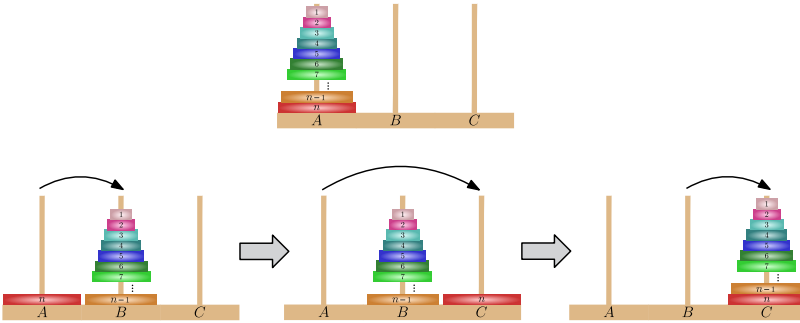


Figura 3.1: Solução com n discos.

Então, transferimos o maior disco para o pino C usando 1 movimento, e para finalizar realocamos os $n - 1$ discos do pino B para o pino C , usando mais a_{n-1} movimentos e concluimos o jogo. Para isso, efetuamos $a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ movimentos no total, ou seja,

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (3.1)$$

que é uma recorrência linear de ordem 1.

Conforme o capítulo anterior, sua solução é

$$a_n = 2^n - 1, \quad (3.2)$$

§3.1. A RECORRÊNCIA DO JOGO

pois $a_1 = 1$, uma vez que com 1 disco temos apenas 1 movimento que seria retirá-lo do pino A e colocá-lo do pino C . Agora, veremos alguns casos para $n = 1, 2$ e 3 .

Para uma torre com 1 disco é necessário 1 movimento apenas, daí $a_1 = 1$:

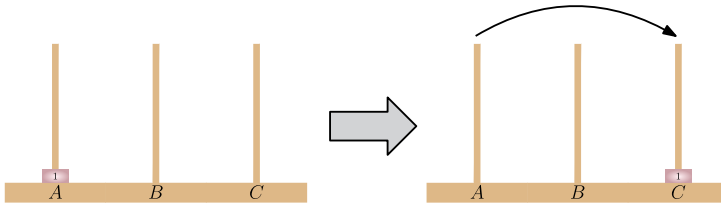


Figura 3.2: Solução com 1 disco.

Para uma torre com 2 discos são necessários 3 movimentos:

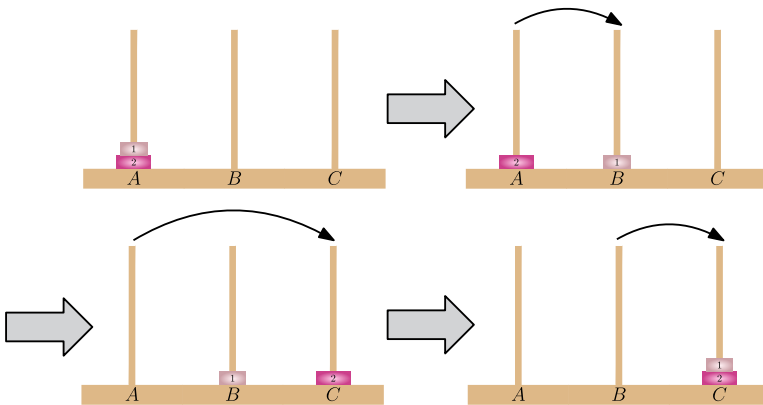


Figura 3.3: Solução com 3 discos.

Logo, $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Com 3 discos, substituímos $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$:

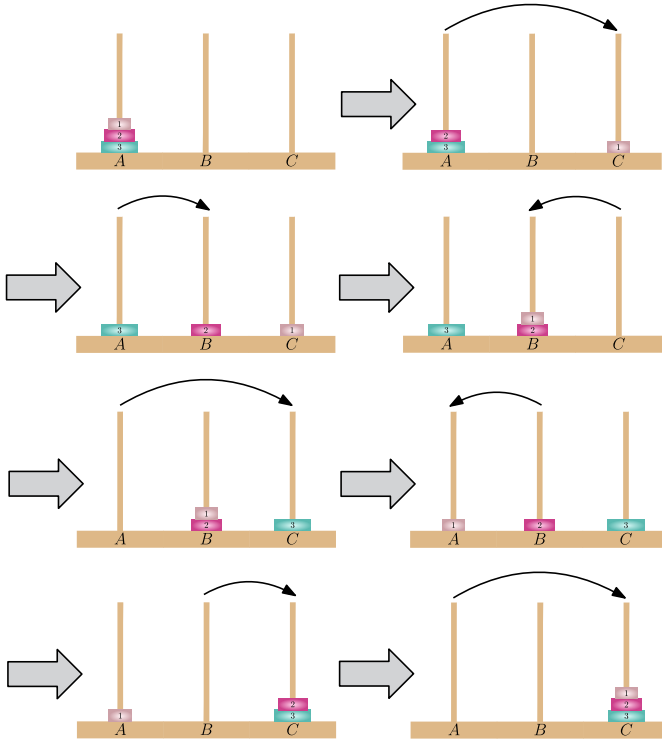


Figura 3.4: Solução com 3 discos.

3.2 Modelagem matemática: que função “ a_n ” assume?

Consideramos a sequência numérica (a_n) , onde a_n é a quantidade mínima de movimentos necessários para transferir os n discos de um pino A para C quando possuímos 3 pinos. Estamos à procura de uma expressão para a_n , suponhamos conhecida a recorrência da seção anterior, mas desconhecida sua solução (3.2).

§3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA: QUE FUNÇÃO “ a_n ” ASSUME?

Como vimos no capítulo anterior, a sequência numérica (a_n) é uma função com domínio nos naturais e imagem nos reais. Procuramos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dentre as funções estudadas no ensino básico (polinomial, trigonométrica, logarítmica e exponencial) que coincida com (a_n) , isto é, $a_n = f(n)$. Para facilitar, a partir de agora chamamos a_n de $f(n)$. Considere a tabela abaixo que representa as quantidades mínimas de movimentos necessários para vencer o jogo de acordo com a quantidade de discos:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	7	15	31	63	127

Tabela 3.1: Número mínimo de jogadas em função do número de discos.

A partir dela, traçamos o gráfico de pontos cujo eixo das abscissas corresponde ao número de discos e das ordenadas à quantidade mínima de movimentos como se mostra na Figura 3.5.

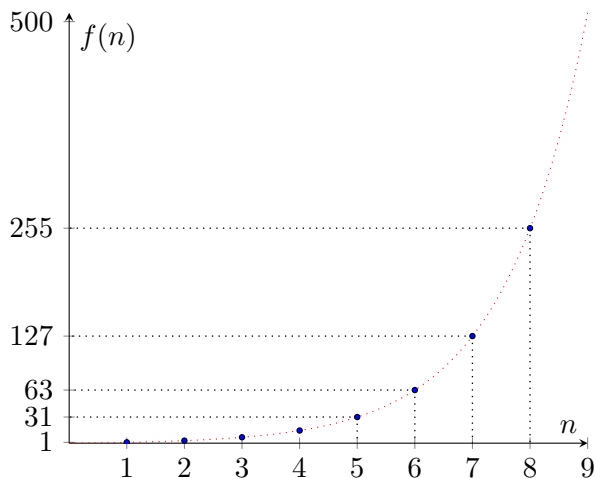


Figura 3.5: Gráfico ajustado.

Observando o gráfico, desconfiamos que seja uma polinomial ou função com crescimento exponencial. Primeiramente, observe intuitivamente que f é crescente e injetiva pois quanto mais discos o jogo possui, maior a quantidade de movimentos necessária para vencer o jogo. Mostraremos que f não é do tipo polinomial.

3.1. PROPOSIÇÃO.

A função $f(n)$, número mínimo de movimentos para resolver a torre em função do número de discos n , não é polinomial.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha por contradição que $f(n) = \sum_{p=0}^k b_p n^p$ é um polinômio de grau k , com $b_k \neq 0$. Então:

$$f(n+1) = \sum_{p=0}^k b_p (n+1)^p. \quad (3.3)$$

Subtraindo de (3.3) $f(n)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & f(n+1) - f(n) \\ &= \sum_{p=0}^k b_p (n+1)^p - \sum_{p=0}^k b_p n^p \\ &= \sum_{p=0}^k b_p ((n+1)^p - n^p) \\ &= b_k ((n+1)^k - n^k) + \sum_{p=0}^{k-1} b_p ((n+1)^p - n^p) \\ &= b_k \left(n^k + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} n^{k-1-p} - n^k \right) + \sum_{p=0}^{k-1} b_p ((n+1)^p - n^p) \\ &= b_k \left(\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} n^{k-1-p} \right) + \sum_{p=0}^{k-1} b_p ((n+1)^p - n^p), \end{aligned}$$

§3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA: QUE FUNÇÃO “ a_n ” ASSUME?

que é um polinômio de grau $k - 1$. Por recorrência, vimos que

$$f(n) = 2 \cdot f(n - 1) + 1,$$

logo

$$f(n + 1) = 2 \cdot f(n) + 1.$$

Assim,

$$f(n + 1) - f(n) = f(n) + 1.$$

Se f fosse uma polinomial de grau k , então o grau de $f(n + 1) - f(n)$ teria o mesmo grau de $f(n) + 1$, que é k . O que não ocorre em polinômios. Logo, f **não** é uma função polinomial.

Uma outra demonstração da Proposição 3.1 é por meio de derivadas de ordem superior. Vejamos a seguir.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja

$$f(n) = \sum_{p=0}^k b_p n^p$$

um polinômio de grau k , com $b_k \neq 0$.

Sabendo que

$$f(n) = 2 \cdot f(n - 1) + 1$$

e derivando k vezes f , obtemos:

$$f^{(k)}(n) = k! \cdot b_k.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(n) &= 2 \cdot f^{(k)}(n - 1) \\ \Rightarrow k! \cdot b_k &= 2 \cdot k! \cdot b_k \\ \Rightarrow b_k &= 2 \cdot b_k. \end{aligned}$$

Essa igualdade só é verdadeira se $b_k = 0$, o que contraria a nossa hipótese. Portanto, função f não pode ser um polinômio.

3.2. PROPOSIÇÃO.

A função $f(n)$, número mínimo de movimentos em função do número n discos, não é logarítmica.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja

$$f(n) = \log_a(bn + c) + d, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

onde $a \neq 1$ e $a > 0$.

Utilizando a relação da recorrência (3.1), temos:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(n-1) + 1 \\ \Rightarrow f(n+1) &= 2 \cdot f(n) + 1 \\ \Rightarrow \log_a(b(n+1) + c) + d &= 2 \cdot (\log_a(bn + c) + d) + 1 \\ &= 2 \cdot \log_a(bn + c) + 2d + 1 \\ \Rightarrow \log_a(b(n+1) + c) &= \log_a(bn + c)^2 + d + 1 \\ \Rightarrow \log_a(b(n+1) + c) - \log_a(bn + c)^2 &= d + 1 \\ \Rightarrow \log_a\left(\frac{b(n+1) + c}{(bn + c)^2}\right) &= d + 1 \\ \Rightarrow a^{d+1} &= \frac{b(n+1) + c}{(bn + c)^2} \\ \Rightarrow a^{d+1} \cdot (bn + c)^2 &= b(n+1) + c \\ \Rightarrow a^{d+1}b^2n^2 + 2a^{d+1}bcn + c^2a^{d+1} &= bn + b + c. \end{aligned}$$

§3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA: QUE FUNÇÃO “ a_n ” ASSUME?

Igualando os coeficientes de mesma potência temos:

$$a^{d+1}b^2 = 0, \quad (3.4)$$

$$2a^{d+1}bc = b \quad e \quad (3.5)$$

$$c^2a^{d+1} = b + c. \quad (3.6)$$

De (3.4), temos que $a = 0$ ou $b = 0$. Não é possível $a = 0$, pois contraria a definição de logaritmo, logo $b = 0$. Assim, $f(n) = \log_a(c) + d$ é constante, mas f não é constante, logo não pode ser desse tipo.

Continuando a nossa análise, vamos verificar se f é exponencial. Analisando o comportamento das derivadas de ordem superior da função polinomial $f^{(k)}(n) = 2 \cdot f^{(k)}(n - 1)$, vemos que a função relacionada ao jogo é uma função de crescimento exponencial. Logo, a função $f(n) = k \cdot a^n + b$, tal que k, b e $a \in \mathbb{R}$ constantes, com $a \neq 1$, é a função candidata que procuramos.

3.3. PROPOSIÇÃO.

A função $f(n)$, número mínimo de movimentos em função do número n de discos não é exponencial, isto é, não tem a forma $f(n) = b^n, 0 < b \neq 1$, mas é de crescimento exponencial, sua expressão é $f(n) = 2^n - 1$.

DEMONSTRAÇÃO.

De acordo com [22], as funções exponenciais têm, exclusivamente, as seguintes propriedades:

1. $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$

2. $f(x) = b^x, \forall x \in \mathbb{R}$, onde $f(1) = b$

3. $f(nx) = f(x)^n$

4. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y), b > 1$

$x < y \Rightarrow f(y) < f(x), 0 < b < 1$

Sabemos que para vencer o jogo com 1 disco é necessário apenas 1 movimento, ou seja, $f(1) = 1$. Com 2 discos, são necessários 3 movimentos, então $f(2) = 3$. Com 3 discos, são necessários 7 movimentos, ou seja, $f(3) = 7$.

Observando as características da definição de função exponencial, vemos que obedece apenas uma das propriedades:

1. $f(1) \cdot f(2) = 1 \cdot 3 = f(1 + 2) = 7$ (falso)

2. $f(x) = b^x, \forall x \in \mathbb{N}$, onde $f(1) = b = 1$ (falso)

3. $f(2 \cdot 1) = f(1)^2$ (falso)

4. $1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2), b > 1$ (verdadeiro).

O que mostra claramente que a função não é do tipo $f(n) = b^n$. Resta-nos analisar a função da família da exponencial mais geral, a do tipo

$$f(n) = k \cdot b^n + c, \quad a > 0, b \neq 1, k \neq 0, b, c, k \in \mathbb{R}.$$

Pela relação da recorrência (3.1) sabemos que

$$f(n) = 2 \cdot f(n - 1) + 1,$$

daí obtemos:

$$\begin{aligned} k \cdot a^n + b &= 2 \cdot (k \cdot a^{n-1} + b) + 1 \\ &= 2 \cdot k \cdot a^{n-1} + 2 \cdot b + 1 \\ \Rightarrow k \cdot a^n &= 2 \cdot k \cdot a^{n-1} + b + 1 \\ \Rightarrow k \cdot a \cdot a^{n-1} &= 2 \cdot k \cdot a^{n-1} + b + 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

§3.3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Da equação (3.7), vamos igualar os coeficientes dos dois lados. Temos que $2 \cdot k = k \cdot a \Rightarrow a = 2$ e $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$. Portanto, a função $f(n) = k \cdot 2^n - 1$ é a procurada. Resta saber o valor de k . Como $f(1) = 1$, então $f(1) = k \cdot 2^1 - 1 = 1$. Logo, $2k = 2$, implicando em $k = 1$. Assim, a função que procuramos é $f(n) = 2^n - 1$.

3.3 Progressão Geométrica

Agora, encontraremos uma expressão para $f(n)$ usando progressões geométricas e a quantidade total de movimentos de cada disco na solução do jogo.

Suponha uma torre com n discos. Se observarmos o movimento de cada disco no jogo, vemos que o maior disco move-se uma única vez. O disco $n - 1$ move-se duas vezes: uma vez para ir ao pino B , logo a seguir $n - 2$ discos serão colocados em cima dele, o maior disco fará seu único movimento para o pino C , a seguir os $n - 1$ discos retornam ao pino A , e o disco $n - 1$ fará seu segundo movimento para o pino C , totalizando dois movimentos. O disco $n - 2$ fará o dobro de movimentos do disco $n - 1$, totalizando 4 movimentos. E assim sucessivamente.

Considere a Tabela 3.2 onde a primeira coluna é a quantidade total de discos e a segunda descreve a soma dos movimentos de cada disco, do maior (sempre 1) até o menor. Tal tabela mostra que a quantidade de movimentos de cada disco é o dobro do anterior, em especial potências de base 2, sendo que o maior disco tem apenas 1 movimento.

Nº discos	Quant. movimentos
1	1
2	1 + 2
3	1 + 2 + 4
4	1 + 2 + 4 + 8
5	1 + 2 + 4 + 8 + 16

Tabela 3.2: Número mínimo de jogadas para 5 discos em função da soma dos movimentos de cada disco

Pra reforçar esse padrão, vamos utilizar novamente a proposição, mostrando a quantidade mínima de movimentos para 6 discos:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$$

$$\underbrace{2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0}_{6 \text{ discos}} = 2 \cdot \underbrace{(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)}_{5 \text{ discos}} + 1$$

Nº discos	Quant. movimentos
1	2^0
2	$2^1 + 2^0$
3	$2^2 + 2^1 + 2^0$
4	$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
5	$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Tabela 3.3: Número mínimo de jogadas para 5 discos em função da soma dos movimentos de cada disco

As tabelas anteriores mostram essa propriedade de uma maneira empírica. Vamos ver uma prova formal para um disco k . Intuímos que, para uma Torre de Hanói com n discos, a quantidade mínima de movimentos de um disco k será 2^{n-k} .

§3.3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

3.4. TEOREMA.

A quantidade de movimentos de um disco k em função de n discos no total é dada por $d_{n,k} = 2^{n-k}$, $1 \leq k \leq n$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja k fixado tal que $k \leq n$. Para $n = 1$, então $k = 1$ e $d_{1,1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ que é verdadeiro, pois com 1 disco só ocorre 1 movimento. Suponha por hipótese que $d_{n,k} = 2^{n-k}$ para algum $k \leq n$. Provaremos que $d_{n+1,k} = 2^{n+1-k}$, para todo $k \leq n+1$. Se $k \leq n$, então para movermos a torre com $n+1$ discos do pino A para o pino C , primeiro movemos a torre com n discos de A para B , realizando $d_{n,k}$ movimentos com o disco k , por hipótese movemos o disco $k+1$ para o pino C , e depois movemos a torre com n discos de B para C , realizando mais 2^{n-k} movimentos com o disco k . Totalizando $2 \cdot 2^{n-k} = 2^{n+1-k}$.

Assim, $d_{n+1,k} = 2^{n+1-k}$ se $k \leq n$. Se $k = n+1$, então $d_{n+1,n+1} = 2^{n+1-(n+1)} = 2^0 = 1$ que é a quantidade de movimentos do disco $n+1$.

Agora que já sabemos que a quantidade de jogadas de cada disco é uma progressão geométrica de razão 2, com o primeiro elemento valendo 1, podemos encontrar a fórmula fechada da quantidade mínima de movimentos em função de n .

Aplicando a fórmula da soma S_n de n termos de uma progressão geométrica, de $d_{n,1} = 1$ e razão igual a 2, temos:

$$S_n = \frac{d_{n,1} \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Logo, $a_n = S_n = 2^n - 1$.

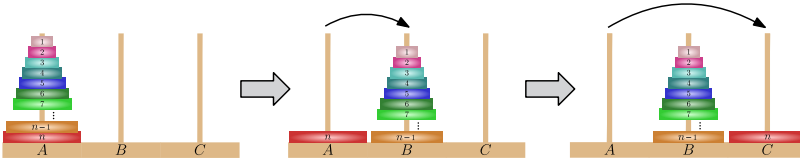


Figura 3.6: Solução da Torre com 3 pinos.

3.4 Número de vezes que um disco k vai para os pinos A , B ou C

Nesta seção, iremos estudar, através de sequências e recorrências, o número de vezes que cada disco é movido para o pino inicial (A), o pino intermediário (B) e o pino final (C), durante a solução do quebra-cabeça.

Sejam $A_{n,k}$, $B_{n,k}$ e $C_{n,k}$ a quantidade mínima de jogadas que um disco k faz para os pinos A , B e C , e $d_{n,k}$ a quantidade de movimentos que do disco k para um total de n discos.

Primeiramente, vamos observar o padrão com 1, 2, 3, 4 e 5 discos no total.

Como temos apenas 1 disco, então este só é movimentado uma vez para o pino C , ou seja, $A_{1,1} = 0$, $B_{1,1} = 0$ e $C_{1,1} = 1$.

Disco k	A	B	C	Total
Disco 1	0	0	1	1

Tabela 3.4: Número de vezes que um disco vai para os pinos

§3.4. NÚMERO DE VEZES QUE UM DISCO k VAI PARA CADA PINO

Para 2 discos temos a Tabela 3.5.

<i>Disco k</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Total
<i>Disco 2</i>	0	0	1	1
<i>Disco 1</i>	0	1	1	2

Tabela 3.5: Número de vezes que os discos 1 e 2 ocupam os pinos

O maior sempre vai primeiramente para o pino final C , enquanto o disco menor vai para o pino B e C , uma vez para cada. Usando a notação, teremos:

$$A_{2,2} = 0, B_{2,2} = 0 \text{ e } C_{2,2} = 1.$$

$$A_{2,1} = 0, B_{2,1} = 1 \text{ e } C_{2,1} = 1.$$

Vejamos agora uma tabela para 3 discos no total:

<i>Disco k</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Total
<i>Disco 3</i>	0	0	1	1
<i>Disco 2</i>	0	1	1	2
<i>Disco 1</i>	1	1	2	4

Tabela 3.6: Número de vezes que os discos 1, 2 e 3 ocupam os pinos

$$A_{3,3} = 0, B_{3,3} = 0 \text{ e } C_{3,3} = 1.$$

$$A_{3,2} = 0, B_{3,2} = 1 \text{ e } C_{3,2} = 1.$$

$$A_{3,1} = 1, B_{3,1} = 1 \text{ e } C_{3,1} = 2.$$

Observe que a soma das quantidades das jogadas do disco k em cada pino resulta na quantidade total de movimentos do disco k , que pelo Teorema 3.3.1 é 2^{n-k} , ou seja:

$$A_{n,k} + B_{n,k} + C_{n,k} = 2^{n-k}. \quad (3.8)$$

3.5. TEOREMA.

Considere o jogo com n discos. A quantidade de vezes que o disco k ocupa os pinos A , B e C , respectivamente, durante a solução do jogo é dada por:

$$C_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6}, \quad (3.9)$$

$$B_{n,k} = \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3}, \quad (3.10)$$

$$A_{n,k} = \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6}. \quad (3.11)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Usaremos Indução Matemática. Primeiro, mostraremos que as três fórmulas anteriores são verdadeiras para $n = 1$; por hipótese de indução, suporemos que são verdadeiras para um n qualquer, e mostraremos que valem para $n + 1$ discos, isto é,

$$A_{n+1,k} = \frac{2^{n+2-k} - 3 + (-1)^{n+k+1}}{6},$$

$$B_{n+1,k} = \frac{2^{n+1-k} + (-1)^{n+k+2}}{3},$$

$$C_{n+1,k} = \frac{2^{n+2-k} + 3 + (-1)^{n+k+1}}{6}.$$

Para $n = 1$, temos que $k = 1$, e

$$A_{1,1} = \frac{2^{1+1-1} - 3 + (-1)^{1+1}}{6} = 0,$$

$$B_{1,1} = \frac{2^{1-1} + (-1)^{1+1+1}}{3} = 0,$$

$$C_{1,1} = \frac{2^{1+1-1} + 3 + (-1)^{1+1}}{6} = 1.$$

Logo, as três fórmulas valem para $n = 1$.

Suponha que sejam válidas para n discos, e vamos provar que valem para $n + 1$ discos. Para movermos $n + 1$ discos para o pino C , primeiro movemos os n discos menores para o pino B , o maior disco para o pino C , e por último os n discos que estão em B para C também.

Observe que $A_{n,k}$ é a quantidade de vezes que o disco k passa por A ao movermos a pilha de n discos de A para C . Assim, $A_{n,k}$ é também a quantidade de vezes que o disco k passa por B ao movermos a pilha de n discos de B para C . Como $B_{n,k}$ é a quantidade de vezes que o disco k passa por B ao mover a pilha de n discos de A para C , $B_{n,k}$ é também a quantidade de vezes que o disco k passa por C ao mover a pilha de n discos de A para B . Seguindo o raciocínio, $C_{n,k}$ é a quantidade de vezes que o disco k se movimenta para o pino C ao transferirmos os n discos de A para C , e é também a quantidade de vezes que o mesmo disco k passa por B ao movermos os n discos de A para B .

Para sabermos quantas vezes um disco k se movimentará para o pino A durante esse processo de transferir $n + 1$ discos de A para C , calculamos quantas vezes ele se move para A ao colocarmos os n discos em B e somamos às quantidades de vezes que se move em A para transferir os n discos de B para C : $A_{n+1,k} = A_{n,k} + B_{n,k}$. Da mesma forma, $B_{n+1,k} = A_{n,k} + C_{n,k}$ e $C_{n+1,k} = B_{n,k} + C_{n,k}$.

Assim, se as fórmulas valem para n , podemos mostrar que valem para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 A_{n+1,k} &= A_{n,k} + B_{n,k} \\
 &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3} \\
 &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k+1}}{6} \\
 &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2^{n+1-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k+1}}{6} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{n+1-k} - 3 - (-1)^{n+k}}{6} \\
 &= \frac{2^{n+2-k} - 3 - (-1)^{n+k+1}}{6}.
 \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned}
 B_{n+1,k} &= A_{n,k} + C_{n,k} \\
 &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + (-1)^{n+k}}{6} + \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{n+1-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k}}{6} \\
 &= \frac{2^{n+1-k} + (-1)^{n+k}}{3}.
 \end{aligned}$$

E, também,

$$\begin{aligned}
 C_{n+1,k} &= B_{n,k} + C_{n,k} \\
 &= \frac{2^{n-k} + (-1)^{n+k+1}}{3} + \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot (-1)^{n+k+1}}{6} + \frac{2^{n+1-k} + 3 + (-1)^{n+k}}{6} \\
 &= \frac{2^{n+2-k} + 3 + (-1)^{n+k+1}}{6}.
 \end{aligned}$$

§3.4. NÚMERO DE VEZES QUE UM DISCO k VAI PARA CADA PINO

Para concluir, vamos verificar que $A_{n,k} + B_{n,k} + C_{n,k} = 2^{n-k}$, pois essa soma corresponde ao total de vezes que o disco k passou pelos pinos A , B e C , respectivamente, logo, deverá valer 2^{n-k} .

$$\begin{aligned} A_{n,k} + B_{n,k} + C_{n,k} &= \frac{2^{n+1-k} - 3 + 2^{n+1-k} + 2^{n+1-k} + 3}{6} \\ &\quad + \frac{2(-1)^{n+k} + 2(-1)^{n+k+1}}{6} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+1-k} + 2(-1)^{n+k} + 2(-1)^{n+k+1}}{6} \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n+1-k}}{6} \\ &= \frac{2^{n+1-k}}{2} \\ &= 2^{n-k}. \end{aligned}$$

3.6. EXEMPLO.

Considerando o jogo das Torres de Hanói com 10 discos, calculemos quantas vezes o disco 1 foi movido para o pino C .

Aplicando a fórmula (3.9) obtemos:

$$\begin{aligned} C_{10,1} &= \frac{2^{10+1-1} + 3 + (-1)^{10+1}}{6} \\ &= \frac{1024 + 3 - 1}{6} \\ &= \frac{1026}{6} \\ &= 171. \end{aligned}$$

Logo, o disco 1 foi movido para o pino C 171 vezes.

3.7. EXEMPLO.

Calculemos quantas vezes o disco 4 foi movido para o pino B com um jogo de 6 discos.

Aplicando a fórmula (3.10) obtemos:

$$\begin{aligned} B_{6,4} &= \frac{2^{6-4} + (-1)^{6+4+1}}{3} \\ &= \frac{4 - 1}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.8. EXEMPLO.

Calculemos quantas vezes o disco 4 foi movido para o pino A com um jogo de 6 discos.

Aplicando a fórmula (3.11) obtemos:

$$\begin{aligned} A_{6,4} &= \frac{2^{6+1-4} - 3 + (-1)^{6+4}}{6} \\ &= \frac{8 - 3 + 1}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercícios do Capítulo 3

- 3.1.** Uma pessoa resolve as torres de hanói perfeitamente, porém realiza uma jogada a cada 5 segundos. Qual o número de discos que ele utilizou se terminou o jogo em 21 minutos e 15 segundos?

- 3.2.** Um aluno do curso de robótica desenvolveu dois robôs que resolvem o jogo torres de hanói perfeitamente. O primeiro robô se chama β e o segundo de α . O primeiro realiza uma jogada a cada 4 segundos, enquanto o segundo a cada 1 segundo. O aluno resolve colocar os dois robôs a duelarem, porém com quantidades de discos diferentes, pois um é mais rápido que o outro. β venceu α por 3 segundos de diferença. Mostre que α tinha 2 discos a mais que β .
- 3.3.** Certa pessoa resolveu o problema da torre para n discos, $n = 1, 2, \dots, 5$, usando a quantidade mínima de movimentos. Quantas jogadas ela realizou no total? Generalize o resultado para até k discos.

ORDEM DE MOVIMENTAÇÃO DAS PEÇAS

Qual disco moveremos no sexto movimento num jogo com 3 discos? Esse problema é relativamente elementar, mas e se fosse o centésimo? E o milésimo? Seria possível descobrir qual disco moveremos? Os desafios a seguir são sobre a ordem da movimentação dos discos.

4.1 Sequência de duas variáveis

Considere um jogo com 3 discos. Para vencer o jogo usando a quantidade mínima de jogadas serão necessários 7 movimentos, cuja solução é:

$$S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C).$$

A ordem de movimentação do disco menor é $(1^0, 3^0, 5^0, 7^0)$, isto é, ele se move nas jogadas 1, 3, 5 e 7. Vamos chamar de $s_{3,1}$ a sequência da ordem dos movimentos do disco 1, $s_{3,2}$ a sequência da ordem dos movimentos do disco 2 e $s_{3,3}$ a sequência da ordem dos movimentos do disco 3. Assim $s_{3,1} = (1, 3, 5, 7)$, $s_{3,2} = (2, 6)$ e $s_{3,3} = (4)$. Desse modo, $s_{n,k}$ é a sequência da ordem de movimentação do disco k na solução do quebra-cabeça com n discos.

Percebemos que independentemente da quantidade de discos no jogo, o primeiro movimento sempre será do disco 1, em seguida o disco 2, e assim por diante.

Para quatro discos no total, a quantidade de termos da sequência $s_{4,1}$, $s_{4,2}$ e $s_{4,3}$ será dobrada, pois sabemos que pela relação da recorrência (Teorema 3.4) que a quantidade de jogadas sempre será o dobro da anterior, e a sequência $s_{4,4}$ terá apenas um termo, pois representa a maior peça. Veja a Tabela 4.1 da ordem dos movimentos com 4 discos, onde $d_{n,k}$ representa a quantidade de movimentos de cada disco k para n discos no total.

disco k	1	2	3	4	5	6	7	8	<i>total</i>
disco 1	1	3	5	7	9	11	13	15	8
disco 2	2	6	10	14					4
disco 3	4	12							2
disco 4	8								1

Tabela 4.1: Ordem de movimentação dos discos com 4 discos no total

Observe que a soma de todos os $d_{n,k}$'s é a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo, ou seja, $8 + 4 + 2 + 1 = 15$. A sequência das jogadas do menor disco (disco 1) é uma progressão aritmética de razão 2 com primeiro termo igual a 1 e oito termos; a sequência das jogadas do disco 2 é uma progressão aritmética de razão 4 com primeiro termo igual a 2 e quatro termos; a sequência das jogadas do disco 3 é uma progressão aritmética de razão 8 com primeiro termo 4 e dois termos; disco 4 só tem um termo. Organizando como sequências obtemos:

$$s_{4,1} = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$$

$$s_{4,2} = (2, 6, 10, 14)$$

$$s_{4,3} = (4, 12)$$

$$s_{4,4} = (8).$$

Veja uma explicação mais detalhada abaixo:

Além disso, podemos observar outras características. O primeiro movimento de cada disco é em uma jogada de potência de base 2, ou seja, uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1. Acontece o mesmo na segunda coluna da tabela, sendo o primeiro termo 3 e razão 2. De modo geral, se observarmos apenas as linhas, estaremos trabalhando com progressões aritméticas, e se for colunas, então teremos progressões geométricas. Antes de generalizar sobre a ordem de movimentação dos discos, vamos provar uma propriedade referente ao primeiro movimento de qualquer disco k .

4.1. PROPOSIÇÃO.

Seja k um número natural correspondente ao tamanho do disco, então seu primeiro movimento durante a solução do que-

bra-cabeça será na jogada 2^{k-1} .

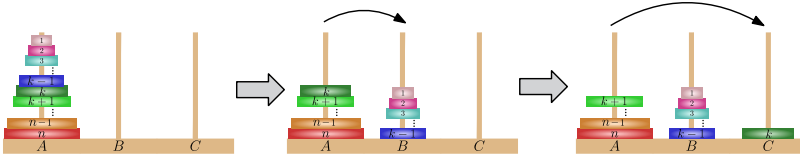


Figura 4.1: Jogada em que o disco k é movido pela primeira vez

DEMONSTRAÇÃO.

Seja k o disco pertencente à pilha dos n discos, onde $1 \leq k \leq n$. Para mover o disco k , então devemos mover os $k - 1$ discos para o pino do meio, o que daria $2^{k-1} - 1$ movimentos, em seguida movemos o disco k para o pino final com 1 movimento, totalizando $2^{k-1} - 1 + 1 = 2^{k-1}$ movimentos.

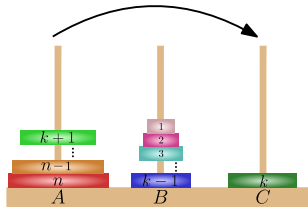


Figura 4.2: Primeira jogada do disco k

4.2. EXEMPLO.

Ordem de jogadas dos discos com um total de 5 peças:

§4.1. SEQUÊNCIA DE DUAS VARIÁVEIS

$s_{n,k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	<i>total</i>
$s_{5,1}$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	16
$s_{5,2}$	2	6	10	14	18	22	26	30									8
$s_{5,3}$	4	12	20	28													4
$s_{5,4}$	8	24															2
$s_{5,5}$	16																1

Tabela 4.2: Ordem de movimentação dos discos com 5 discos no total

4.3. PROPOSIÇÃO.

Considere uma Torre de Hanói com n discos. Seja $o_{k,p}$ o número da jogada em que o disco k será movido pela p -ésima vez. Fixado $k \leq n$, $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k e $o_{k,1} = 2^{k-1}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Vimos na Proposição 4.1 que o disco k será movido pela primeira vez na jogada 2^{k-1} , logo $o_{k,1} = 2^{k-1}$. A configuração do jogo após o primeiro movimento do disco k está na terceira torre da Figura 4.3. Continuando a solução do quebra-cabeça, transferimos os $k-1$ discos menores que estão em B para o pino C , colocando-os em cima do disco k usando $2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$ movimentos. Agora, o único movimento possível do jogo será mover o disco $k+1$ para o pino intermediário com um movimento, resultando em $2^k - 1 + 1 = 2^k$ movimentos. Por fim, os $k-1$ discos devem ir para o pino inicial, pois o disco k precisará ir ao pino intermediário, com $2^k + 2^{k-1} - 1$ movimentos. Sendo assim, o disco k ficará livre para ir para o pino intermediário com um movimento, gerando um total de $2^k + 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^k + 2^{k-1}$ movimentos (o segundo movimento do disco k será na jogada $2^k + 2^{k-1}$ e a última torre da Figura 4.3 representa o segundo movimento do disco k). Logo, $o_{k,1} = 2^{k-1}$ e $o_{k,2} = 2^k + 2^{k-1}$.

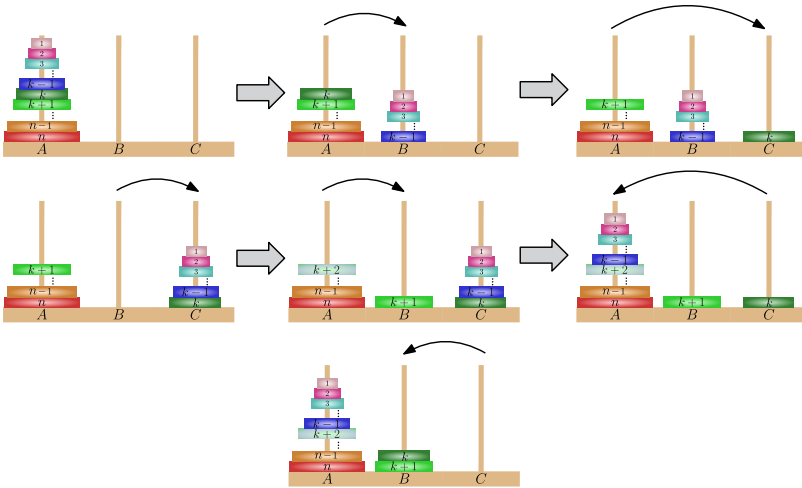


Figura 4.3: Ordem dos movimentos do disco k

O terceiro movimento do disco k ocorrerá após transferirmos os $k - 1$ discos menores para cima do disco k , ou seja, para o pino B , o disco $k + 2$ para o C (único movimento possível), para transferir os discos que estão em B para C , primeiro os $k - 1$ discos menores vão para C e então o disco k será movido para A , totalizando

$$2^{k-1} - 1 + \underbrace{1}_{\text{disco } k+2} + 2^{k-1} - 1 + \underbrace{1}_{\text{disco } k} = 2^k$$

movimentos, logo, $o_{k,3} = o_{k,2} + 2^k$, e $o_{k,3} - o_{k,2} = 2^k$.

Suponha que após certo movimento do disco k , este se encontra no pino A sobre discos maiores que ele. Segundo a Seção 3.4, se n e k tiverem a mesma paridade, então a ordem de movimentação do disco k nos pinos será (C, B, A) . Caso tenham paridades distintas, então a ordem muda para (B, C, A) . Suponha que n e k tenham a mesma paridade, então se o disco k foi movido para o pino A , ele necessariamente veio do pino B . Os $k - 1$ discos menores estão em C sobre um certo disco $k + m$, caso contrário seria impossível mover o disco k de acordo com as regras do jogo. Vamos contar quantos movimentos serão necessários até o próximo movimento do disco k . Os próximos e únicos possíveis passos são transferir os $k - 1$ menores discos do pino C para cima do disco k , usando $2^{k-1} - 1$ movimentos. Após esses movimentos, só haverá um único movimento possível no jogo usando os discos dos pinos B ou C , suponha que seja o disco $k + p$ a ser movido para o pino C , onde $0 < p, t, m \leq n - k$ e $p \leq m$. O disco k veio do pino B e está em A , logo seu próximo movimento deve ser para o pino C , para isso movemos novamente os $k - 1$ menores discos para B , e o disco k para o pino C (únicos movimentos possíveis também). Totalizando

$$2^{k-1} - 1 + \underbrace{1}_{\text{disco } k+p} + 2^{k-1} - 1 + \underbrace{1}_{\text{disco } k} = 2^k$$

movimentos.

Outra hipótese é que após certo movimento do disco k , este se encontra no pino B sobre discos maiores que ele. Suponha que n e k têm mesma paridade, então o disco k veio do pino C , foi movido para B e seu próximo destino é o pino A . Desse modo, os $k - 1$ discos menores estão em A , e o próximo movimento será transferi-los para B , em cima do disco k , usando $2^{k-1} - 1$ movimentos. Após esse movimento, só haverá um único

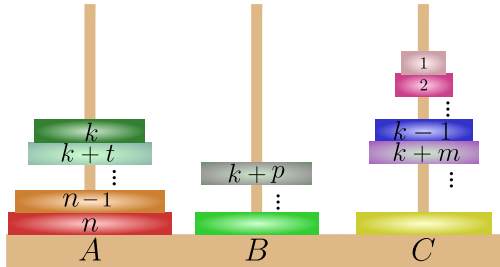


Figura 4.4: Configuração da Torre após mover o disco k

movimento possível no jogo usando os discos dos pinos A ou C , suponha que seja o disco $k+p$ a ser movido, onde $0 < p \leq n-k$. Logo a seguir, para colocarmos o disco k no pino A , movemos novamente os $k-1$ menores discos para C , e então o disco k para o pino A . Como no caso anterior, temos 2^k movimentos necessários para o próximo movimento do disco k .

Para concluir a prova, após certo movimento do disco k , este se encontra no pino C . Se n e k têm mesma paridade, o disco k veio do pino A e os $k-1$ discos menores estão em B . O próximo movimento será transferir os $k-1$ menores discos do pino B , para o pino C . Após esse movimento, só haverá um único movimento possível no jogo usando um dos discos dos pinos A ou B , suponha que seja o disco $k+p$ a ser movido, onde $0 < p \leq n-k$. Logo a seguir, movemos novamente os $k-1$ menores discos para A , e o disco k para o pino B . Analogamente aos casos mencionados, realizamos 2^k movimentos. O caso n e k com paridades distintas é semelhante a esses.

4.4. TEOREMA.

Considere uma torre com n discos. O disco movido na i -ésimo jogada será o disco k obtido ao reescrever i na forma $(2p - 1) \cdot 2^{k-1}$, tal que p será o número de vezes que o disco k foi movido.

DEMONSTRAÇÃO.

Como $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k , temos que $o_{k,p} = o_{k,1} + (p - 1) \cdot 2^k$ é o seu termo geral. Logo,

$$\begin{aligned} o_{k,p} &= 2^{k-1} + (p - 1) \cdot 2^k \\ &= (2p - 2 + 1) \cdot 2^{k-1} \\ &= (2p - 1) \cdot 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Acabamos de definir uma sequência numérica com duas variáveis, logo podemos associá-la a uma função de duas variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (k, p) &\longmapsto o_{k,p}. \end{aligned}$$

Agora, estamos interessados em saber qual peça é movida no i -ésimo movimento. Para isso, temos que resolver a equação

$$(2p - 1) \cdot 2^{k-1} = i, \tag{4.1}$$

isto é, encontrar k e p que a satisfazem. Observamos que $2p - 1$ é um número ímpar, então basta fatorar i de modo que tenhamos um ímpar vezes uma potência de 2.

Como i é um número natural, então o Teorema Fundamental da Aritmética garante a unicidade de p e k [14].

4.5. EXEMPLO.

Resolvendo as Torres de Hanói com 8 discos, qual disco é movido na 100^a jogada considerando a quantidade mínima de movimentos?

Aplicando na fórmula (4.1) temos:

$$(2p - 1) \cdot 2^{k-1} = 100.$$

Como p e k são números naturais, então podemos fatorar 100 e retirar as potências de 2, sendo assim, resolvendo uma equação exponencial:

$$(2p - 1) \cdot 2^{k-1} = 100 = 25 \cdot 2^2.$$

Assim, $2p - 1 = 25$ e $2^{k-1} = 2^2$, então $p = 13$ e $k = 3$.

Logo, o disco movido na centésima jogada é o disco 3 e o mesmo foi movido 13 vezes.

4.6. EXEMPLO.

Com 13 discos, qual disco é movido na 4997^a jogada considerando a quantidade mínima de movimentos? Quantas vezes esse disco foi movido?

Aplicando na fórmula (4.1) temos:

$$(2p - 1) \cdot 2^{k-1} = 4997 = 4997 \cdot 2^0,$$

daí

$$2^{k-1} = 2^0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow p = 2499.$$

O disco movido na jogada 4997 foi o 1 e ele foi movido 2499 vezes.

4.7. EXEMPLO.

Com 10 discos, qual disco é movido na 480ª jogada considerando a quantidade mínima de movimentos? Quantas vezes esse disco foi movido?

Aplicando na fórmula (4.1), temos:

$$(2p - 1) \cdot 2^{k-1} = 480 = 15 \cdot 2^5,$$

daí

$$2^{k-1} = 2^5 \Rightarrow k - 1 = 5 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow p = 8.$$

O disco movido na jogada 480 foi o 6 e ele foi movido 8 vezes.

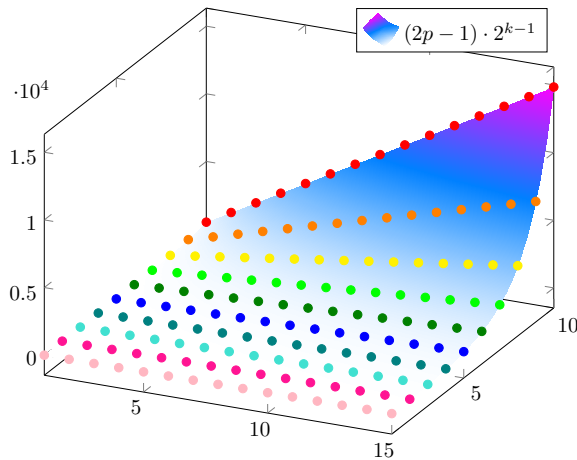


Figura 4.5: Gráfico de pontos

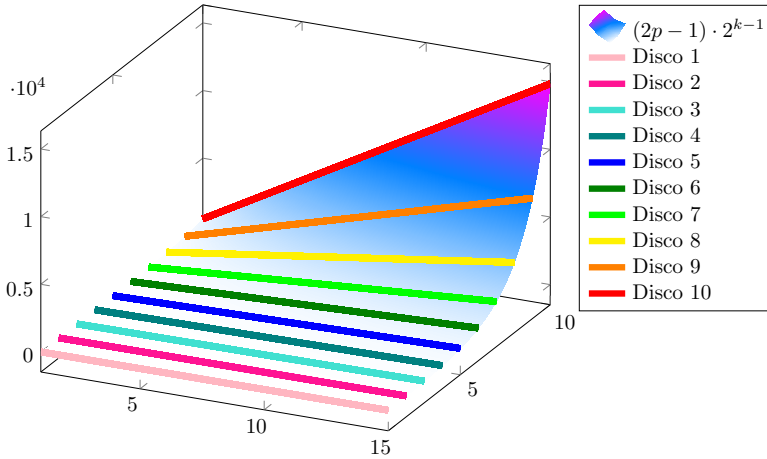


Figura 4.6: Gráfico da Ordem dos movimentos

4.2 Números binários

Segundo [30] na revista Gazeta de Matemática, uma outra maneira de descobrir o disco que será movido na i -ésima jogada é a partir dos números binários.

Primeiramente devemos transformar o número da jogada na forma decimal em binário. Por exemplo, vamos tentar descobrir qual disco é movido na jogada 26: o número 26_{10} em binário é 11010_2 . Para identificar o disco movido, bastar olharmos o primeiro dígito 1 mais à direita:

$$11010.$$

Como o primeiro dígito 1 mais à direita aparece na segunda posição do número binário, de trás para frente, então de acordo com o Teorema 4.9, que veremos mais adiante, o disco 2 será movimentado na jogada 26.

§4.2. NÚMEROS BINÁRIOS

Chamamos de S_n a sequência dos movimentos dos n discos, mas para facilitar a escrita não colocaremos as letras que representam os pinos. Para $n = 2$,

$$S_2 = (1 \ 2 \ 1).$$

A sequência acima nos diz que a primeira jogada é com o disco 1, a segunda com o disco 2 e a terceira com o disco 1. Transformando o número da jogada em binário teremos:

$$1_{10} = 1_2$$

$$2_{10} = 10_2$$

$$3_{10} = 11_2.$$

Observando o número 1 mais à direita, vemos que ele aparece nas posições 1, 2 e 1, que são exatamente os discos movidos na sequência de jogadas. Para $n = 3$, teremos:

$$S_3 = (1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1).$$

Transformando todos os números das jogadas em binários temos:

$$1_{10} = 1_2$$

$$2_{10} = 10_2$$

$$3_{10} = 11_2.$$

$$4_{10} = 100_2$$

$$5_{10} = 101_2$$

$$6_{10} = 110_2.$$

$$7_{10} = 111_2$$

Mais uma vez, observando a posição do número 1 mais à direita, vemos que ele ocupa as posições 1,2,1,3,1,2,1, em ordem da primeira jogada à sétima jogada, que é exatamente os discos movidos nas jogadas.

4.8. DEFINIÇÃO.

Chama-se *concatenação* das sequências $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ à sequência

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Usando essa notação, podemos escrever

$$S_n = S_{n-1} \cdot (n) \cdot S_{n-1},$$

pois primeiro movemos os $n - 1$ discos para o pino do meio, em seguida movemos o disco n para o pino final e, por fim, movemos novamente os $n - 1$ discos para o pino final. Pela Proposição 3.3, S_n tem $2^n - 1$ termos. Com base nisso, podemos anunciar o próximo resultado.

4.9. TEOREMA.

Seja S_n a sequência das jogadas da solução do quebra cabeças com n discos. O disco que será movido na i -ésima jogada será o número da posição do dígito 1 mais à direita na representação binária de i .

DEMONSTRAÇÃO.

Sabemos que o teorema vale para sequência S_2 e S_3 , como mostrado anteriormente. Suponha, por indução, que o teorema valha para n discos, ou seja, para $1 \leq i \leq 2^n - 1$, a posição do 1 mais à direita na representação binária de i indicará o disco movido no i -ésimo movimento da solução do jogo com n discos.

§4.2. NÚMEROS BINÁRIOS

Para $n + 1$ discos, temos a concatenação

$$S_{n+1} = S_n \cdot (n + 1) \cdot S_n. \quad (4.2)$$

Se $i \leq 2^n - 1$, estamos nos primeiros movimentos antes de movermos o disco $n + 1$, isto é, na primeira parte da concatenação, e pela hipótese de indução o teorema vale.

Se $i = 2^n$, então estamos no movimento do disco $n + 1$ e a representação binária

$$2^n = (1 \underbrace{000 \cdots 0}_n)_2,$$

o número 1 ocupa a posição $n + 1$, logo é o disco movido.

Se

$$2^n < i \leq 2^{n+1} - 1,$$

ou seja, $i = 2^n + k$, para $1 \leq k \leq 2^n - 1$, então estamos na última parte da concatenação e o primeiro 1 mais a direita na representação binária de i será determinado por k . Por hipótese de indução e por (4.2), a posição do 1 determinará a peça movida.

4.10. EXEMPLO.

Com 12 discos no total, qual disco é movido na jogada 2200?

O número $2200_{10} = 10010011000_2$, e primeiro dígito 1 mais a direita está na posição 4. Portanto, a jogada 2200 será movido pelo disco 4.

4.3 Resto de divisão

Já sabemos responder qual disco é movido numa jogada qualquer e quantas vezes esse mesmo disco foi movido, nesta seção exploramos em qual pino esse disco se encontra na p -ésima jogada, ou seja, se está no pino A , B ou C .

Fenômenos que envolvem períodos cíclicos, geralmente recorremos a funções trigonométricas, porém podemos utilizar ferramentas matemáticas mais simples, como por exemplo resto de divisão.

Quando dividimos um número natural por k , podemos obter k restos possíveis:

$$r(k) = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}.$$

No jogo Torres de Hanói, quando fixamos um certo disco, percebemos que os seus movimentos em relação aos pinos é cíclico. Primeiro vamos estudar o caso que o número total de discos é ímpar. Vejamos a solução com três discos:

$$S_3 = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C).$$

Vimos na Seção 1.3 que a sequência de movimentos do menor disco em relação aos pinos no caso da quantidade total de discos ser ímpar é $(C, B, A, C, B, A, \dots, C)$. Veja que a sequência

§4.3. RESTO DE DIVISÃO

apresenta três termos: C , B e A , sempre nessa ordem. Então para descobrir em qual pino um certo disco se encontra, devemos saber a quantidade de movimentos realizadas com esse disco, dividir por 3 e observar o seu resto. Na tabela a seguir temos um resumo para o disco k sendo ímpar ou par.

	n ímpar e k ímpar			n ímpar e k par		
Pino	C	B	A	B	C	A
Resto	1	2	0	1	2	0

4.11. EXEMPLO.

Com 7 discos no total e ao realizarmos 13 movimentos com o menor disco, em qual pino esse disco se encontra?

Dividindo 13 por 3, temos:

$$13 = 3 \cdot 4 + 1.$$

Ou seja, o disco 1 se encontra no pino C .

4.12. EXEMPLO.

Com 13 discos no total e ao realizarmos 125 movimentos com o disco 3, em qual pino esse disco se encontra?

Dividindo 125 por 3, temos:

$$125 = 3 \cdot 41 + 2.$$

Portanto, o disco 3 se encontra no pino B .

4.13. EXEMPLO.

Com 13 discos no total e ao realizarmos 221 movimentos com o disco 2, em qual pino esse disco se encontra?

Dividindo 221 por 3, temos:

$$221 = 3 \cdot 73 + 2.$$

Portanto, o disco 2 se encontra no pino C .

Agora vejamos os casos onde o total de discos é par. Observe a solução com 4 discos no total:

$$S_4 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C).$$

Nessa situação a tabela de restos inverte. Os discos de número ímpar seguem a sequência (B, C, A, \dots, C) e os discos de número par seguem a sequência (C, B, A, \dots, C) .

De modo resumido, temos:

	n par e k ímpar			n par e k par		
Pino	B	C	A	C	B	A
Resto	1	2	0	1	2	0

4.14. EXEMPLO.

Com 20 discos no total e ao realizarmos 201 movimentos com o disco 10, em qual pino esse disco se encontra?

Dividindo 201 por 3, temos:

$$201 = 3 \cdot 67 + 0.$$

Portanto, o disco 10 se encontra no pino A .

§4.4. FUNÇÃO PARTE INTEIRA E CONFIGURAÇÃO GERAL DO JOGO

4.15. EXEMPLO.

Com 10 discos no total e ao realizarmos 358 movimentos com o disco 1, em qual pino esse disco se encontra?

Dividindo 221 por 3, temos:

$$358 = 3 \cdot 119 + 1.$$

Logo, o disco 1 se encontra no pino B .

4.4 Função parte inteira e configuração geral do jogo após parar na i -ésima jogada

4.16. DEFINIÇÃO.

Chama-se função parte inteira de x , o maior inteiro menor ou igual a x , denota-se por:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}.$$

4.17. EXEMPLO.

Alguns casos de função parte inteira são:

$$\begin{aligned} \lfloor 2,6 \rfloor &= 2; & \lfloor \pi \rfloor &= 3; & \lfloor e \rfloor &= 2; \\ \lfloor 4/3 \rfloor &= 1; & \lfloor -\pi \rfloor &= -4; & \lfloor -e \rfloor &= -3. \end{aligned}$$

A partir da função parte inteira e da fórmula (4.1), podemos descobrir a configuração geral da Torre de Hanói após pararmos numa certa jogada, ou seja, podemos responder em quais pinos todos os discos estarão. Para isso, temos que descobrir quantas jogadas foram realizadas para cada disco k , o que podemos determinar a partir da expressão $i = (2p - 1) \cdot 2^{k-1}$ e encontrar o valor de p . Vamos isolar p e colocá-lo em função de i e k .

$$\begin{aligned} (2p - 1) \cdot 2^{k-1} &= i \\ \Rightarrow 2p - 1 &= \frac{i}{2^{k-1}} \\ \Rightarrow 2p &= \frac{i}{2^{k-1}} + 1 \\ \Rightarrow p &= \frac{i + 2^{k-1}}{2^k}. \end{aligned}$$

Por exemplo, até a décima jogada de uma torre com 5 discos, quantas vezes o disco 1 foi movido?

$$p = \frac{10 + 2^{1-1}}{2^1} = 5, 5.$$

Como p é um número natural, tomamos a sua parte inteira. Logo, para sabermos quantas jogadas foram realizadas com o disco k após pararmos na i -ésima jogada, calculamos a parte inteira de p , ou seja:

$$p = \left\lfloor \frac{i + 2^{k-1}}{2^k} \right\rfloor. \quad (4.3)$$

Uma vez encontrado o valor de p , em seguida determinamos em qual pino o disco k se encontra (como já discutido na Seção 4.3), dividimos p por 3 e encontramos o seu respectivo resto.

4.18. EXEMPLO.

Certa pessoa brincando com o jogo Torre de Hanói com 4 discos, realizou alguns movimentos e parou na 10ª jogada, qual a configuração da Torre de Hanói considerando a quantidade mínima de jogadas?

Temos $i = 10$ e $1 \leq k \leq 4$.

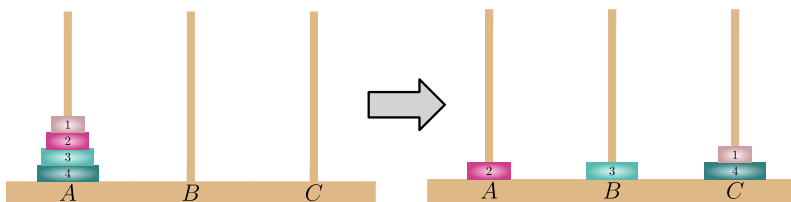


Figura 4.7: Configuração da Torre com 4 discos

Para o disco 1, temos a sequência (C, B, A) , (n par, k ímpar):

$$p = \left\lfloor \frac{10 + 2^{1-1}}{2^1} \right\rfloor = 5$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

→ *pino C*.

Para o disco 2, temos a sequência (B, C, A) , (n par, k par):

$$p = \left\lfloor \frac{10 + 2^{2-1}}{2^2} \right\rfloor = 3$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

→ *pino A*.

Para o disco 3, temos a sequência (C, B, A) , (n par, k ímpar):

$$p = \left\lfloor \frac{10 + 2^{3-1}}{2^3} \right\rfloor = 1$$

$$1 = 3 \cdot 0 + 1$$

$$\rightarrow \textit{pino B.}$$

Para o disco 4, temos a sequência (B, C, A) , (n par, k par):

$$p = \left\lfloor \frac{10 + 2^{4-1}}{2^4} \right\rfloor = 1$$

$$1 = 3 \cdot 0 + 1$$

$$\rightarrow \textit{pino C.}$$

Exercícios do Capítulo 4

- 4.1. Com a torre de hanói de 20 discos, qual peça será movida na milésima jogada?
- 4.2. Em qual jogada o disco 8 será movido pela primeira vez? Considere um jogo com 8 ou mais discos.
- 4.3. Escreva a sequência do segundo movimento de qualquer dos 10 primeiros discos. Considere $p = 20$ na fórmula 4.4.
- 4.4. Da sequência de jogadas do disco 3, escreva seus primeiros 8 movimentos.
- 4.5. Mostre que se o número da jogada for ímpar, então o disco movido é o menor.

ALGUMAS VARIAÇÕES DO JOGO TORRES DE HANÓI

5.1 Torre de Hanói com quatro pinos

Em 1907, Dudeney propôs uma variante do jogo conhecida por *O quebra cabeças de Reve*, são 4 pinos e as mesmas regras do caso clássico.

Suponha que temos os n discos empilhados no pino A em forma de cone e desejamos transferi-los para o pino D . Há várias formas de fazer essa transferência, mas estamos à procura da que minimiza a quantidade de movimentos. Denominaremos a quantidade mínima de movimentos necessária para mover os n discos de b_n .

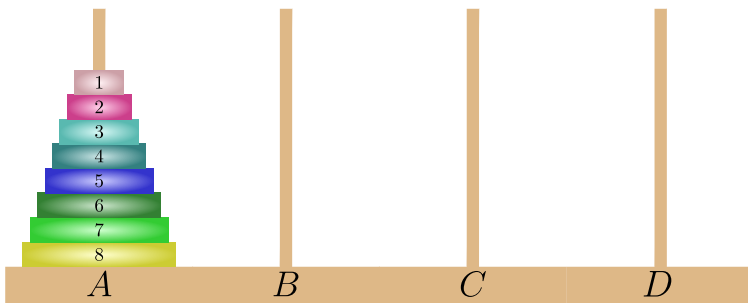


Figura 5.1: Torre de Hanói com 4 pinos.

De modo semelhante ao que foi feito no caso dos 3 pinos, no Capítulo 3 deste livro, observe que o último disco, ou seja, o maior de todos, será movido após retirarmos os $n - 1$ discos que estão em cima dele e os distribuímos nos pinos B e C . Ocorre que existem várias maneiras desses discos estarem alocados nesses pinos B ou C , desse modo o caso da Torre com 4 pinos é distinto da Torre com 3 pinos, uma vez que nesta só há um modo dos discos estarem distribuídos pois só há um pino intermediário, espera-se que a quantidade mínima de movimentos com 4 pinos seja menor que a do caso clássico.

Vamos supor um método de solução e verificar se é o melhor. Para esse método, x_n será a quantidade de movimentos para mover n discos de um pino para outro usando os 4 pinos. Imagine que coloquemos todos os $n - 1$ menores empilhados no pino B , para isso usaremos x_{n-1} movimentos. Então, transferimos o maior disco para o pino D usando 1 movimento, e para finalizar realocamos os $n - 1$ discos no pino B para o pino D , usando mais x_{n-1} movimentos e concluímos o jogo. Para isso, efetuamos $x_{n-1} + 1 + x_{n-1}$ movimentos no total, ou seja,

$$x_n = 2x_{n-1} + 1 \text{ e } x_1 = 1 \tag{5.1}$$

§5.1. TORRE DE HANÓI COM QUATRO PINOS

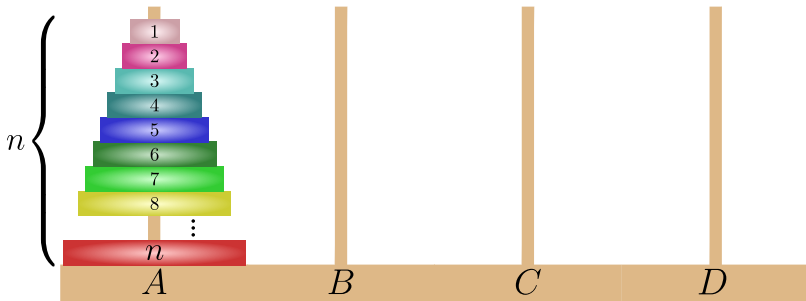


Figura 5.2: Torre de Hanói com 4 pinos.

pois com 1 disco, temos apenas 1 movimento que seria retirá-lo do pino A e colocá-lo do pino D , logo $x_n = 2^n - 1$. Será que essa é a menor quantidade de movimentos possíveis? Ou seja, $x_n = b_n$? Observe que seria idêntica à solução do caso clássico com 3 pinos.

Veja as animações com 2, 3 e 4 discos:

Agora, analisaremos uma outra situação possível, nesse caso chamaremos de y_n a quantidade de movimentos para mover n discos. Imagine que transferimos os $n - 2$ discos menores para B usando y_{n-2} movimentos, o segundo maior disco transferimos para C e o disco maior para D . Depois, transferimos o segundo disco maior para D , e para terminar os $n - 2$ discos menores para D . Realizamos assim

$$y_{n-2} + 1 + 1 + 1 + y_{n-2}$$

movimentos, logo

$$y_n = 2y_{n-2} + 3 \text{ e } y_1 = 1, y_2 = 3 \quad (5.2)$$

§5.1. TORRE DE HANÓI COM QUATRO PINOS

uma recorrência diferente de (5.1). Vamos comparar os resultados para $n = 3$ discos. Como $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$, então $y_3 = 2y_1 + 3 = 5$. Na solução do parágrafo anterior tínhamos $x_3 = 2^3 - 1 = 7$. Logo, a recorrência (5.2) nos dá menos movimentos necessários que (5.1). Será que (5.2) é a recorrência procurada para 4 pinos? A resposta é não, vejamos porquê.

Para 6 discos, a solução de (5.2) será $y_6 = 2y_4 + 3 = 2.(2y_2 + 3) + 3 = 21$. Contudo, temos uma solução com menos movimentos: retirar os 3 menores discos de A e colocar em B usando $y_3 = 5$ movimentos, mover os 3 maiores discos de A para D usando os pinos A , C e D , logo usamos $a_3 = 2^3 - 1 = 7$ movimentos. Por fim, movemos os 3 discos menores que estão em B para D usando y_3 movimentos, totalizando $5 + 7 + 5 = 17$ movimentos. Assim, (5.2) está descartada também.

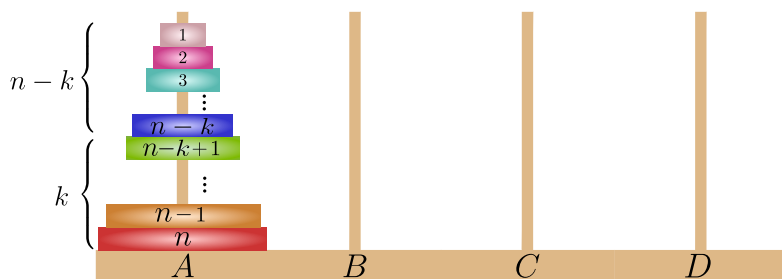


Figura 5.3: Torre de Hanói com 4 pinos.

Podemos concluir que o caso com 4 pinos é mais complexo que o de 3 pinos e a solução não é tão simples assim. Os resultados apresentados aqui estão em [8] com uma linguagem de programação.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49

Tabela 5.1: Quantidade mínima de jogadas para 4 pinos.

Aproximadamente em 1941, os professores Frame e Stewart apresentaram, em trabalhos independentes, uma forma recursiva que conjecturaram ser a que leva à quantidade mínima de movimentos. Observaram que dado um certo valor k , $k < n$, se usarmos b_{n-k} movimentos para mover os $n - k$ discos menores para B , logo a seguir movemos os discos restantes que são k para D , para isso poderemos usar apenas os pinos A , C e D , isto é, faremos a_k movimentos, e para finalizar movemos os discos menores que estavam em B para D , usando os 4 pinos, ou seja, b_{n-k} movimentos. Totalizando $b_n = 2b_{n-k} + a_k$ movimentos. Queremos encontrar o k que torna b_n mínimo. Assim, queremos

$$b_n = \min_{k \leq n} \{2b_{n-k} + a_k\} = \min_{k \leq n} \{2b_{n-k} + 2^k - 1\}. \quad (5.3)$$

Esse padrão recursivo (5.3), chamado de *Numeração Recursiva de Frame-Stewart*, é bem conhecido na literatura. Denomina-se de *Conjectura de Frame-Stewart* e, na verdade, é um problema em aberto se realmente a solução dessa recursão será a sequência procurada $\{b_n\}$, isto é, a quantidade mínima de movimentos para a torre com 4 pinos. Desde então, vários algoritmos têm sido propostos para encontrar a menor quantidade de movimentos. Em [18], há a proposta de sete abordagens distintas para o problema e todas são equivalentes à Conjectura de Frame-Stewart.

Vamos encontrar uma forma fechada para $\{b_n\}$ considerando que a recursão de Frame-Stewart é verdadeira.

Analisando alguns casos: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$, observamos e faremos a hipótese que os valores de k satisfazem a sequência

$$\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots\}. \quad (5.4)$$

Se assim o for, dado n , precisamos saber sua posição na sequência, ou seja, o k_n .

Sejam $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x , e $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x .

5.1. PROPOSIÇÃO.

Seja a sequência $\{k_n\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$, então

$$k_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2} \right\rfloor \quad (5.5)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Essa sequência é composta por blocos de repetição dos números naturais. O último número de cada bloco de repetição é igual à soma das quantidades de elementos de cada bloco anterior a ele, por exemplo,

$$k_2 = 1, 2 = 2 \quad k_5 = 2, 5 = 3 + 2, \quad k_9 = 3, 9 = 4 + 3 + 2. \quad (5.6)$$

Logo, a soma da quantidade de números de cada bloco resulta na última posição do bloco. Dado n , para sabermos o k_n correspondente a ele resolvemos

$$\frac{k_n(k_n + 1 + 2)}{2} = n. \quad (5.7)$$

Obviamente essa igualdade nem sempre é satisfeita, devemos resolver a equação do segundo grau

$$k_n^2 + 3k_n - 2n = 0,$$

que tem como solução

$$k_n = \frac{-3 + \sqrt{9 + 8n}}{2}. \quad (5.8)$$

Se o valor de k_n for inteiro, então o número mínimo de movimentos será $b_n = 2b_{n-k_n} + a_{k_n}$. Caso não seja inteiro, então

$$k_n = \left\lceil \frac{\sqrt{8n+9} - 3}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2} \right\rfloor,$$

este último valor é mais simplificado e

$$\frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2} - \frac{\sqrt{8n+9} - 3}{2} < 1$$

para todo n natural.

§5.1. TORRE DE HANÓI COM QUATRO PINOS

Para provar o teorema principal dessa seção, precisamos do resultado a seguir.

5.2. PROPOSIÇÃO.

A sequência $\{b_n\}$ satisfaz a recorrência

$$b_{n+1} = b_n + 2^{k_n}. \quad (5.9)$$

DEMONSTRAÇÃO.

Se temos $n + 1$ discos em A , devemos retirar os n discos menores usando a menor quantidade de movimentos e alocá-los em B e C .

Se $b_n = 2b_{n-k_n} + a_{k_n}$, a solução para n discos é transferir os $n - k_n$ discos menores para B usando os 4 pinos, depois os k_n restantes para C (ao invés de D , caso convencional) usando os 3 pinos, e não faremos a última etapa que é transferir os $n - k_n$ discos para C , assim usaremos $b_{n-k_n} + a_{k_n}$ movimentos.

Agora, transferiremos o disco $n + 1$ para D , os k_n que estão em C para D , e para terminar os $n - k_n$ que estão em B para D , usando $1 + a_{k_n} + b_{n-k_n}$. Logo, usamos $2b_{n-k_n} + 2a_{k_n} + 1$ movimentos. Assim,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_{n-k_n} + 2a_{k_n} + 1 \\ &= 2b_{n-k_n} + a_{k_n} + a_{k_n} + 1 \\ &= b_n + a_{k_n} + 1 = b_n + 2^{k_n}. \end{aligned}$$

O seguinte resultado nos dá uma fórmula fechada para o número mínimo de movimentos da torre com n discos e 4 pinos, se encontra em [15] com outra notação:

5.3. TEOREMA.

CONJECTURA DE FRAME-STEWART

Seja n o número de discos de uma Torre de Hanói com 4 pinos. Seja b_n o número mínimo de movimentos necessários para concluir o jogo, então

$$b_n = 2^{k_n} \left(n - 1 - \frac{k_n(k_n - 1)}{2} \right) + 1 \quad (5.10)$$

para

$$k_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n + 1} - 1}{2} \right\rfloor.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha que o teorema é válido para n , mostraremos por indução que ele é verdadeiro para $n + 1$. De acordo com a proposição anterior, $b_{n+1} = b_n + 2^{k_n}$. Logo, por hipótese de indução

$$b_{n+1} = 2^{k_n} \left(n - 1 - \frac{k_n(k_n - 1)}{2} \right) + 1 + 2^{k_n}.$$

Há 2 possibilidades: $k_{n+1} = k_n$ ou $k_{n+1} = k_n + 1$. Se $k_{n+1} = k_n$, então

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2^{k_n} \left(n - 1 - \frac{k_n(k_n - 1)}{2} \right) + 1 + 2^{k_n} \\ &= 2^{k_{n+1}} \left((n + 1) - 1 - \frac{k_{n+1}(k_{n+1} - 1)}{2} \right) + 1. \end{aligned}$$

logo, o teorema é válido. Caso $k_{n+1} = k_n + 1$, queremos mostrar que

$$b_{n+1} = 2^{k_{n+1}} \left((n + 1) - 1 - \frac{(k_n + 1)(k_n + 1 - 1)}{2} \right) + 1.$$

Simplificando

$$b_{n+1} = 2^{k_n+1} \left(n - \frac{(k_n+1)(k_n)}{2} \right) + 1. \quad (5.11)$$

Pela proposição anterior

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2^{k_n} \left(n - 1 - \frac{k_n(k_n-1)}{2} \right) + 1 + 2^{k_n} \\ &= 2^{k_n} \left(n - \frac{k_n(k_n-1)}{2} \right) + 1, \end{aligned}$$

que será igual a (5.11) se, e somente se,

$$\begin{aligned} 2n - (k_n+1)(k_n) &= n - \frac{k_n(k_n-1)}{2} \\ \Rightarrow 4n - 2(k_n+1)(k_n) &= 2n - k_n(k_n-1) \\ \Rightarrow 2n - 2(k_n+1)(k_n) + k_n(k_n-1) &= 0 \\ \Rightarrow 2(k_n+1)(k_n) - k_n(k_n-1) - 2n &= 0, \end{aligned}$$

donde

$$k_n^2 + 3k_n - 2n = 0. \quad (5.12)$$

Estamos no caso $k_{n+1} = k_n + 1$ e $k_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor$, logo

$$k_n \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} < k_n + 1 = k_{n+1} \leq \frac{\sqrt{8n+9}-1}{2}.$$

Desse modo, mostraremos que (5.12) é verdadeira, pois $k_n^2 + 3k_n \leq 2n$ e $k_n^2 + 3k_n \geq 2n$, então $k_n^2 + 3k_n = 2n$. Vejamos

$$k_n^2 + 3k_n \leq \left(\frac{\sqrt{8n+9}-1}{2} - 1 \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{8n+9}-1}{2} - 1 \right) = 2n.$$

Por outro lado, $k_n > \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} - 1$

$$k_n^2 + 3k_n > \left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} - 1 \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} - 1 \right) = 2n - 1,$$

que comprova a veracidade do resultado.

5.4. EXEMPLO.

Quantos movimentos são minimamente necessários para resolver o quebra cabeça Torre de Hanói com 4 pinos, segundo a conjectura de Frame-Stewart, quando temos 40 discos?

Nesse caso, temos

$$k_{40} = \left\lfloor \frac{\sqrt{8 \cdot 40 + 1} - 1}{2} \right\rfloor = 8, \quad (5.13)$$

então

$$\begin{aligned} b_{40} &= 2^{k_{40}} \left(40 - 1 - \frac{k_{40}(k_{40} - 1)}{2} \right) + 1 \\ b_{40} &= 2^8 \left(39 - \frac{8(8 - 1)}{2} \right) + 1 \\ b_{40} &= 2^8 \cdot 11 + 1. \\ b_{40} &= 2817. \end{aligned}$$

5.2 Torre de Hanói com m pinos

Há na literatura uma vastidão de artigos com resultados diversos que supõem ser a solução para o quebra cabeça com m pinos, isto é, dada a torre com m pinos e n discos empilhados no primeiro pino, do maior para o menor, de modo que o menor fique no topo, queremos transferi-los para o último pino sob as regras do caso clássico e usando a menor quantidade de movimentos. Em geral, esses trabalhos apresentam uma recorrência, baseada em um método de solução, e a forma fechada da tal recorrência. Na grande maioria das vezes, tal solução não é válida. Na próxima subsecção, veremos um exemplo desse fato.

5.2.1 Solução apresentada por Kordrostami, Ahmadzadeh e Ghane

Em 2010, os matemáticos iranianos Kordrostami, Ahmadzadeh e Ghane, em [32], propuseram uma solução do quebra cabeças. Não sabemos se essa é a melhor solução, mas segundo os autores não há outra melhor até então. Será mesmo?

Considere a torre com m hastes ou pinos e n discos. Numere os pinos de 1 a m . Queremos transferir os n discos que estão no pino 1 para o pino m , usando as regras do caso clássico.

Defina h_i^m o número de movimentos necessários para transferir i discos de um pino para outro usando m pinos.

5.5. TEOREMA.

A sequência $\{h_n^m\}$ satisfaz a recorrência

$$h_m^n = 2h_{n-(m-2)}^n + 2m - 5.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Considere o seguinte passo-a-passo:

- transferir os $m - 3$ menores discos do pino 1 para o pino $m - 1$ usando $h_{n-(m-2)}^m$ movimentos;
- alocar os que sobraram no pino 1, com exceção do maior, nos pinos livres de 2 a $m - 2$, cada pino receberá apenas um disco, deixando o pino m vago para receber o disco maior. São usados nesse passo $m - 3$ movimentos;
- transferir o maior disco para o pino m , o todos os que estão sozinhos nas hastes para o último pino, usando $1 + (m - 3) = m - 2$ movimentos;

- concluir transferindo os discos que estão na haste $m - 1$ para a última haste, para isso, usamos $h_{n-(m-2)}^n$ movimentos.

O total de movimentos será

$$\begin{aligned} h_m^n &= h_{n-(m-2)}^n + (m - 3) + (m - 2) + h_{n-(m-2)}^n \\ &= 2h_{n-(m-2)}^n + 2m - 5. \end{aligned}$$

5.6. EXEMPLO.

Para $m = 4$, estamos com o problema da seção anterior da torre com 4 pinos, a solução de [32] do Teorema 5.5 é

$$h_4^n = 2h_{n-2}^n + 2 \cdot 4 - 5 = 2h_{n-2}^n + 3.$$

A solução de Frame-Stewart (5.3) diz que

$$h_4^n = \min_{k \leq n} \{2h_{n-k}^n + 2^k - 1\},$$

ou seja, segundo [32], o mínimo seria atingido em $k = 2$.

5.7. TEOREMA.

A recorrência do Teorema 5.5 tem solução:

$$h_n^m = (2m - 5)(2^{\frac{n}{m-2}} - 1), \text{ se } n = (m - 2)q, \quad q \in \mathbb{Z},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} h_n^m &= (2r - 1)2^{\frac{n-r}{m-2}} + (2m - 5)(2^{\frac{n-r}{m-2}} - 1), \\ &\text{se } n = (m - 2)q + r, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r \leq m - 3. \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO.

Queremos uma forma fechada para $h_n^m = 2h_{n-(m-2)}^m + 2m - 5$, se dividirmos n por $m - 2$, temos que $n = (m - 2)q + r$, para $q \in \mathbb{N}$ e $r = 0, 1, 2, \dots, m - 3$. Logo, há $m - 2$ situações a serem estudadas.

1. Para $r = 0$, temos que, para algum $q \in \mathbb{N}$, $n = (m - 2)q$, então

$$\begin{aligned}
 h_n^m &= 2h_{n-(m-2)}^m + 2m - 5 \\
 &= 2(2h_{n-2(m-2)}^m + 2m - 5) + 2m - 5 \\
 &= 2^2 h_{n-2(m-2)}^m + 3(2m - 5) \\
 &= 2^2 (2h_{n-3(m-2)}^m + 2m - 5) + 3(2m - 5) \\
 &= 2^3 h_{n-3(m-2)}^m + 7(2m - 5) \\
 &= \dots \\
 &= 2^k h_0^m + (2^k - 1)(2m - 5).
 \end{aligned}$$

Como $h_0^m = 0$, então

$$h_n^m = (2^k - 1)(2m - 5) = (2^{\frac{n}{m-2}} - 1)(2m - 5).$$

2. Para $r \neq 0$, n tem a forma $n = (m - 2)q + r$, nesse caso

$$\begin{aligned}
 h_n^m &= 2h_{n-(m-2)}^m + 2m - 5 \\
 &= 2(2h_{(m-2)(k-2)+r}^m + 2m - 5) + 2m - 5 \\
 &= 2^2 h_{(m-2)(k-2)+r}^m + (2^2 - 1)(2m - 5) \\
 &= 2^2 (2h_{(m-2)(k-3)+r}^m + 2m - 5) + 3(2m - 5) \\
 &= 2^3 h_{(m-2)(k-3)+r}^m + (2^3 - 1)(2m - 5) \\
 &= \dots \\
 &= 2^k h_r^m + (2^k - 1)(2m - 5).
 \end{aligned}$$

Como h_r^m é a torre com m pinos e r discos empilhados no pino 1, e $r \leq m - 3$, então para resolver, basta distribuir os discos, 1 em cada pino usando r movimentos (o maior disco deverá ser colocado no pino final), depois realocá-los no pino m , são necessários mais $r - 1$ movimentos, totalizando $r + r - 1 = 2r - 1$ movimentos. Assim,

$$\begin{aligned} h_n^m &= 2^k(2r - 1) + (2^k - 1)(2m - 5) \\ &= (2r - 1)2^{\frac{n-r}{m-2}} + (2m - 5)(2^{\frac{n-r}{m-2}} - 1). \end{aligned}$$

5.8. EXEMPLO.

Para uma torre com 4 pinos e 6 discos, relacionemos o resultado obtido por [32] no Teorema 5.7 e o de Frame-Stewart.

Para $m = 4$, o Teorema 5.7 é:

$$h_6^4 = 3(2^{\frac{6}{2}} - 1) = 3 \cdot 7 = 21.$$

Segundo Frame-Stewart:

$$b_6 = 2^{k_6} \left(6 - 1 - \frac{k_6(k_6 - 1)}{2} \right) + 1$$

para

$$k_6 = \left\lfloor \frac{\sqrt{8 \cdot 6 + 1} - 1}{2} \right\rfloor = 3.$$

Logo,

$$b_6 = 2^3 \left(5 - \frac{3 \cdot 2}{2} \right) + 1 = 17$$

Vejam só!! O resultado de Frame-Stewart é melhor que o obtido por [32]! Logo, a solução apresentada por [32] não é a melhor de forma alguma. Na verdade, há na literatura uma série de conjecturas falsas sobre a quantidade mínima de movimentos para a torre com m pinos.

5.2.2 Solução de Frame-Stewart para m pinos

Vamos apresentar agora alguns resultados que estão em [15]. Nessa primeira parte da subseção, veremos relações recursivas que geram o número mínimo de movimentos com vários pinos.

Seja uma torre com m pinos e $n + 1$ discos dispostos da haste 1. Subdividiremos os n menores discos em $m - 2$ sub-torres que chamaremos de super-discos cada uma delas: D_1, D_2, \dots, D_{m-2} , D_1 está no topo da torre. Imagine que cada super-disco D_i tem n_i discos e $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_{m-2}$ com $\sum_{i=1}^{m-2} n_i = n$.

Denote por F_n^m o número mínimo de movimentos necessários para mover n discos no pino 1 para outro pino qualquer usando m pinos livres.

A solução proposta é mover os super-discos para os pinos auxiliares de modo que em cada pino fique apenas 1 super-disco, ou seja, os pinos $2, 3, \dots, m - 1$, depois mover o maior disco para o pino m , para terminar, alocar os super-discos no pino m . Observe que, para mover o D_1 do pino 1 para o pino 2, por exemplo, temos m hastes disponíveis para executar esse movimento, assim, $F_{n_1}^m$ movimentos. Já para mover D_2 para outra haste, não teremos mais m hastes disponíveis porque D_1 estará ocupando uma delas, precisamos de $F_{n_2}^{m-1}$ movimentos. Continuando esse raciocínio, temos que D_{m-2} será movido para uma das hastes usando $F_{n_{m-2}}^3$ movimentos. O número total de movimentos seria $F_{n_1}^m + F_{n_2}^{m-1} + \dots + F_{n_{m-2}}^3 + 1 + F_{n_1}^m + F_{n_2}^{m-1} + \dots + F_{n_{m-2}}^3$.

Na verdade, queremos descobrir quem devem ser os n'_i s de modo que essa soma anterior, nesses condições de ordem $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_{m-2}$ chamada de *monotonicidade*, seja mínima.

5.9. TEOREMA.

RELAÇÃO RECURSIVA 1

Seja F_n^m o número mínimo de movimentos necessários para mover uma torre de um pino ao outro quando temos m pinos e n discos. Então,

$$F_{n+1}^m = 2\bar{F}_n^m + 1,$$

onde

$$\bar{F}_n^m = \min \left\{ F_{n_1}^m + F_{n_2}^{m-1} + \cdots + F_{n_{m-2}}^3 \mid \sum_{i=1}^{m-2} n_i = n, \right. \\ \left. 0 \leq n_{m-2} \leq \cdots \leq n_1 \right\},$$

que será chamado de número de Frame também.

5.10. EXEMPLO.

De acordo com a construção anterior, calcularemos F_2^4 . Nessa situação, temos 4 pinos e apenas 2 discos. Então,

$$F_2^4 = 2\bar{F}_1^4 + 1,$$

onde

$$\bar{F}_1^4 = \min \{ F_{n_1}^4 + F_{n_2}^3 \mid n_1 + n_2 = 1, 0 \leq n_2 \leq n_1 \} \\ = F_1^4 + F_0^3 = 1.$$

Logo,

$$F_2^4 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

5.11. EXEMPLO.

Calcularemos F_4^4 . Nessa situação, temos 4 pinos e 4 discos. Então,

$$F_4^4 = 2\bar{F}_3^4 + 1,$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{F}_3^4 &= \min\{F_{n_1}^4 + F_{n_2}^3 \mid n_1 + n_2 = 3, 0 \leq n_2 \leq n_1\} \\ &= \min\{F_2^4 + F_1^3, F_3^4 + F_0^3\} \\ &= \min\{4, 5\} = 4,\end{aligned}$$

pois $F_2^4 = 3$ e $F_3^4 = 5$. Vamos justificar esse último:

$$F_3^4 = 2\bar{F}_2^4 + 1,$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_2^4 &= \min\{F_{n_1}^4 + F_{n_2}^3 \mid n_1 + n_2 = 2, 0 \leq n_2 \leq n_1\} \\ &= \min\{F_0^4 + F_2^4, F_1^4 + F_1^4\} \\ &= \min\{0 + 3, 1 + 1\} = 2.\end{aligned}$$

Por conseguinte, $F_3^4 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Logo,

$$F_4^4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

É natural definirmos essa mesma soma sem a condição de monotonicidade, como no resultado a seguir.

5.12. TEOREMA.

RELAÇÃO RECURSIVA 2

Seja \hat{F}_n^m o número mínimo de movimentos necessários para mover uma torre de um pino ao outro quando temos m pinos e n discos. Então,

$$\hat{F}_{n+1}^m = 2\hat{F}_n^m + 1,$$

para

$$\hat{F}_n^m = \min \left\{ \hat{F}_{n_1}^m + \hat{F}_{n_2}^{m-1} + \cdots + \hat{F}_{n_{m-2}}^3 \mid \sum_{i=1}^{m-2} n_i = n \right\}.$$

5.13. EXEMPLO.

De acordo com o teorema anterior, calcularemos \hat{F}_3^4 . Temos que

$$\hat{F}_3^4 = 2\hat{F}_2^4 + 1,$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{F}_2^4 &= \min \left\{ \hat{F}_{n_1}^4 + \hat{F}_{n_2}^3 \mid n_1 + n_2 = 2 \right\} \\ &= \{ \hat{F}_1^4 + \hat{F}_1^3 \} = 2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\hat{F}_3^4 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

5.14. EXEMPLO.

Agora, calcularemos \hat{F}_4^4 . Temos que

$$\hat{F}_4^4 = 2\hat{F}_3^4 + 1,$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{F}_3^4 &= \min \left\{ \hat{F}_{n_1}^4 + \hat{F}_{n_2}^3 \mid n_1 + n_2 = 3 \right\} \\ &= \min \{ \hat{F}_1^4 + \hat{F}_2^3, \hat{F}_2^4 + \hat{F}_1^3 \} \\ &= \{ 1 + 3, 3 + 1 \} = 4,\end{aligned}$$

pois $\hat{F}_1^4 = 1$, $\hat{F}_2^3 = 2\hat{F}_1^4 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $\hat{F}_2^4 = 3$, e $\hat{F}_1^3 = 1$.

Assim,

$$\hat{F}_4^4 = 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Baseado nas recursões anteriores, temos o próximo resultado:

§5.2. TORRE DE HANÓI COM m PINOS

5.15. TEOREMA.

CONJECTURA FORTE DE FRAME STEWART

Seja uma torre com m pinos, $m \geq 3$, e n discos, o número mínimo de movimentos necessários para movê-los do pino inicial para qualquer outro pino é

$$FS_n^m = \min\{2FS_t^m + FS_{n-t}^{m-1} | t \leq n\}.$$

5.16. EXEMPLO.

Segundo a Conjectura forte de Frame Stewart, qual a quantidade mínima de movimentos para mover 4 discos de uma torre com 4 pinos?

Procuramos

$$\begin{aligned} FS_4^4 &= \min\{2FS_t^4 + FS_{4-t}^3 | t \leq 4\} \\ &= \min\{2FS_4^4 + FS_0^3, 2FS_3^4 + FS_1^3, 2FS_2^4 + FS_2^3, 2FS_1^4 + FS_3^3\}. \end{aligned}$$

Temos que $FS_0^3 = 0$, $FS_1^3 = 1$, $FS_2^3 = 3$, $FS_1^4 = 1$, $FS_3^3 = 7$ e $FS_2^4 = 3$. Falta o valor de FS_3^4 :

$$\begin{aligned} FS_3^4 &= \min\{2FS_t^4 + FS_{3-t}^3 | t \leq 3\} \\ &= \min\{2FS_3^4 + FS_0^3, 2FS_2^4 + FS_1^3, 2FS_1^4 + FS_2^3\} \\ &= \min\{2FS_3^4, 2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 1 + 3\} = 5. \end{aligned}$$

Logo,

$$FS_4^4 = \min\{2FS_4^4, 2 \cdot 5 + 1, 2 \cdot 3 + 3, 2 \cdot 1 + 7\} = 9.$$

Um resultado, cuja demonstração é bastante técnica e será omitida aqui, relaciona essas sequências recorrentes definidas anteriormente:

5.17. TEOREMA.

Dentre as seqüências apresentadas nos Teoremas 5.9, 5.12 e 5.15, vale a igualdade abaixo:

$$F_n^m = \hat{F}_n^m = FS_n^m.$$

5.2.3 Solução de Lu, Klavzar e Milutinovic para m pinos

Nos artigos [23] e [19], de Lu, Klavzar e Milutinovic, foram apresentadas uma fórmula para o cálculo do número mínimo de movimentos para a torre com m pinos.

Defina $\Delta_{\nu,q} = \binom{\nu + q - 2}{q - 1}$, então segue o resultado:

5.18. TEOREMA.

Seja p o número de pinos da torre, $p \geq 3$. Sejam $\nu \in \mathbb{N}$ e $0 \leq x \leq \Delta_{\nu+1,p-2}$, então o número mínimo de movimentos para resolver o quebra-cabeça com $n = \Delta_{\nu,p-1} + x$ discos será

$$(P_{p-3}(\nu) + x)2^\nu + (-1)^p, \quad (5.14)$$

para

$$P_q(\nu) = (-1)^q \sum_{i=0}^q (-1)^i \Delta_{\nu,i+1}.$$

Nos próximos dois exemplos, veremos que esse resultado é análogo aos obtidos para o caso clássico com 3 pinos e ao Teorema 5.3, para 4 pinos.

5.19. EXEMPLO.

Para 3 pinos, temos que: $p = 3$,

$$\Delta_{\nu+1,1} = \begin{pmatrix} \nu + 1 + 1 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

e para

$$n = \Delta_{\nu,2} + x = \begin{pmatrix} \nu + 2 - 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} + x = \begin{pmatrix} \nu \\ 1 \end{pmatrix} + x = \nu + x,$$

o número mínimo de movimentos de (5.18) será

$$(P_{3-3}(\nu) + x)2^\nu + (-1)^3 = (P_0(\nu) + x)2^\nu - 1,$$

em que

$$P_0(\nu) = (-1)^0 \cdot (-1)^0 \Delta_{\nu,1} = \Delta_{\nu,1} = \begin{pmatrix} \nu + 1 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Substituindo na fórmula do número mínimo de movimentos:

$$(1 + x)2^\nu - 1.$$

Vimos que $n = x + \nu$, e

$$0 \leq x \leq \Delta_{\nu+1,1} = \begin{pmatrix} \nu + 1 + 1 - 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Para $x = 0$, temos que $n = \nu$, e o número mínimo será

$$(1 + 0)2^\nu - 1 = 2^\nu - 1.$$

Para $x = 1$, $n = 1 + \nu$ e o número mínimo será

$$(1 + 1)2^\nu - 1 = 2 \cdot 2^{\nu-1} - 1 = 2^\nu - 1.$$

5.20. EXEMPLO.

O caso com 4 pinos, isto é, $p = 4$, e $0 \leq x \leq \Delta_{\nu+1,2} = \nu + 1$, pois

$$\Delta_{\nu+1,2} = \binom{\nu + 1 + 2 - 2}{2 - 1} = \binom{\nu + 1}{1} = \nu + 1.$$

Para

$$n = \Delta_{\nu,3} + x = \binom{\nu + 3 - 2}{3 - 1} + x = \binom{\nu + 1}{2} + x = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + x,$$

o número mínimo de movimentos de (5.18) será

$$(P_{4-3}(\nu) + x)2^\nu + (-1)^4 = (P_1(\nu) + x)2^\nu + 1,$$

em que

$$\begin{aligned} P_1(\nu) &= (-1)^1 \cdot [(-1)^0 \Delta_{\nu,1} + (-1)^1 \Delta_{\nu,2}] \\ &= -\Delta_{\nu,1} + \Delta_{\nu,2} \\ &= \binom{\nu + 2 - 2}{2 - 1} - \binom{\nu - 1}{1 - 1} = \binom{\nu}{1} - \binom{\nu - 1}{0} \\ &= \nu - 1. \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula do número mínimo de movimentos:

$$(\nu - 1 + x)2^\nu + 1.$$

Vimos que $n = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + x$, substituindo temos

$$\left(\nu - 1 + n - \frac{\nu(\nu + 1)}{2}\right)2^\nu + 1 = \left(n - 1 - \frac{\nu(\nu - 1)}{2}\right)2^\nu + 1.$$

§5.2. TORRE DE HANÓI COM m PINOS

Segundo o Teorema 5.3, o número mínimo de movimentos coincide com a expressão anterior para $\nu = k_n$. Mas será que é possível? Veremos que sim! Observe que $k_n \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$ e

$$\begin{aligned}n &= \frac{k_n(k_n + 1)}{2} + x \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2} + x \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{8n+1}+1}{2} \right) \frac{1}{2} + x \\ &= n + x.\end{aligned}$$

Agora, basta escolher x que satisfaça a igualdade:

$$n = \frac{k_n(k_n + 1)}{2} + x.$$

5.21. EXEMPLO.

Conforme o exemplo anterior, para uma torre com 4 pinos e 6 discos, determinaremos o x que exemplifica a semelhança entre os resultados de Frame-Stewart e o Teorema 5.18.

Nessa situação, $n = 6$ e $k_6 = \left\lfloor \frac{\sqrt{8 \cdot 6 + 1} - 1}{2} \right\rfloor = 3$, segundo Frame-Stewart:

$$\begin{aligned}b_6 &= 2^{k_6} \left(6 - 1 - \frac{k_6(k_6 - 1)}{2} \right) + 1 \\ &= 2^3 \left(6 - 1 - \frac{3(3 - 1)}{2} \right) + 1 = 17.\end{aligned}$$

Agora, de acordo com o Teorema 5.18, $n = \frac{k_n(k_n+1)}{2} + x$, logo $6 = \frac{3(3+1)}{2} + x = 6 + x$, e então $x = 0$. O número mínimo será: $(3 - 1 + 0)2^3 + 1 = 17$ também.

5.3 Torre de Hanói cíclica

Em 1981, o professor Atkinson do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Carleton, no Canadá, publicou um curto artigo [2] criando uma nova regra na ordem da movimentação das peças no caso clássico com três pinos, segundo ele os discos só poderiam ser movidos nessa direção $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, denominada anti-horária, ou $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, direção horária.

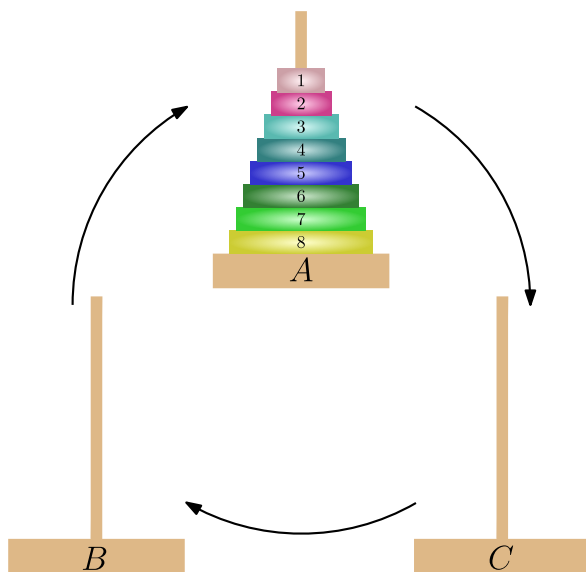


Figura 5.4: Torre de Hanói cíclica

Um modo mais simples de entender essa versão do jogo é considerar que os pinos estão fixados sobre os vértices de um triângulo equilátero ABC :

Figura 5.5: Solução para o pino C

Figura 5.6: Solução para o pino B

Os discos poderão ser movidos apenas no sentido anti-horário, isto é, de A para B , de B para C e C para A . Ou também no sentido horário, isto é, de A para C , de C para B e de B para A .

O professor acreditava que a solução não seria tão simples como a do caso clássico. Vejamos a solução proposta por ele.

Por exemplo, para 2 discos a solução encontrada para o caso clássico foi $2^2 - 1 = 3$ movimentos. Já nesse modelo de Atkinson, se considerarmos apenas o sentido horário, precisamos mover a menor para C , depois movê-la para B , mover a maior para C , mover a menor para A e por último a menor para C , concluindo 5 movimentos. Movendo apenas no sentido anti-horário precisamos mover a menor para B , movê-la novamente para C , mover a maior para B , a menor para A , maior para C , menor para B , menor para C , totalizando 7 movimentos!

Figura 5.7: Solução para o pino C

Figura 5.8: Solução para o pino B

Vejamos agora uma solução para $n = 3$ discos:

Figura 5.9: Solução para o pino C

Figura 5.10: Solução para o pino B

Para encontrar expressões fechadas para soluções desse quebra-cabeças, Atkinson observou uma relação entre os movimentos horários e anti-horários. Considere duas seqüências $\{d_n\}$ e $\{h_n\}$, a primeira refere-se ao número mínimo de movimentos necessários para mover n discos do pino A para C no sentido anti-horário, e a segunda no sentido horário.

5.22. TEOREMA.

Sejam as seqüências definidas anteriormente, então para todo $n \geq 1$

$$d_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n - 1$$

e

$$h_n = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n - 1.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiro ele observou que mover um disco ou uma quantidade de discos de A para C no sentido anti-horário tem a mesma quantidade de movimentos de movê-lo de A para B no sentido horário.

É natural supor que $h_0 = d_0 = 0$. Se temos 1 disco em A , para movê-lo para C no sentido horário só é necessário 1 movimento, então $h_1 = 1$. Se quisermos movê-lo para C usando sentido anti-horário são necessários 2 movimentos, primeiro o movemos para B e depois para C , logo $d_1 = 2$.

Se tivermos 2 discos em A , para movê-los para C no sentido horário, precisamos mover o menor para C , depois o mesmo para B , mover o maior para C , o menor para A e depois para C , totalizando 5 movimentos horários, então $h_2 = 5$. Se quisermos aplicar movimentos anti-horários também, fazemos: o menor para B , o menor para C , o maior para B , o menor para A , o maior para C , o menor para B e depois para C , totalizando 7 movimentos e $d_2 = 7$.

Para 3 discos no sentido horário, basta movermos os dois menores para B passando por C , isso é equivalente a mover os dois discos de A para C no sentido anti-horário logo d_2 movimentos, o maior para C no sentido horário, e por último os dois menores de B para C no sentido horário, que é o mesmo que d_2 . Assim, $h_3 = 2d_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.

É intuitivo que $h_n = 2d_{n-1} + 1$, pois se temos n discos em A e desejamos movê-los para C usando apenas o sentido horário, transferimos os $n - 1$ menores para B usando d_{n-1} movimentos, pois transferiremos para C e depois para B , o maior para C com 1 movimento, e por último os $n - 1$ menores para C com d_{n-1} movimentos, pois transferiremos para A e depois para C ,

totalizando $h_n = 2d_{n-1} + 1$ movimentos. Assim,

$$h_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2d_{n-1} + 1 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Podemos observar também que

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2d_{n-1} + h_{n-1} + 2, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

pois se temos n discos em A e queremos movê-los para C usando movimentos anti-horários, devemos alocar os $n - 1$ menores discos em C passando por B , logo usando d_{n-1} movimentos, mover o maior disco para B , mover os $n - 1$ menores para A usando h_{n-1} movimentos, mover o maior de B para C , e terminar movendo os $n - 1$ menores de A para C usando d_{n-1} movimentos, totalizando $2d_{n-1} + h_{n-1} + 2$ movimentos.

Para $n \geq 1$

$$\begin{cases} h_n = 2d_{n-1} + 1 \\ d_n = 2d_{n-1} + h_{n-1} + 2 \end{cases}$$

Se substituirmos a informação de h_n em d_n , temos que $h_{n-1} = 2d_{n-2} + 1$ e

$$d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2} + 3, \quad (5.15)$$

encontramos uma relação recursiva linear de ordem 2 não-homogênea. O método de solução é encontrar uma solução da homogênea associada a ela e depois inferir uma solução particular. Essa equação foi resolvida no Exemplo 2.37, a solução é

$$d_n = C_1(1 + \sqrt{3})^n + C_2(1 - \sqrt{3})^n - 1.$$

Vamos descobrir os valores de C_1 e C_2 usando que $d_0 = 0$ e $d_1 = 2$:

$$\begin{cases} d_0 = C_1(1 + \sqrt{3})^0 + C_2(1 - \sqrt{3})^0 - 1 = 0 \\ d_1 = C_1(1 + \sqrt{3})^1 + C_2(1 - \sqrt{3})^1 - 1 = 2 \end{cases}$$

§5.4. TORRE DE HANÓI DUPLA

Resolvendo o sistema encontramos que $C_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$ e $C_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$, logo

$$d_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1.$$

E $h_n = 2d_{n-1} + 2$, assim

$$\begin{aligned} h_n &= 2\frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^{n-1} + 2\frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^{n-1} - 2 + 1 \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})^{n-1} + \frac{3-2\sqrt{3}}{3}(1-\sqrt{3})^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Em ambos os casos dizemos que essa solução é na ordem de $2, 733^n$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{2, 733^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{2, 733^n} = 1,$$

resumidamente $O(2, 733^n)$, bem mais que $2^n - 1$ do caso clássico.

Generalizações da Torre de Hanói Cíclica foram propostas por Er em [12]. Ele apresentou a solução para versões com mais de 3 pinos.

5.4 Torre de Hanói dupla

Uma variante do caso clássico é a conhecida por Torre de Hanói Dupla. Ela contém um número par de discos, $2n$ discos, por exemplo, com n tamanhos distintos, exatamente 2 de cada tamanho. Como no caso clássico, podemos mover apenas um disco por vez e um disco maior nunca poderá ficar em cima de um menor.

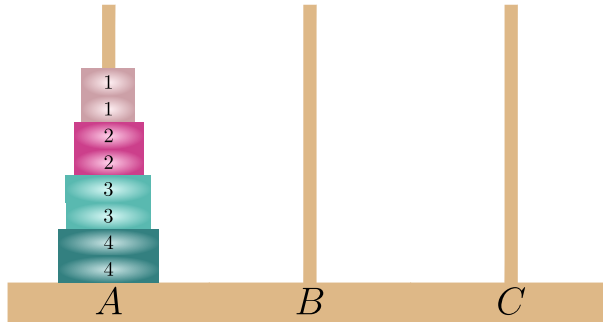


Figura 5.11: Torre de Hanói dupla com 4 pares de discos.

Neste caso, qual será a quantidade mínima de movimentos para mover a torre da haste A para a haste C , considerando que os discos de mesmo tamanho são idênticos? Chamaremos de irmãos gêmeos os discos iguais.

Exemplo com $n = 1$ par de discos:

§5.4. TORRE DE HANÓI DUPLA

Exemplo com $n = 2$ pares de discos:

Exemplo com $n = 3$ pares de discos:

E se os discos de mesmo tamanho fossem pintados com cores distintas e quiséssemos transferir a torre que está em A para C de modo que a distribuição fosse idêntica?

Ainda no caso anterior onde os gêmeos têm cores distintas, e se desejássemos movê-los para a outra haste sem mudar a ordem em que eles foram distribuídos inicialmente?

As respostas para essas três perguntas estão em [33] e serão reproduzidas aqui.

5.23. TEOREMA.

Seja D_n o número de movimentos necessários para mover a torre de Hanói dupla da haste A para a haste C quando os discos de mesmo tamanho são idênticos, então $D_n = 2^{n+1} - 2$.

DEMONSTRAÇÃO.

Primeiramente observe que se aplicarmos o algoritmo do caso clássico, para $2n$ discos, cada movimento de um disco será repetido com sua cópia, irmão gêmeo, então resolvemos o problema usando o dobro de movimentos se tivéssemos n discos: $2(2^n - 1) - 2^{n+1} - 2$ movimentos. Mas será que essa solução produz menor quantidade de movimentos? Veremos que não, mas nos dá um limitante superior para D_n .

É certo que $D(1) = 2$:

Para o caso $n \geq 2$, observe que para mover os 2 últimos discos, ou seja, os gêmeos com maior diâmetro, precisamos mover primeiro os $2n - 2$ discos menores para a haste B , usaremos para isso D_{n-1} movimentos. Logo a seguir, com 2 movimentos, transferimos os gêmeos maiores para C , o próximo passo é mover a torre de B para C efetuando D_{n-1} movimentos, totalizando $D_n = D_{n-1} + 2 + D_{n-1} = 2D_{n-1} + 2$, cuja solução está na Secção 2.3 para $a = b = 2$ e $c = 0$: $D_n = 2(2^n - 1)$.

§5.4. TORRE DE HANÓI DUPLA

Agora, mostraremos resultados para o caso onde os gêmeos têm cores distintas, ou seja, peças de mesmo tamanho serão diferentes, e desejamos reproduzir a torre original que está em A para a haste C .

Exemplo com $n = 1$ par de discos:

Exemplo com $n = 2$ pares de discos:

Exemplo com $n = 3$ pares de discos:

5.24. TEOREMA.

Seja C_n o número de movimentos necessários para mover a torre de Hanói dupla da haste A para a haste C quando os discos de mesmo tamanho são distintos, isto é, têm cores diferentes e queremos reproduzir a torre original, então para $n \geq 1$

$$C_n = 2^{n+2} - 5. \quad (5.16)$$

DEMONSTRAÇÃO.

O caso $n = 1$ é aquele em que a torre tem 2 discos de mesmo diâmetro com cores distintas. Assim, precisaríamos de 3 movimentos para transferi-los da haste A para C :

Logo, $C_1 = 3 = 2^3 - 5$. Para $n = 2$, temos 4 discos, como na figura

O passo-a-passo de uma possível solução é:

- Transferiremos os dois menores para a haste C usando $D_1 = 2$ movimentos, logo as posições das cores também estarão trocadas;

§5.4. TORRE DE HANÓI DUPLA

- Transferimos o escuro para a haste B com 1 movimento;
- Movemos os 2 menores para B com D_1 movimentos;
- O maior disco da cor clara vai para C , sua posição final, usando 1 movimento;
- Os 2 menores que estão em B vão para A , com D_1 movimentos;
- O maior disco da cor escura sai de B e vai para C com 1 movimento;
- Os dois menores que estão em A vão para C com D_1 movimentos;

Totalizando

$$C_2 = D_1 + 1 + D_1 + 1 + D_1 + 1 + D_1 = 4D_1 + 3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11 = 2^4 - 5$$

como dado em (5.16).

Vale salientar que ao mudarmos de hastes 2 discos de mesmo diâmetro usando $D_1 = 2$ movimentos trocamos as posições das cores, assim se mudarmos outra vez voltamos à posição original. Logo, um número par de trocas nos garante a posição original das cores que tanto queremos aqui.

Para encontrar C_n , é intuitivo fazer de modo semelhante ao anterior:

- Movemos os $n - 1$ gêmeos (não idênticos) menores para C usando D_{n-1} movimentos;
- Transferiremos o maior disco escuro para B com 1 movimento;

- Os discos de C serão movidos para B com D_{n-1} movimentos;
- O maior disco claro será transferido para C com 1 movimento;
- Os $2n - 2$ discos menores serão transferidos para A com D_{n-1} movimentos;
- O maior disco escuro muda para a haste C com 1 movimento;
- Os discos de A mudam para C com D_{n-1} movimentos.

Totalizando

$$C_n = 4D_{n-1} + 3 = 4(2^n - 2) + 3 = 2^{n+2} - 5.$$

Mas será que esse é o melhor algoritmo para resolver essa torre dupla mesmo? Concentrando os olhares nos dois discos maiores: precisamos mover o disco maior escuro para a haste B e depois mover seu gêmeo claro para C , por fim transportar o disco escuro de B para C . Nesse meio tempo, os demais discos se alternam entre as hastes. Esse é o algoritmo proposto anteriormente.

Uma segunda alternativa seria acrescentar mais um passo no movimento dos gêmeos maiores:

- mover os menores para C usando D_{n-1} movimentos;
- mover o mais escuro para B , mover o mais claro para B , totalizando 2 movimentos;
- mover os menores para A com D_{n-1} movimentos;
- mover os gêmeos maiores para C com 2 movimentos;

§5.4. TORRE DE HANÓI DUPLA

- mover os menores para C com C_{n-1} movimentos.

Observe que no último passo foi necessário usar C_{n-1} movimentos, pois foram realizados $2D_{n-1}$ movimentos, e mais D_{n-1} movimentos não manteria a ordem original da torre. Logo, o total para esse algoritmo alternativo seria

$$C_n = 2D_{n-1} + 4 + C_{n-1} = 2(2^n - 2) + 4 + C_{n-1} = C_{n-1} + 2^{n+1}.$$

Resolvendo a recorrência, feita no Exemplo 2.25, obtemos que $C_n = 2^{n+2} - 5$ também.

A última situação é bem parecida com a anterior, mas a ordem das cores dos gêmeos não pode mudar em nenhum passo.

Exemplo com $n = 3$ pares de discos:

Exemplo com $n = 4$ pares de discos:

5.25. TEOREMA.

Seja J_n o número de movimentos necessários para mover a torre de Hanói dupla da haste A para a haste C quando os discos de mesmo tamanho são distintos, isto é, têm cores diferentes, e em cada movimento desses gêmeos eles nunca aparecem juntos em posições trocadas, então para $n \geq 1$

$$J_n = 2^{2n} - 1. \quad (5.17)$$

DEMONSTRAÇÃO.

O algoritmo que nos dará a solução para o problema é extremamente semelhante ao primeiro proposto no caso anterior. Fi-

§5.5. TORRE DE HANÓI MAGNÉTICA

xemos novamente o olhar nos gêmeos maiores, precisamos movê-los da seguinte forma para minimizar a quantidade de movimentos: o mais escuro vai para B , o maior mais claro vai para C (ele não pode ir para B pois não pode ficar sobre o mais escuro), para terminar os movimentos dos gêmeos maiores o mais escuro vai para C . Nesse meio tempo, os menores discos se movem entre as hastes para possibilitar esse movimento descrito dos maiores, lembrando que devem se mover obedecendo as novas regras, em suma:

- os menores discos, $n - 1$ pares, movem-se para C usando J_{n-1} movimentos;
- o maior disco escuro para para B ;
- os menores vão para B com J_{n-1} movimentos;
- o maior mais claro se move de A para C ;
- os menores vão para A com J_{n-1} movimentos;
- o maior mais escuro vai para C ;
- os menores vão para C com J_{n-1} movimentos;

totalizando $J_n = 4J_{n-1} + 3$. A solução dessa recorrência é $J_n = 2^{2n} - 1$.

5.5 Torre de Hanói magnética

Essa versão do jogo foi proposta pelo dr. Uri Levy no ano 2009. Segundo ele, no caso clássico das torres o número de mo-

vimentos de cada disco é uma potência de 2 e o total de deslocamentos para concluir o jogo é $2^n - 1$. O professor Uri questionou se não existiria uma versão onde a base 3 fosse explorada, então publicou o trabalho [20] apresentando-a. As regras de movimentação serão alteradas e acrescenta-se também uma restrição magnética.

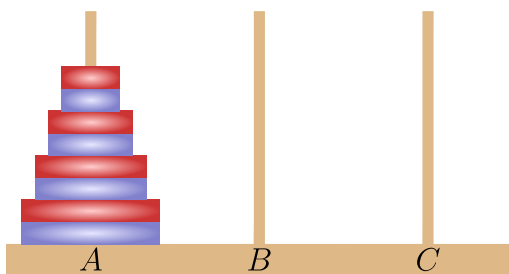


Figura 5.12: Torre de Hanói Magnética com 4 discos.

Considere n discos distintos e 3 hastes como no caso clássico, Aqui, cada disco terá duas cores, um lado será azul e o outro vermelho. O lado azul ficará virado para a base das hastes. Os movimentos são: retirar um disco de uma haste, girá-lo invertendo as cores e colocá-lo em outra. A regra é jamais duas cores iguais devem se tocar! A posição final esperada é os discos dispostos na haste C de modo decrescente de baixo para cima e lados de mesma cor não se tocam.

Denominamos de M_n o número mínimo de movimentos necessários para mover a torre de acordo com as regras. Vejamos os exemplos a seguir.

§5.5. TORRE DE HANÓI MAGNÉTICA

5.26. EXEMPLO.

Para 1 disco, é necessário apenas 1 movimento: Logo, $M_1 = 1$.

5.27. EXEMPLO.

Para 2 discos, são necessários 4 movimentos: Logo, $M_2 = 4$.

5.28. EXEMPLO.

Para 3 discos, são necessários 11 movimentos: Logo, $M_3 = 11$.

O próximo resultado expressa a quantidade mínima de movimentos necessários para mover uma torre nessa situação.

5.29. TEOREMA.

Sejam S_n o número mínimo de movimentos necessários para mover n discos da Torre de Hanói Magnética da haste A para a haste C . Então

$$M_n = 3^{n-1} + n - 1.$$

A demonstração desse resultado será feita após apresentarmos uma variante da Torre de Hanói Magnética que nos auxiliará nessa prova.

A Torre de Hanói Magnética Colorida é aquela cujas bases dos pinos ou hastes são coloridas, por exemplo a primeira base vermelha e ambas as outras azuis. Nesse caso, a regra de não

§5.5. TORRE DE HANÓI MAGNÉTICA

juntar as cores iguais vale para as bases também. Para 1 e 2 discos as soluções são as mesmas apresentadas anteriormente. Para 3 discos, precisamos de 13 movimentos:

Vejam o caso geral da Torre de Hanói Magnética Colorida.

5.30. TEOREMA.

Sejam M_n^C o número mínimo de movimentos necessários para mover n discos da Torre de Hanói Magnética Colorida da base vermelha, haste A , para a de base azul, haste C . Então

$$M_n^C = \frac{3^n - 1}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam n discos dispostos na base vermelha, haste A , que moveremos para base azul, haste C , na Torre Magnética Colorida. Desejamos mover o maior para a haste C , base azul, para isso retiramos os $n - 1$ menores que estão sobre ele e os colocamos na haste B , base azul, usando M_{n-1}^C movimentos.

Com um único movimento, retiramos o maior disco da base A para colocá-lo na base C , agora colocaremos os discos restantes sobre o maior disco. A torre com $n - 1$ discos está em B , base azul, e queremos transferi-la para C , base azul também. Cada transferência de torre magnética troca a posição da cor dos discos, assim, serão necessárias duas transferências para que consigamos colocá-los na base C sobre o maior disco. Transferir a torre de base azul para base vermelha tem a mesma quantidade de movimentos de transferir de base vermelha para base azul, pois é uma operação inversa, logo são necessários $2M_{n-1}^C$ movimentos. Totalizando $M_n^C = 3M_{n-1}^C + 1$, cuja solução recursiva

está no Proposição 2.29 para $a = 3$, $b = 1$ e $c = 0$, então

$$M_n^C = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Agora, faremos a prova do Teorema 5.29.

DEMONSTRAÇÃO.

PROVA DO TEOREMA 5.29

Sejam n discos dispostos na haste A que moveremos para haste C . Desejamos mover o maior para a haste C , para isso retiramos os $n - 1$ menores que estão sobre ele e os colocamos na haste B , usando M_{n-1} movimentos.

Com um único movimento, retiramos o maior disco da base A para aloca-lo na base C , totalizando até agora $M_{n-1} + 1$ movimentos.

Agora, desejamos colocar o segundo maior disco, disco $n - 1$, sobre o disco n , para isso precisamos mover a torre que está em cima dele para a haste A , ainda não podemos transferir o disco $n - 1$ para C por causa da cor vermelha que está para baixo, então este disco precisa ir para a haste A e depois poderá ir para a C . Contudo, observe que a sub-torre que está em cima do disco $n - 1$ se movimentará para a haste A e depois para a haste C , como o disco n está em C e o disco $n - 1$ está em B , e eles não se movimentarão enquanto a sub-torre transita, então a quantidade de movimentos dela é equivalente à da Torre de Hanói Colorida, M_{n-2}^C . O total de movimentos dessa etapa são $M_{n-2}^C + M_{n-2}^C + 1 + 1$.

Nesse momento, a configuração é os dois maiores discos na haste C e a sub-torre com $n - 2$ discos em B . Resta apenas

§5.6. TORRE DE HANÓI CAÓTICA

transferir os $n - 2$ discos para C também, como a base da sub-torre está vermelha, então ela deverá ir para a haste A e depois para a C , totalizando $2M_{n-2}^C$ movimentos.

Somando todas as etapas, obtivemos

$$\begin{aligned}M_n &= M_{n-1} + 1 + 2M_{n-2}^C + 2 + 2M_{n-2}^C \\ &= M_{n-1} + 4M_{n-2}^C + 3,\end{aligned}$$

Substituindo o valor de M_n^C segue que

$$\begin{aligned}M_n &= M_{n-1} + 4\frac{3^{n-2} - 1}{2} + 3 \\ &= M_{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + 1.\end{aligned}$$

Resolvendo essa recursividade, obtemos que

$$\begin{aligned}M_n &= S_1 + 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-2}) + (n - 1) \\ &= 1 + 2\frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} + (n - 1) \\ &= 3^{n-1} + n - 1.\end{aligned}$$

5.6 Torre de Hanói Caótica

A Torre de Hanói Caótica é comumente conhecida por The Bottleneck Tower of Hanoi, e se encontra descrita no livro [15]. Ela foi criada por Wood em 1981 [37], mas somente 10 anos depois que Poole a nomeou e resolveu o problema da quantidade mínima de movimentos no artigo [31]. A palavra "bottle-neck" significa gargalo, e a torre recebeu esse nome pois a quantidade mínima de movimentos necessários para resolvê-la é bem menor que a do caso clássico. Vamos conhecê-la.

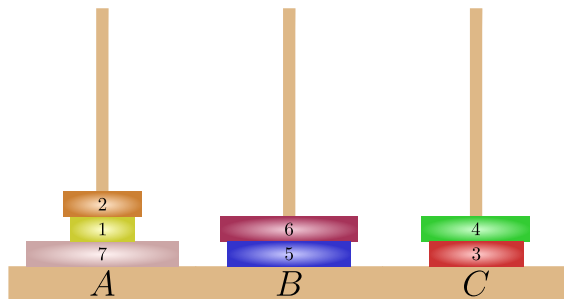


Figura 5.13: Torre de Hanói Caótica com 7 discos

Considere a torre com 3 hastes ou pinos, iremos desconstruir as regras de movimento e criar novas. Agora, um disco maior poderá ficar sobre um menor, contudo que satisfaça uma condição. Numeraremos os discos de modo crescente de 1 a n . Seja $t \in \mathbb{N}$ fixado que será denominado de discrepância do jogo. A nova regra será o disco d poderá ser movido para a haste X , por exemplo, se $d - d' < t$, para todo d' pertencente à haste X .

Para o caso $t = 1$, temos a situação clássica pois $d - d' < 1$, implica em $d \leq d'$, o diâmetro do disco d é menor ou igual ao diâmetro do disco d' . Essa é exatamente a regra clássica!

Para $t = 2$, se tivermos 2 discos, a solução clássica é válida. Mas para 3 discos temos uma situação diferente. Movemos o disco 1 para B , depois o disco 2 para B também, isso é possível pois $2 - 1 < 2$. Logo a seguir, movemos o disco 3 para C , seguindo movemos o 2 para C e o 1 para C também. Totalizando 5 movimentos, o que é diferente dos $2^3 - 1 = 7$ movimentos do caso clássico. Na verdade, para qualquer $t \geq 2$ será necessário apenas 5 movimentos para 3 discos.

A pergunta é: qual a quantidade mínima de movimentos para transportar n discos dispostos conforme essa regra de uma torre a outra?

Vamos apresentar a solução de Poole. Semelhante ao modo clássico, mova os $n - 1$ menores discos da haste A para B , transfira o maior disco de A para C , para terminar realoque os discos de B em C . Faremos isso usando a discrepância ao máximo que pudermos, e assim, diminuiremos a quantidade de movimentos!

Tome os $n - 1$ menores discos e os divida em sub-torres com t discos cada, com exceção talvez da primeira delas, que estará no topo, a qual pode ter menos que t discos. Observe que, de acordo com a regra de discrepância, os discos das sub-torres podem ser realocados na ordem inversa, isto é, do menor para o maior. Suponha que sobre r discos para a menor das sub-torres, $1 \leq r \leq t$, chame cada sub-torre de B_i , com essa divisão obtivemos N sub-torres, então $N - 1$ delas terão t discos e a menor com r discos, logo,

$$n - 1 = (N - 1)t + r.$$

Segundo as regras do jogo, o bloco B_i não pode ficar sobre o bloco B_j , se $i > j$. Analisando cada bloco como se fosse um único disco e mais o disco maior, temos $N + 1$ discos e a solução clássica seria a perfeita. No Teorema 3.4, o número de vezes que um disco k se move da solução do caso clássico é 2^{N+1-k} . Cada bloco B_k é movido um número par de vezes: 2^{N+1-k} . Assim, se o bloco tem t discos, e em cada movimento do bloco k todos os seus discos são movidos uma única vez, então $t \cdot 2^{N+1-k}$ é o número de movimentos dos discos do bloco.

Desse modo, a quantidade mínima de movimentos total será:

$$\begin{aligned} & r \cdot 2 \cdot 2^{N-1} + t \cdot 2 \cdot 2^{N-2} + t \cdot 2 \cdot 2^{N-3} + \dots + t \cdot 2 \cdot 2^{(N-N)} + 1 \\ &= r \cdot 2^N + 2t(2^{N-2} + \dots + 2^0) + 1 \\ &= r \cdot 2^N + 2t(2^{N-1} - 1) + 1 \\ &= (r + t)2^N - 2t + 1. \end{aligned}$$

Por exemplo, para discrepância $t = 3$ e 4 discos, então

$$n - 1 = 3 = (N - 1) \cdot 3 + r \rightarrow r = 0 \text{ e } N = 2.$$

5.31. TEOREMA.

POOLE

Seja uma torre com n discos distintos dispostos em ordem decrescente na haste A . O número mínimo de movimentos para que os aloquemos na haste C obedecendo as regras caóticas e discrepância t é

$$(r + t)2^N - 2t + 1, \quad (5.18)$$

em que N e r satisfazem

$$n - 1 = (N - 1)t + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < t.$$

A demonstração do Teorema 5.31, apresentada por Poole, não está totalmente correta, uma vez que ele não considerou os casos possíveis de configuração da torre antes do último e único movimento do disco n . O algoritmo proposto por Poole é: os $n - 1$ menores discos saem da haste A , o maior disco será movido para C , os demais discos estariam distribuídos na haste B . Contudo, a discrepância t permite que os discos $n - t + 1, \dots, n - 1$ estejam arbitrariamente dispostos nas hastes A ou B .

Por exemplo, para $n = 7$ discos, apresentamos uma solução distinta da proposta por Poole, mas também válida, feita por Dinitz e Solomon em [10]:

Quinze anos depois, Xiaomin Chen, Tian e Wang [7] e Dinitz e Solomon [10], em trabalhos independentes, provaram que a demonstração de Poole estava incompleta. Ambos os trabalhos trouxeram provas concisas e corretas, mas não triviais; por isso, as omitiremos aqui.

5.32. EXEMPLO.

Para $n = 2$ discos e $t = 2$, vimos que são necessários 3 movimentos. Vamos aplicar (5.18), precisamos do valor de N e de r :

$$n - 1 = 2 - 1 = 1 = (N - 1) \cdot 2 + r,$$

logo $N = 1$ e $r = 1$. Assim, a quantidade mínima de movimentos é

$$(1 + 2)2^1 - 2 \cdot 2 + 1 = 3.$$

5.33. EXEMPLO.

Para $n = 3$ discos e $t = 2$, vimos que são necessários 5 movimentos. Obteremos de (5.18) também. O valor de N e r :

$$n - 1 = 3 - 1 = 2 = (N - 1) \cdot 2 + r,$$

logo $N = 2$ e $r = 0$. Assim, a quantidade mínima de movimentos é

$$(0 + 2)2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

5.34. EXEMPLO.

Agora, vamos comparar com a torre clássica para $n = 4$. Sabemos que precisamos de $2^4 - 1 = 15$ movimentos no caso clássico, vejamos para o caso caótico.

Para $t = 2$, temos

$$n - 1 = 4 - 1 = 3 = (N - 1) \cdot 2 + r,$$

logo $N = 2$ e $r = 1$. Assim, por (5.18) a quantidade mínima de movimentos é

$$(1 + 2)2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9.$$

5.7 Torre de Antuérpia

A torre de Antuérpia foi criada em 1981 por Wood, provavelmente em uma de suas passagens pela cidade belga, dona de um dos maiores portos do mundo. Em [36], Wood explicita o jogo. Com três hastes e discos coloridos dispostos nelas, cada haste contém n discos de uma única cor, mas com tamanhos diferentes, dispostos do menor para o maior. O total são $3n$ discos, formando três torres semelhantes, com exceção das cores distintas.

O objetivo do jogo é transferir as torres para hastes distintas das originais, seguindo as regras de disco maior não pode ficar sobre um menor. Em 1991, Minsker resolveu o problema e o publicou em [25].

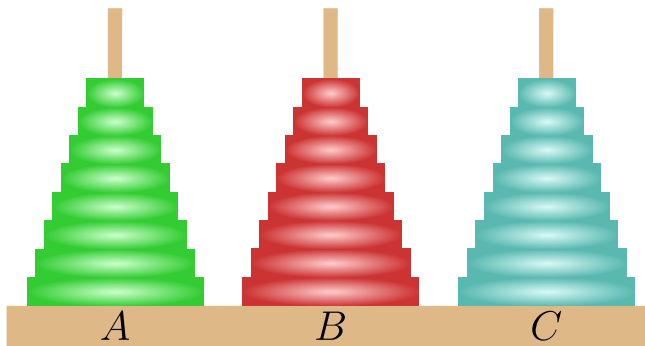


Figura 5.14: Torre de Antuérpia com 24 discos

Vejam a solução para $n = 1$:

São necessários pelo menos 5 movimentos. Há outra possibilidade:

Desse modo, concluímos que a solução não é única.

§5.7. TORRE DE ANTUÉRPIA

Agora, veremos uma solução para $n = 2$:

Nessa animação, usamos 22 movimentos para concluir o jogo. Agora, vejamos o resultado de Minsker [25]:

5.35. TEOREMA.

TORRE DE ANTUÉRPIA

Sejam $3n$, $n \geq 2$, discos dispostos em três hastes conforme a configuração da Torre de Antuérpia, então o número mínimo de movimentos para transferir as torres de hastes será

$$3 \cdot 2^{n+2} - 8n - 10.$$

5.36. EXEMPLO.

Conforme a animação anterior, para 2 discos em cada haste, temos $n = 2$, segundo Minsker, são necessários

$$3 \cdot 2^{2+2} - 8 \cdot 2 - 10 = 22$$

movimentos no mínimo.

5.37. EXEMPLO.

Para $n = 3$, isto equivale a 9 discos no total, 3 em cada haste, são necessários

$$3 \cdot 2^{3+2} - 8 \cdot 3 - 10 = 62$$

movimentos.

5.7.1 Pequena torre de Antuérpia

A Pequena Torre de Antuérpia, uma variante da Torre de Antuérpia, é composta apenas por duas torres, semelhantes em seus tamanhos mas com cores distintas, dispostas nas hastes A e B , o objetivo é trocá-las de hastes. Para $n = 1$, são necessários três movimentos para concluir o jogo.

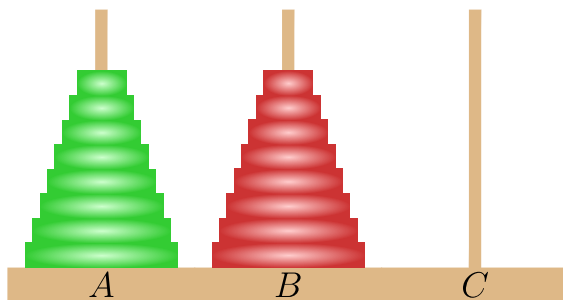


Figura 5.15: Pequena Torre de Antuérpia com 24 discos

Minsker, em [26] provou o seguinte teorema:

5.38. TEOREMA.

PEQUENA TORRE DE ANTUÉRPRIA

Sejam duas torres idênticas nos tamanhos dos discos, mas de cores distintas, dispostas nas hastes A e C , o número mínimo de movimentos necessários para movê-las para hastes distintas das

§5.7. TORRE DE ANTUÉRPIA

originais obedecendo as regras clássicas é

$$\frac{1}{3}(7 \cdot 2^{n+1} - 9n - 11 + n), \text{ se } n \text{ ímpar,}$$

e

$$\frac{1}{3}(7 \cdot 2^{n+1} - 9n - 11), \text{ se } n \text{ par.}$$

A quantidade de modos de resolver esse problema é

$$2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}.$$

5.39. EXEMPLO.

Para a Pequena Torre de Antuérpia com $n = 1$, são necessários quantos movimentos? Quantas soluções distintas para o jogo existem?

Pelo Teorema 5.38, são necessários

$$\frac{1}{3}(7 \cdot 2^{1+1} - 9 \cdot 1 - 11 + 1) = \frac{1}{3}(28 - 19) = 3$$

movimentos. Existem 2^1 soluções.

5.40. EXEMPLO.

Para $n = 2$, são necessários quantos movimentos? Quantas soluções distintas para o jogo existem?

Pelo Teorema 5.38, são necessários

$$\frac{1}{3}(7 \cdot 2^{2+1} - 9 \cdot 2 - 11) = \frac{1}{3}(56 - 28) = 9$$

movimentos. Existem 2^1 soluções.

Vejamoss essa solução para $n = 2$:

Exercícios do Capítulo 5

- 5.1.** Seja uma torre com 4 pinos e 3 discos empilhados no pino A . Descreva duas soluções distintas para o quebra cabeças usando a Conjectura de Frame-Stewart, Teorema 5.3.
- 5.2.** Seja uma torre com 4 pinos. Segundo Frame-Stewart, no Teorema 5.3, qual a quantidade mínima de movimentos necessários para mover 5 discos, empilhados em forma decrescente no pino 1, para o pino 4?
- 5.3.** Um resultado semelhante ao Teorema 5.18 foi obtido por A. Brousseau, em [5]. A expressão do número mínimo de movimentos (5.18) é bem semelhante, diferindo apenas na escrita dos polinômios. Em Brousseau,

$$\hat{P}_q(\nu) = \sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q + \nu}{q - i}.$$

Mostre que os dois resultados são idênticos.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 5

- 5.4.** De acordo com o algoritmo proposto por Poole para a Torre Caótica, descreva a solução para 5 discos e discrepância 2.
- 5.5.** Encontre as 3 soluções possíveis da Torre de Antuérpia com apenas 1 disco em cada haste.
- 5.6.** Mostre que a Torre de Antuérpia com 2 discos em cada haste não possui única solução. Quantas soluções você estimaria para 2 discos em cada haste?

A TORRE DE HANÓI E O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Este capítulo será destinado a relatar alguns resultados que provam a curiosa relação entre o quebra-cabeças Torre de Hanói e o Triângulo de Sierpinski. Para isso, definiremos o Grafo de Hanói que é uma estrutura capaz de descrever todos os movimentos possíveis dos discos da torre com três pinos. Precisamos também conhecer um pouco a classe de figuras geométricas denominada de Fractais da qual pertence o Triângulo de Sierpinski.

6.1 Fractais

Montanhas são denteadas e irregulares. Nuvens são fofas, com saliências e tufos. Árvores se ramificam repetidamente a partir do tronco, passando pelos galhos até os rebentos nas pontas. Samambaias têm frondes que parecem uma porção de frondes menores amarradas em pares opostos. Ao microscópio, a fuligem é um monte de pequenas partículas aglomeradas, com lacunas e vazios. Todas elas estão a grande distância da lisa rotundidade da esfera. A natureza detesta a linha reta e não morre de amores por outras coisas vindas de Euclides e dos textos sobre cálculos. (Stewart, [34]).

Stewart descreve um pouco a beleza da natureza e nos aponta para a dificuldade em usar a geometria euclidiana para descrevê-la. Se procurarmos exatidão em nossos cálculos, precisaríamos de outra forma de medir distâncias, áreas e volumes. Por exemplo, veja a beleza desse floco de neve irregular e fragmentado:



Figura 6.1: imagem de wired.com Floco de Neve

Se olharmos mais atentamente, percebemos que sua estrutura se repete em escalas.

Figuras com essa propriedade aparecem com frequência na natureza e são chamadas de fractais.

6.1. DEFINIÇÃO.

Fractal é uma figura geométrica limitada ou não que possui padrões que se repetem infinitamente. Ou ainda, um conjunto cuja forma é irregular ou fragmentada e têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas.

A segunda parte dessa definição foi retirada de [28]. Foi Mandelbrot, em 1975, quem deu início ao estudo desses objetos sistematizando e dando luz à Geometria Fractal. Modelar com coerência e precisão, trazer à tona o comportamento que é

caótico e organizado ao mesmo tempo, cálculo de comprimentos, áreas e volumes, são alguns dos objetivos dessa geometria. Outro termo estudado é a chamada dimensão fractal. Objetos de estudo da geometria euclidiana possuem no máximo 3 dimensões: altura, comprimento e largura. Já os fractais não se encaixam nesses padrões! A dimensão de um fractal é definido como um número relacionado com a “densidade” do mesmo, ou seja, com a ocupação da figura dentro da área total que a contém, ler mais em [9].

Formalmente, em [3] para obtermos um fractal são necessários um Sistema Iterativo de Funções, SIF, isto é, um conjunto finito de funções bem definidas no \mathbb{R}^2 , para fractais no plano, por exemplo:

$$\{S_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; n = 1, 2, \dots, N\} \quad (6.1)$$

e um subconjunto $V_0 \subset \mathbb{R}^2$, fechado e limitado, onde o SIF atuará. Dessa forma, defina os conjuntos

$$V_1 = V_1(V_0) = \bigcup_{i=1}^N S_i(V_0),$$

$V_2 = V_1 \circ V_1$, isto é,

$$V_2 = V_2(V_0) = V_1(V_1(V_0)) = \bigcup_{j,i=1}^N S_j(S_i(V_0)),$$

e assim sucessivamente até

$$V_n = \underbrace{V_1 \circ V_1 \circ \dots \circ V_1}_{n \text{ vezes}}.$$

O SIF aplicado recursivamente em um conjunto V_0 gera um fractal \mathcal{F} , obtido de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(V_0) = \mathcal{F}.$$

§6.1. FRACTAIS

Toda a fundamentação teórica que justifica a convergência dessa algoritmo está em [3]. Observe que

$$\begin{aligned}V_1(\mathcal{F}) &= V_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(V_0)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_1(V_n(V_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n+1}(V_0) \\ &= \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Logo, $V_1(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ e o fractal é chamado de ponto fixo de V_1 . Podemos reescrever também

$$V_1(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^N S_i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}. \quad (6.2)$$

6.2. EXEMPLO.

Seja V_0 o conjunto dos vértices de um quadrado de lado medindo 1, isto é,

$$V_0 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Definiremos um conjunto SIF que agirá sobre V_0 , com uma única função:

$$S_1 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

para $P_1, P_2 \in V_0$:

$$S_1(P_1, P_2) = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

6.1.1 Curva ou triângulo de Sierpinski

Um dos mais famosos fractais é o Triângulo de Sierpinski que é gerado pela Curva de Sierpinski, ambos propostos em 1916 pelo matemático Waclaw Sierpinski. Iremos construir a curva.

Considere um triângulo equilátero ABC , de base BC , tome os pontos médios dos lados AB e AC , e os una por um segmento como na figura:

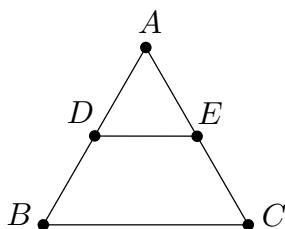


Figura 6.2: Triângulo Equilátero

O primeiro passo para a construção da curva de Sierpinski é o poligonal $BDEC$.

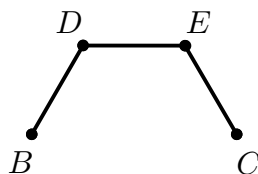


Figura 6.3: Passo 1 da Construção da Curva de Sierpinski

Para o próximo passo, procederemos de maneira análoga ao que foi feito no passo anterior aplicado a novos triângulos menores obtidos de subdivisões do triângulo original. Tomamos o ponto médio da base BC , chamamos de E , e traçamos mais outros triângulos equiláteros com metade da medida de lado do original:

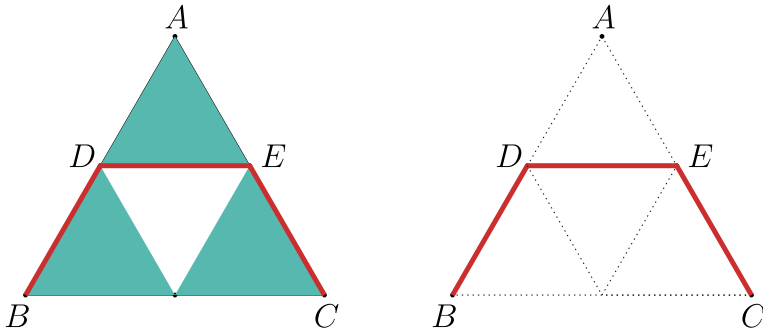


Figura 6.4: Triângulo Equilátero Dividido

Repetimos o mesmo processo efetuado no Passo 1 nos triângulos ADE de base DE , FDB de base DB , e FCE de base CE , obtemos assim a curva:

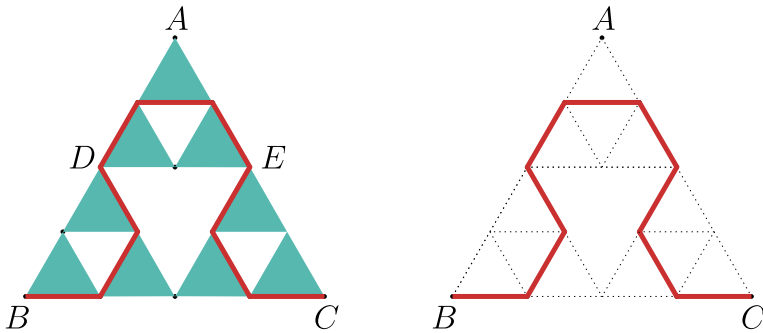


Figura 6.5: Passo 2 da Construção da Curva de Sierpinski

Recursivamente, para obter o passo 3, replicaremos o que foi feito no passo anterior com triângulos medindo $1/4$ da medida original:

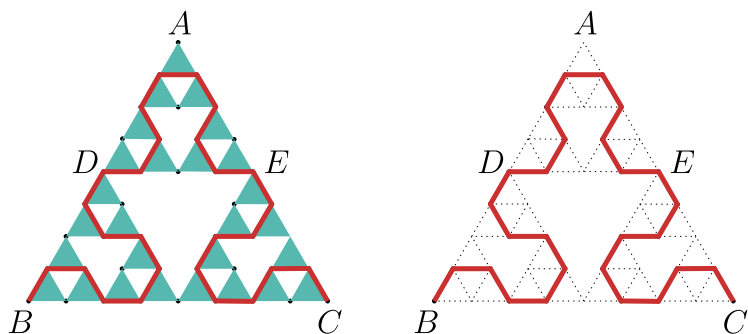


Figura 6.6: Passo 3 da Construção

Para obter o passo 4 da construção, repetimos o passo 3 nos triângulos de lado $1/8$.

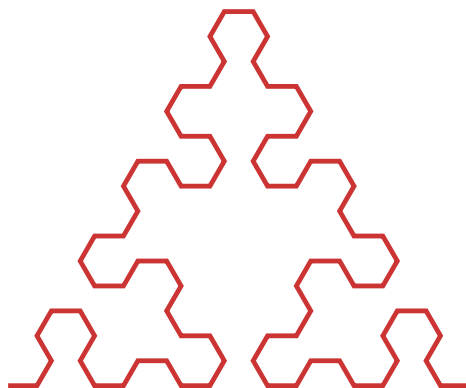


Figura 6.7: Passo 4 da Construção

Repetindo o processo sucessivamente, observando que a cada iteração a curva percorre o triângulo equilátero excetuando o seu centro, nos aproximamos do famoso Triângulo de Sierpinski:

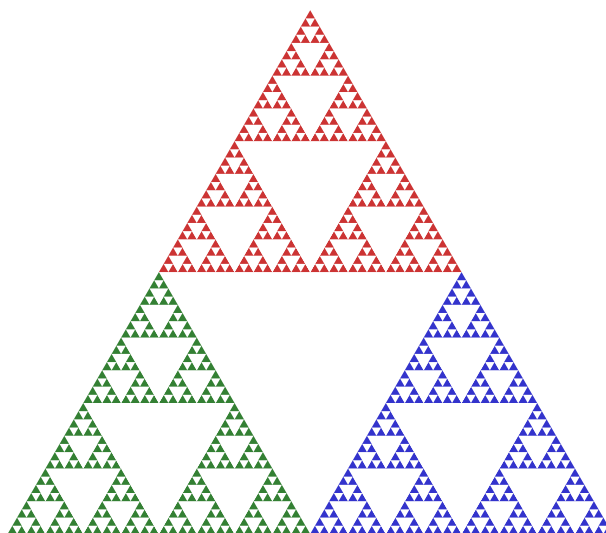


Figura 6.8: O Triângulo de Sierpinski

Observe que a estrutura dessa figura é diferente das que estamos acostumados a lidar, por exemplo como medir distâncias entre dois pontos ou qual a área dela? Não podemos usar a Geometria Euclidiana para isso, pois precisamos definir o que é distância nessa figura. Como dito anteriormente, surge a necessidade da Geometria Fractal, onde poderemos medir distâncias e calcular áreas em fractais.

Há uma outra construção mais simples e comumente usada para definir o Triângulo de Sierpinski (TS). Considere uma área restrita por um triângulo equilátero ABC . O Passo 1 será eliminar o triângulo equilátero contido em ABC e com vértices nos pontos médios das arestas dele.

O Passo 2 é eliminar 3 triângulos equiláteros contidos nos triângulos que sobraram do passo anterior e com vértices nos pontos médios das arestas deles:

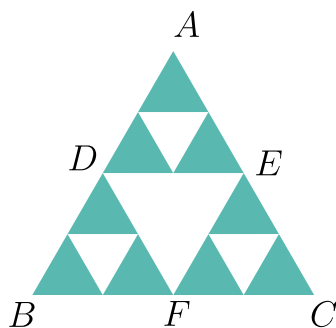


Figura 6.9: Passo 2 da Construção do TS

Sucedemos assim indefinidamente e obteremos o Triângulo de Sierpinski. Observando os vértices dos triângulos, percebemos que originalmente tínhamos os vértices A , B e C , no Passo 1 acrescentamos os vértices D , E e F , que são os pontos médios das arestas do triângulo original.

No Passo 2, Figura 6.9, construímos mais 3 vértices em cada um dos 3 triângulos do passo anterior que contêm os vértices A , B ou C . Por exemplo, observe o triângulo que contém o vértice A , os 3 novos vértices são obtidos ao calcular o ponto médio dos segmentos com extremos em A e nos vértices do passo anterior.

6.1.2 Construção discreta do triângulo de Sierpinski

Como construir o Triângulo de Sierpinski usando a formalização das funções?

Suponha que o triângulo original que será usado para construir TS tenha lados medindo 1 unidade, iremos definir recursivamente funções que gerem os pontos de TS, isto é, o Sistema Iterativo de Funções (SIF) definido em (6.1). Seu domínio será $V_0 = \{(0, 0), (1/2, \sqrt{3}/2), (1, 0)\}$, para facilitar a escrita chamaremos $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$. Vamos definir 3 funções que serão aplicadas nesses pontos, nos novos pontos que serão obtidos de suas imagens e assim sucessivamente:

$$S_i(x) = \frac{x + p_i}{2}, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

O Triângulo de Sierpinski (TS) é o fractal gerado pela união das imagens dessas funções aplicadas recursivamente e infinitas vezes, como em (6.2), isto é usualmente denotado por

$$TS = \bigcup_{i=1}^3 S_i(TS). \quad (6.3)$$

Vamos agora construir uma sequência crescente de conjuntos formados pelos vértices obtidos em cada iteração. Essa sequência converge para TS. Seja

$$V_0 = \{p_1, p_2, p_3\},$$

$$V_1 = S_1(V_0) \cup S_2(V_0) \cup S_3(V_0),$$

ou seja, V_1 é o conjunto dos pontos médios dos segmentos com extremos em V_0 mais os elementos de V_0 . Desse mesmo modo,

$$V_2 = S_{11} \cup S_{12} \cup S_{13} \cup S_{21} \cup S_{22} \cup S_{23} \cup S_{31} \cup S_{32} \cup S_{33}$$

onde $S_{ij}(V_0) = S_i(S_j(V_0))$ para $i, j = 1, 2, 3$. De modo mais geral,

$$V_n = \bigcup_w S_w(V_0), \quad (6.4)$$

onde $w = i_1 i_2 \dots i_n$, $S_w = S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_n}$, com $i_j \in \{1, 2, 3\}$ para todo j . Denominamos a união de todos os V'_i s de

$$V_* = \bigcup_{n \geq 0} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n, \quad (6.5)$$

O que é importante destacar aqui é que o fecho de V_* é TS , isto quer dizer que toda sequência de pontos de V_* converge para um ponto de TS e, conseqüentemente, $V_* \in TS$. Ler mais sobre fecho em [21] e sobre essa construção do Triângulo em [17] ou [3].

6.2 Grafos

6.2.1 O problema das pontes de Königsberg

O primeiro problema a fundamentar a ideia de grafos foi proposto por Leonhard Euler (1707-1783) e chama-se *O Problema das Pontes de Königsberg*.

Königsberg é uma cidade Russa e atualmente é conhecida por Kaliningrado. Nela existe um conjunto de sete pontes que cruzam o rio Pregel. Essas pontes conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens, como na Figura 6.11.



Figura 6.10: Königsberg

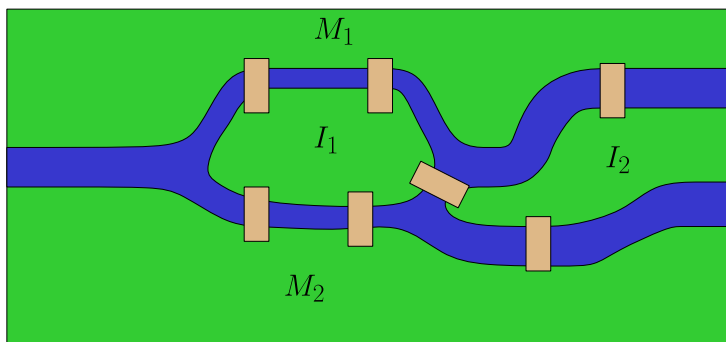


Figura 6.11: 7 Pontes

Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam se era possível cruzar a pé as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas e retornar ao ponto de partida.

Euler solucionou o problema em 1736 usando diagramas para representá-lo. Aos locais de terra firme, que são as ilhas e as margens, ele associou a pontos que chamamos de vértices, e cada ponte representou por uma linha que denominamos de aresta. Assim, I_1 e I_2 são as ilhas, M_1 e M_2 representam as margens ou terra firme, as linhas que os ligam são as pontes:

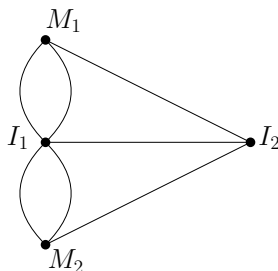


Figura 6.12: Diagrama de Euler

Essa figura é chamada de grafo e representa a situação em questão. O problema das pontes na nomenclatura de grafos é: saindo de um vértice qualquer deve-se passar por todas as arestas uma única vez e retornar ao ponto de partida. Infelizmente o grafo da Figura 6.12 não tem solução. Vejamos a definição formal de grafo e a prova de que não há solução para o problema.

6.3. DEFINIÇÃO.

Um grafo $G = (V, E)$ é composto por dois conjuntos finitos e não-vazios V e E cujos elementos são chamados vértices e arestas, respectivamente. Esses elementos se relacionam por meio de uma função que é chamada de Incidência. Essa função associa a cada aresta um par de vértices não necessariamente distintos.

§6.2. GRAFOS

Para o problema das pontes, temos os vértices $V = \{I_1, I_2, M_1, M_2\}$, onde:

- I_1 é ilha 1
- I_2 é ilha 2
- M_1 é margem 1
- M_2 é margem 2.

Para as arestas $E = \{\{I_1, I_2\}, \{I_1, M_1\}, \{I_1, M_2\}, \{M_2, I_1\}, \{M_1, I_1\}, \{M_1, I_2\}, \{M_2, I_2\}\}$, onde:

- $\{I_1, I_2\}$ é a ponte 1
- $\{I_1, M_1\}$ é a ponte 2
- $\{I_1, M_2\}$ é a ponte 3
- $\{M_2, I_1\}$ é a ponte 4
- $\{M_1, I_1\}$ é a ponte 5
- $\{M_1, I_2\}$ é a ponte 6
- $\{M_2, I_2\}$ é a ponte 7.

Euler percebeu que esse problema não tem solução, pois a quantidade de arestas conectadas a cada vértice deve ser par. Suponha que iniciamos o caminho por um vértice P que possui um número ímpar de arestas conectadas diretamente a ele. Uma vez que saímos de P por uma aresta e devemos retornar por outra aresta distinta que não passamos ainda. Daí se o número de arestas for n ímpar, $n - 1$ será par e você pode visitar o vértice inicial $\frac{n-1}{2}$ vezes usando a quantidade $n - 1$ de arestas. Ao findar essas visitas, você estará em P e precisa passar pela

última aresta que sobrou, mas não terá como retornar ao vértice P pois todas as arestas já foram usadas. Então não tem solução.

Agora, se o vértice P que possui n arestas, n ímpar, não é o vértice inicial, em algum momento ele será visitado $\frac{n-1}{2}$ vezes, restando uma última aresta a ser visitada. Quando cruzarmos essa última aresta e adentrar no vértice P , não poderemos sair mais pois todos os vértices já foram percorridos.

No grafo em questão percebemos que cada vértice está conectado a 3 ou 5 arestas, portanto não tem solução.

Define-se por Grafo de Euler todos os grafos onde existem soluções para o problema das pontes, isto é, é possível percorrer todo o grafo e voltar à posição inicial passando por todas as arestas uma única vez. Logo, o grafo da Figura 6.12 não é um Grafo de Euler.

6.2.2 O grafo da torre de Hanói

Vamos construir um grafo que represente os movimentos possíveis do quebra-cabeças da Torre de Hanói.

Inicialmente, suponha que temos apenas um único disco e as hastes A , B e C . Para facilitar a escrita, consideraremos a haste A como o número 1, a haste B será o 2 e a C será o número 3.

Cada vértice do grafo indicará a posição desse único disco, desse modo teremos os vértices 1, 2 e 3, para o caso do disco estar na haste A , B ou C , respectivamente.

As arestas do nosso grafo serão as indicações de movimento de disco, por exemplo, se o disco estava em 1 e se moveu para 2, ou estava em 2 e se moveu para 1, então representaremos por uma aresta que sai de 1 e vai para 2, a notação para essa aresta será $\{1, 2\}$.

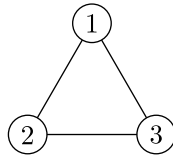


Figura 6.13: Grafo da Torre de 1 disco

Se a Torre possuir 2 discos, os vértices indicarão a posição dos discos na torre, sempre respeitando as regras do quebra-cabeça. Usaremos um par ordenado onde a primeira coordenada representará a haste em que se encontra o menor disco e a segunda o maior. Por exemplo, 11 indica que ambos os discos estão na haste 1. Já o vértice 23 representa a distribuição de discos com o menor disco na haste 2 e o maior na haste 3. Teremos as 9 possibilidades: 11, 12, 13, 22, 21, 23, 31, 32, 33. As arestas indicarão um movimento permitido no jogo, assim, se a configuração inicial é 11 e movermos o menor para a haste 2, então representaremos esse movimento com uma aresta ligando os vértices 11 e 21, denotada por $\{11, 21\}$.

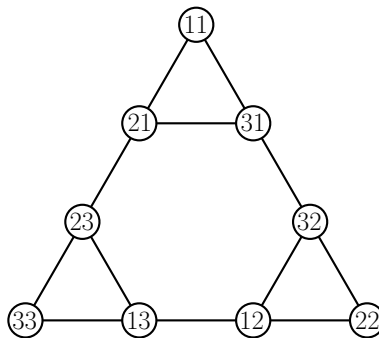


Figura 6.14: Grafo da Torre de 2 discos

CAPÍTULO 6. A TORRE DE HANÓI E O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Para torre com 3 discos, usaremos uma terna onde a primeira coordenada representará a haste em que se encontra o menor disco, a segunda o disco médio, e a terceira o maior deles. Por exemplo, 112 indica que o menor e o médio estão na haste 1, e o maior na haste 2. Já o vértice 231 representa o menor na haste 2, o médio na haste 3 e o maior na haste 1. No total serão 27 possibilidades: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.

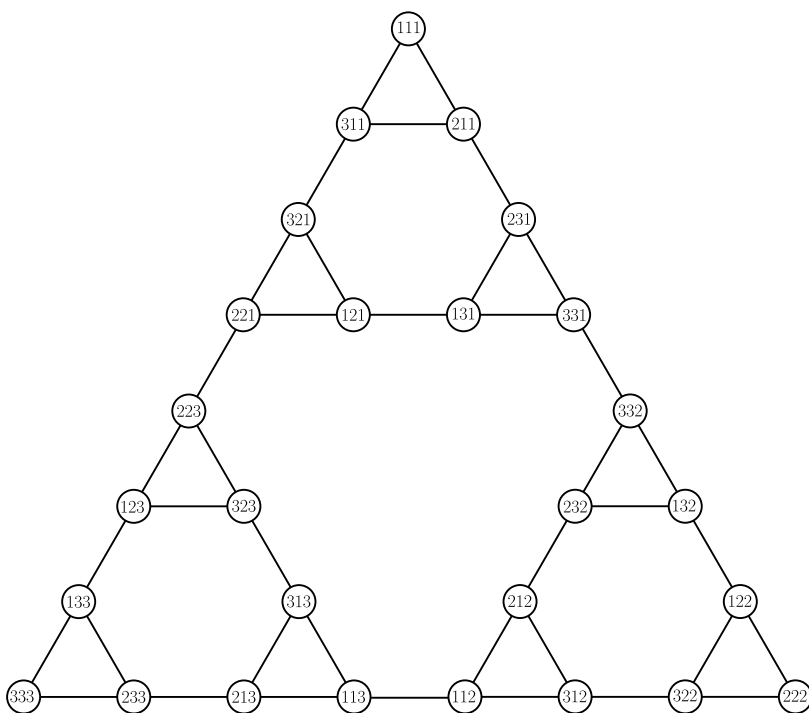


Figura 6.15: Grafo da Torre de 3 discos

Para o caso de n discos, teremos que os vértices do grafo serão n -uplas que indicarão as posições dos discos nas hastes, seguindo a ordem onde o menor disco será representado pela primeira coordenada, o segundo menor será a segunda coordenada, e assim sucessivamente até o maior disco que será representado pela última coordenada.

6.2.3 Sequência de grafos com vértices em TS

Nesta subseção, vamos construir uma sequência de grafos $\{\Gamma_n\}$ que têm seus vértices em TS e será usada no resultado principal da Subseção 6.3.2, que se encontra em [1].

Os vértices dos grafos serão os elementos dos conjuntos V_n (6.4) da construção do TS na Subseção 6.1.2, lembrando-os

$$V_n = \bigcup_w S_w(V_0),$$

onde $w = i_1 i_2 \dots i_n$, $S_w = S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_n}$, com $i_j \in \{1, 2, 3\}$ para todo j . As funções

$$S_i(x) = \frac{x + p_i}{2}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

As arestas dos grafos são $\{x, y\}$ e x, y são vértices, tais que $x, y \in S_w(V_0)$ para algum w . Definimos, para $n = 0$,

$$V_0 = \{p_1, p_2, p_3\} = \{(0, 0), (1/2, \sqrt{3}/2), (1, 0)\},$$

que são os vértices do triângulo equilátero de lado 1, então o grafo Γ_0 será

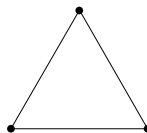


Figura 6.16: Grafo Γ_0

Para $n = 1$, $V_1 = \bigcup_w S_w(V_0)$, onde $w \in \{1, 2, 3\}$. Então

$$V_1 = S_1(V_0) \cup S_2(V_0) \cup S_3(V_0),$$

onde

$$S_1(V_0) = \{(0, 0), (1/4, \sqrt{3}/4), (1/2, 0)\},$$

$$S_2(V_0) = \{(1/4, \sqrt{3}/4), (1/2, \sqrt{3}/2), (3/4, \sqrt{3}/4)\},$$

$$S_3(V_0) = \{(1/2, 0), (3/4, \sqrt{3}/4), (1, 0)\}.$$

Seu grafo será

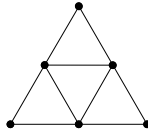


Figura 6.17: Grafo Γ_1

Para $n = 2$, $V_2 = \bigcup_w S_w(V_0)$, onde $w \in \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$. Assim, por exemplo

$$S_{11}(V_0) = S_1(S_1(V_0)) = \{(0, 0), (1/8, \sqrt{3}/8), (1/8, 0)\},$$

$$S_{12}(V_0) = S_1(S_2(V_0)) = \{(1/8, \sqrt{3}/8), (1/4, \sqrt{3}/4), (3/8, \sqrt{3}/8)\}.$$

Repetindo o raciocínio para as outras S_{ij} , temos o grafo:

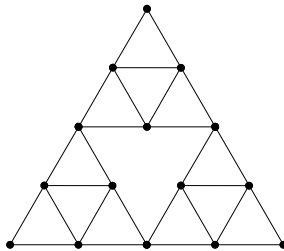


Figura 6.18: Grafo Γ_2

E assim sucessivamente obtemos uma sequência de grafos que converge para TS.

6.3 O triângulo de Sierpinski e a torre de Hanói

Na seção anterior vimos como explorar o jogo a partir de grafos. Nessa seção mostramos, de uma forma mais detalhada, a solução do jogo (não de forma perfeita) através de um fractal, especificamente o triângulo de Sierpinski. Para essa variação do quebra-cabeça, vamos adicionar mais uma regra: qualquer disco não pode mover do pino inicial para o final ou do pino final para o inicial, ou seja, qualquer disco deve primeiro passar pelo pino intermediário.

Eis um exemplo com 1 disco.

Exemplo com 2 discos:

Exemplo com 3 discos:

Cada vértice do triângulo representa o resultado final das jogadas de cada disco. O primeiro vértice mais a esquerda representa o início do jogo, o vértice mais a direita representa o último movimento.

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

Essa variação da Torre de Hanói clássica tem como recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 2$ (mostre!). Fica ao leitor descobrir a fórmula fechada do número de jogadas em função da quantidade de n de discos.

6.3.1 Distância média ou esperada entre pontos

A ideia de valor médio ou esperado de certo evento aleatório surgiu com o objetivo de avaliar ganhos em jogos com apostas de dinheiro. O primeiro problema foi proposto por volta do ano de 1500 pelo Frei Luca Pacioli em “Summa Arithmetica, Geometria e Proportion et Proportionalità”, que era o seguinte. (ler mais em [35])

6.4. EXEMPLO.

Dois jogadores A e B estão em uma disputa em um jogo chamado Jogo da Balla (jogo de bola medieval) que oferece um prêmio P em dinheiro. Imagine que ambos têm a mesma chance de vencer uma partida e ganhará o jogo aquele que vencer 6 partidas primeiro. Em dado momento, o jogador A já venceu 5 partidas e o outro apenas 3. É preciso interromper o jogo, como dividir o prêmio entre eles de forma mais justa?

Vários matemáticos tentaram resolver sem sucesso. Pacioli propôs $5/8$ do prêmio para A e $3/8$ para B , mas muitos acreditaram que essa divisão estava errada, Tartaglia foi um dos quais, inclusive disse que não havia divisão satisfatória. Seria esse um problema sem solução?

Cem anos depois, um problema semelhante foi proposto a Blaise Pascal que passou a trocar cartas com Pierre de Fermat, dando início ao desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

Podemos assim ver qual seria a solução correta para o problema proposto no Exemplo 6.4.

Precisamos calcular a probabilidade de cada um dos jogadores ganhar o jogo. Para que A vença, basta que acerte a próxima partida, será que é $1/2$? Veremos que não, a probabilidade de A ganhar é maior ainda. Calculemos a probabilidade de B ganhar, daí a probabilidade de A ganhar será obtida ao subtrair de 1.

Para que B vença é preciso que ele ganhe 3 partidas consecutivas, o número de possibilidades para 3 partidas consecutivas é 8, dentre essas apenas 1 é favorável a B , então a probabilidade de B vencer é $1/8$. Então a probabilidade de A vencer será $1-1/8=7/8$.

Como a probabilidade de A ganhar é $7/8$, é justo que receba $7/8$ do prêmio!! Já B deverá ficar com $1/8$ do prêmio. O valor esperado ou a média do prêmio de A deve ser $7/8$ de P .

6.5. DEFINIÇÃO.

Intuitivamente, esperança ou valor esperado de certo evento aleatório é calculado quando somamos todos os valores possíveis que tal evento pode assumir multiplicados por suas respectivas probabilidades. Essa soma pode se tornar um limite infinito de somas, caso o evento assuma valores que não podemos enumerar.

A definição formal e mais exemplos podem ser lidos em [24].

Voltando para o nosso problema de determinar a distância média ou esperada entre dois pontos pertencentes ao Triângulo de Sierpinski (TS), precisamos definir a probabilidade nele, uma vez que TS é um fractal e a geometria euclidiana não funciona bem aqui.

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

Seja o triângulo equilátero de lado 1, denominamos T , usado inicialmente para a construção do TS, e os triângulos menores contidos nele obtidos no seu processo de construção, no primeiro passo obtemos os 3 triângulos: T_0, T_1 e T_2 . No segundo passo, obtemos 9 triângulos que denominaremos de T_{00}, T_{01}, T_{02} para os que são obtidos de T_0 ; T_{10}, T_{11}, T_{12} para os que são obtidos de T_1 ; e T_{20}, T_{21}, T_{22} para os que são obtidos de T_2 ; e assim sucessivamente.

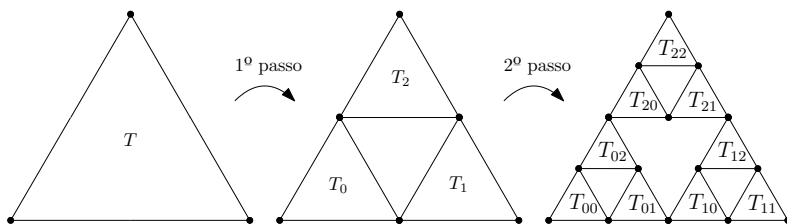


Figura 6.19: Passos 1 e 2 da construção de TS

Para a construção dessa probabilidade, que chamaremos de P , é necessário que associemos esses triângulos a números reais entre 0 e 1. Como os 3 primeiros triângulos contêm os demais, para ser probabilidade é preciso que:

$$P(TS \cap T) = 1,$$

então

$$P(TS \cap T) = P(TS \cap T_0) + P(TS \cap T_1) + P(TS \cap T_2) = 1.$$

Como assumimos a similaridade no fractal TS, então as 3 parcelas devem possuir o mesmo valor, logo

$$P(TS \cap T_0) = P(TS \cap T_1) = P(TS \cap T_2) = \frac{1}{3}.$$

Para os triângulos do segundo passo da construção de TS, temos que

$$P(TS \cap T_{00}) = P(TS \cap T_{01}) = \dots = P(TS \cap T_{22}) = \frac{1}{9}.$$

Assim, a probabilidade de TS interseção com um dos triângulos do passo n na construção de TS será $\frac{1}{3^n}$.

No artigo “The average distance on the Sierpiński gasket”, Hinz e Schief provam que o comprimento médio do menor caminho ligando dois pontos escolhidos de maneira independente e aleatória no Triângulo de Sierpinski é $\frac{466}{885}$. Uma justificativa simplória e errônea chegamos no valor $\frac{8}{15}$, que é 1% maior que o valor verdadeiro! Muito curioso! Faremos essa pois apesar de ser errada, nos dá ideia do que fazer para obter a correta. Começamos calculando o valor esperado da distância de um ponto de TS à origem.

6.6. PROPOSIÇÃO.

Seja γ o valor médio da distância de um ponto qualquer P de TS até a origem $B = (0, 0)$. Então $\gamma = \frac{2}{3}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Observe que P pode estar em T_0 , T_1 ou T_2 .

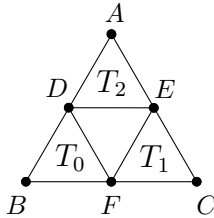


Figura 6.20: Passo 1 da construção de TS

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

Para simplificar a escrita da justificativa, denotaremos por $d_m(P, Q)$ a distância média entre P e Q pontos de algum T_i , $i = 0, 1, 2$. Se P está em T_1 , então temos que

$$d_m(P, B) = d_m(P, F) + d_m(F, B).$$

De modo semelhante ocorre para P em T_2 ,

$$d_m(P, B) = d_m(P, D) + d_m(D, B).$$

Pela similaridade de TS , garantimos que

$$d_m(P, D) = d_m(P, F) = d_m(P, B)$$

e que

$$d_m(D, B) = d_m(F, B) = 1/2.$$

Como a probabilidade de P pertencer a T_0 a T_1 ou T_2 é $1/3$, então

$$\gamma = \frac{1}{3}d_m(P, B) + \frac{1}{3} \left(d_m(P, D) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(d_m(P, F) + \frac{1}{2} \right)$$

usando a similaridade de TS , temos

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{3}d_m(P, B) + \frac{1}{3} \left(d_m(P, B) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(d_m(P, B) + \frac{1}{2} \right) \\ &= d_m(P, B) + \frac{2}{6}. \end{aligned}$$

Note que T_0 é similar a T , mas com dimensões com metade o valor de T , então é natural que $d_m(P, B) = \frac{\gamma}{2}$. Logo,

$$\gamma = \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{6} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{3}.$$

Retornando ao problema do valor médio da distância entre dois pontos de TS, vamos entender de onde vem o valor sugerido por alguns importantes matemáticos: $\delta = \frac{8}{15}$, e onde está o erro no cálculo desse valor.

Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer de TS escolhidos aleatoriamente, a probabilidade desses dois pontos pertencerem ao mesmo T_i , $i = 0, 1, 2$, é $1/3$. Logo, a probabilidade de estarem em triângulos distintos é $2/3$.

Suponha que P_1 e P_2 estão em T_0 , por exemplo. Como T e T_0 são similares, mas T_0 tem dimensões que valem a metade das de T , é natural admitir que a distância média entre P_1 e P_2 é $\frac{\delta}{2}$.

Agora, se P_1 está em T_1 e P_2 em T_2 , por exemplo, uma curva de TS que os ligasse deveria passar por E . Assim, a distância média entre eles seria a distância média de P_1 até E mais a distância de P_2 até E . Pela similaridade de TS, a distância média de P_1 até E é igual à distância média de P_1^* até B , tomando o ponto P_1^* em T_0 o ponto equivalente ao P_1 . Assim, como provamos na proposição anterior, a distância média entre P_1 e P_2 para essa situação seria 2 vezes a distância de P_1 até E , que é igual a 2 vezes a distância de certo P_1^* a B , que por similaridade novamente é $\frac{\gamma}{2}$, então dá $2 \frac{\gamma}{2} = \gamma = \frac{2}{3}$.

Juntando esses fatos, temos que

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{\delta}{2} + \frac{2}{3} \frac{2}{3} \Rightarrow \delta = \frac{8}{15}.$$

O erro dessa prova está em admitir que a distância entre P_1 e P_2 , no caso em que estão em triângulos distintos, que é o comprimento da menor curva de TS que os liga, deve passar pelo vértice E . Isso é claramente injustificado quando colocamos um P_1 próximo ao vértice D e um P_2 ao vértice F .

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

A prova correta para esse resultado é feita usando os Grafos de Hanói!! Sim, os grafos de Hanói são muito semelhantes aos grafos de Sierpinski da Seção 6.3, e podemos nos aproximar de TS usando esses grafos.

Vejam alguns resultados obtidos sobre os grafos de Hanói. Primeiro, [12] mostrou que a distância média de um vértice qualquer de H_n a $B = (0, 0)$ é igual a

$$\frac{2}{3}(2^n - 1).$$

6.7. EXEMPLO.

No caso $n = 2$, vamos calcular o valor esperado ou médio da distância de um vértice qualquer de H_2 a 33.

Se colocarmos que cada aresta mede 1 unidade, então a distância de 11 a 33 será 3, escrevemos $d(11, 22) = 3$ para facilitar, o mesmo ocorre com 22 a 33. Cada vértice tem probabilidade $1/9$ de ocorrer, então o valor esperado será

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9}(d(11, 33) + d(21, 33) + d(23, 33) + d(22, 33) + d(12, 33) \\ & \quad + d(13, 33) + d(31, 33) + d(32, 33) + d(33, 33)) \\ &= \frac{1}{9}(3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 3 + 3 + 0) \\ &= 2 = \frac{2}{3}(2^2 - 1). \end{aligned}$$

O valor $2^n - 1$ é a medida do lado do grafo H_n que coincide com o número mínimo de movimentos necessários para finalizar o jogo com n discos. Esse resultado corresponde ao obtido na Proposição 6.6 para o TS se transformarmos o grafo H_n em um de lado 1 dividindo por $2^n - 1$. Assim, concluímos que a distância

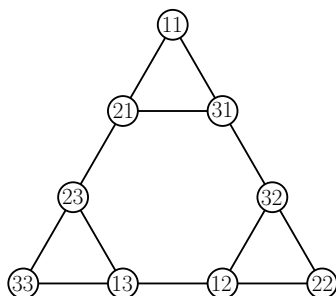


Figura 6.21: Grafo da Torre de 2 discos

média até a origem em H_n e TS são iguais se considerarmos a proporcionalidade!

A. M. Hinz e A. Schief (vide [16]) provaram, ao mesmo tempo e de forma independente que T.-H. Chan (vide [6]), que a distância média entre dois pontos nos grafos de Hanói H_n é $\frac{466}{885}2^n$. Esse resultado é usado fortemente na prova de que $\delta = \frac{466}{885}$ também. A demonstração não é tão simples e não colocaremos aqui, mas se encontra em [16] para os mais curiosos. O que queremos destacar é a distância média entre dois pontos quaisquer do grafo de Hanói H_n quando o consideramos de diâmetro 1, é $\frac{466}{885} \frac{2^n}{2^n - 1}$, fazendo n crescer indefinidamente, temos a mesma distância média entre dois pontos quaisquer de TS , isto é, $\frac{466}{885}$.

6.3.2 Convergência em distância Hausdorff

Para finalizar o capítulo, apresentamos o resultado obtido em [1] que mostra a convergência de uma sequência de fractais denominados por HG_α , obtidos dos Grafos de Hanói, para o TS na distância de Hausdorff. Aqui omitiremos a prova por ser longa e requerer conhecimento aprofundado do tema.

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

Considere S_n um grafo semelhante a H_n , mas os vértices terão uma nomenclatura diferente. Para $n = 1$, $S_1 = H_1$. O S_2 é composto por 3 cópias de S_1 , mas na frente dos vértices de cada uma delas é colocado 1, 2 e 3 respectivamente:

Definimos uma distância entre os vértices distintos $ijjj\dots j$ e $jiiii\dots i$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, chamaremos de α . Assumiremos que $0 < \alpha < 1/3$.

Agora, descreveremos 6 funções que são chamadas de *Atratores de Hanói* por gerarem os vértices do grafo de Hanói e mais outros pontos adicionais. São funções recursivas que inicialmente são aplicadas nos vértices do triângulo equilátero de lado 1: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$, e também nos pontos médios dos lados desse triângulo: $(1/2, 0)$, $(1/4, \sqrt{3}/4)$ e $(3/4, \sqrt{3}/4)$.

$$G_{\alpha,1}(x) = \frac{1 - \alpha}{2}x \quad (6.6)$$

$$G_{\alpha,2}(x) = \frac{1 - \alpha}{2}(x - p_2) + p_2, \quad p_2 = (1/2, \sqrt{3}/2) \quad (6.7)$$

$$G_{\alpha,3}(x) = \frac{1 - \alpha}{2}(x - p_3) + p_3, \quad p_3 = (1, 0), \quad (6.8)$$

$$G_{\alpha,4}(x) = A_4(\alpha(x - p_4) + p_4), \quad p_4 = (3/4, \sqrt{3}/4), \quad (6.9)$$

$$G_{\alpha,5}(x) = A_5(\alpha(x - p_5) + p_5), \quad p_5 = (1/2, 0), \quad (6.10)$$

$$G_{\alpha,6}(x) = A_6(\alpha(x - p_6) + p_6), \quad p_6 = (1/4, \sqrt{3}/4), \quad (6.11)$$

onde

$$A_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_6 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Ao aplicar essas funções infinitas vezes obtemos os vértices do grafo da Torre de Hanói e mais outro conjunto de pontos. Definiremos um conjunto que expressa essa aplicação recursiva.

6.8. DEFINIÇÃO.

Definimos o conjunto não-vazio, fechado e limitado

$$HG_\alpha = \bigcup_{i=1}^6 G_{\alpha,i}(HG_\alpha). \quad (6.12)$$

Em [1] mostra-se que HG_α converge para o TS quando α converge para 0 na Distância de Hausdorff. Vamos conhecê-la.

Considere no plano um conjunto A não-vazio, fechado e limitado e um ponto x fora dele. É natural assumirmos que a distância entre o ponto x e o conjunto A seja

$$d(x, A) = \min\{|x - y| : y \in A\}$$

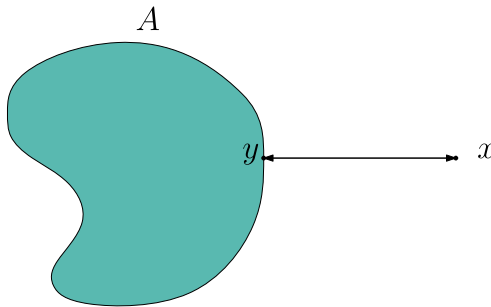


Figura 6.22: Distância de um ponto a um conjunto

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

E a distância entre dois conjuntos A , B não-vazios, fechados e limitados? Para isso, definiremos a distância de Hausdorff a seguir.

6.9. DEFINIÇÃO.

A distância ou Métrica de Hausdorff entre os conjuntos A e B é definida por

$$d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0; \text{tais que } A \subseteq B_\epsilon \text{ e } B \subseteq A_\epsilon\} \quad (6.13)$$

onde

$$A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, A) \leq \epsilon\} \quad \text{e} \quad B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, B) \leq \epsilon\}.$$

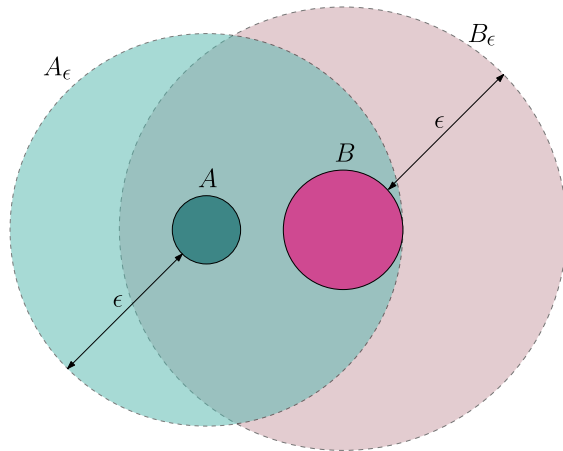


Figura 6.23: Distância entre conjuntos

6.10. EXEMPLO.

Considere o círculo A centrado na origem de raio 1 e B o círculo centrado em $(5,0)$ e de raio 2. Quanto vale $d(A, B)$?

Observe na Figura 6.24 que A_ϵ contém B se, e somente se, $\epsilon \geq 6$. E B_ϵ contém A se, e somente se, $\epsilon \geq 4$. Logo, $d(A, B) = 6$.

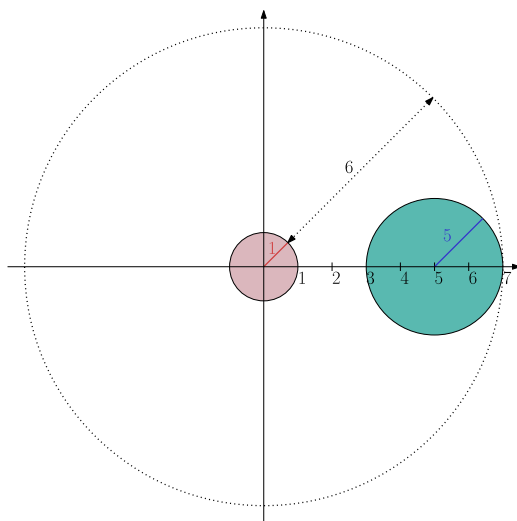


Figura 6.24: Distância entre círculos

6.11. EXEMPLO.

Sejam A um conjunto e B seu fecho, isto é, B é formado por todos os limites das sequências cujos termos estão em A . Quanto vale $h(A, B)$?

A primeira coisa a observar é que $A \subseteq B$, pois se $x \in A$ podemos obter uma sequência constante igual a x cujo limite será x e deverá pertencer a B , assim, $A \subseteq B_\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Agora, mostraremos que $B \subset A_\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Suponha que exista um ϵ_0 tal que B não está contido em A_{ϵ_0} , então existe um y que está em B e não está em A . Mas y deve ser o limite

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

de uma sequência de A e existe uma vizinhança dele que não contém pontos de A , o que é absurdo!

Assim, $A \subseteq B_\epsilon$ e $B \subseteq A_\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Fazendo ϵ convergir para 0, temos que $d(A, B) = 0$.

O resultado principal de [1] é:

6.12. TEOREMA.

Para $0 < \alpha < 1/3$ temos que vale a convergência

$$h(TS, HG_\alpha) \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0, \quad (6.14)$$

e HG_α são os Atratores de Hanói definidos em (6.12).

De nosso interesse, em [1] também há um resultado que re-escrevemos aqui e o demonstraremos.

6.13. TEOREMA.

Para $0 < \alpha < 1/3$ temos que vale a convergência

$$h(F_\alpha, TS) \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow 0, \quad (6.15)$$

e

$$F_\alpha = \bigcup_{i=1}^3 G_{\alpha,i}(F_\alpha).$$

DEMONSTRAÇÃO.

A prova é feita usando a desigualdade triangular nas distâncias Hausdorff entre os conjuntos F_α , $W_{\alpha,*}$ e V_* de (6.5), onde $W_{\alpha,*} = \bigcup_{n \geq 0} W_{\alpha,n}$ e

$$W_{\alpha,n} = \bigcup_{w \in \{1,2,3\}^n} G_{\alpha,w}(W_{\alpha,0}) \text{ com } W_{\alpha,0} = \{p_1, p_2, p_3\}.$$

Usamos que

$$h(F_\alpha, TS) \leq h(F_\alpha, W_{\alpha,*}) + h(W_{\alpha,*}, V_*) + h(V_*, TS). \quad (6.16)$$

Como $h(F_\alpha, W_{\alpha,*}) = h(V_*, TS) = 0$, pois o fecho de $W_{\alpha,*}$ é F_α e o fecho de V_* é TS , então a distância Hausdorff entre esses conjuntos é nula e a desigualdade (6.16) torna-se

$$h(F_\alpha, TS) \leq h(W_{\alpha,*}, V_*). \quad (6.17)$$

Mostraremos que $h(W_{\alpha,*}, V_*) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$, então $h(F_\alpha, TS) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$.

Relembrando que o conjunto $V_* = \bigcup_{m \geq 0} V_m$ e de (6.4)

$$V_n = \bigcup_w S_w(V_0),$$

onde $w = i_1 i_2 \dots i_n$, $S_w = S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_n}$, $i_j \in \{1, 2, 3\}$ para todo j , $S_i(x) = \frac{x+p_i}{2}$.

Pela definição de distância Hausdorff, temos

$$d(V_*, W_{\alpha,*}) = \inf\{\epsilon > 0 : V_* \subseteq (W_{\alpha,*})_\epsilon \text{ e } W_{\alpha,*} \subseteq (V_*)_\epsilon\}.$$

Fixando $0 < \alpha < 1/3$, mostraremos que $V_* \subseteq (W_{\alpha,*})_\alpha$, equivalentemente $V_m \subseteq (W_{\alpha,*})_\alpha$ para todo $m \geq 0$. A prova será feita usando indução em m .

§6.3. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A TORRE DE HANÓI

Para $m = 0$, temos que $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\} = W_{\alpha,0}$, que é um caso trivial. Para $m = 1$, os valores de w são 1, 2 ou 3, daí $V_1 = S_1(V_0) \cup S_2(V_0) \cup S_3(V_0)$. Temos que se $x \in V_1$, então $x = S_i(p_j)$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Se $i = j$, então $x = S_i(p_i) = p_i$ e $x \in W_{\alpha,0} \subset W_{\alpha,*} \subset (W_{\alpha,*})_\alpha$. Para $i \neq j$, tome $y = G_{\alpha,i}(p_j)$ com os mesmos i e j de x , de (6.6), (6.7) e (6.8):

$$\begin{aligned}
 |x - y| &= |S_i(p_j) - G_{\alpha,i}(p_j)| \\
 &= \left| \frac{p_j + p_i}{2} - \left[\frac{1 - \alpha}{2}(p_j - p_i) + p_i \right] \right| \\
 &= \left| \frac{\alpha}{2}p_j - \frac{\alpha}{2}p_i \right| \\
 &= \frac{\alpha}{2}|p_j - p_i| \\
 &\leq \frac{\alpha}{2},
 \end{aligned}$$

pois os p_i 's estão no triângulo equilátero T_0 , logo a distância entre eles é menor que 1. Podemos concluir que $V_1 \in (W_{\alpha,*})_\alpha$.

Agora, por hipótese de indução assumimos que $V_m \subseteq (W_{\alpha,*})_\alpha$ para algum $m \geq 0$. Seja $x \in V_{m+1}$, se $x \in V_m$, então por hipótese $x \in (W_{\alpha,*})_\alpha$. Se $x \in V_{m+1}$ mas não pertence a V_m , então como V_m é o m -ésimo passo da construção de TS, existe $\bar{x} \in V_m$ tal que $x = S_k(\bar{x})$ para algum $k = 1, 2, 3$, e $\bar{x} \in (W_{\alpha,*})_\alpha$, logo existe $\bar{y} \in (W_{\alpha,*})_\alpha$ tal que $|\bar{x} - \bar{y}| \leq \alpha$. Tome $y = G_{\alpha,k}(\bar{y}) \in W_{\alpha,*}$, então

$$\begin{aligned}
 |x - y| &= |S_k(\bar{x}) - G_{\alpha,k}(\bar{y})| \\
 &= \left| \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}p_k - \frac{1 - \alpha}{2}\bar{y} - \frac{1 + \alpha}{2}p_k \right| \\
 &= |\bar{x} - \bar{y} + \alpha\bar{y} - \alpha p_k| \\
 &\leq \frac{1}{2}|\bar{x} - \bar{y}| + \frac{\alpha}{2}|\bar{y} - p_k| \\
 &\leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \\
 &= \alpha.
 \end{aligned}$$

Provamos que para todo $m \geq 0$ que dado $x \in V_m$, existe $y \in W_{\alpha,*}$ tal que $|x - y| \leq \alpha$, isto equivale a dizer que para todo $\alpha \in (0, 1/3)$

$$V_m \subseteq (W_{\alpha,*})_\alpha.$$

Resta mostrar que

$$W_{\alpha,*} \subseteq (V_m)_\alpha$$

para todo $0 < \alpha < 1/3$. Mas a prova é análoga à feita anteriormente, desse modo, podemos concluir que

$$h(F_\alpha, TS) \rightarrow 0.$$

GABARITOS COMENTADOS

Solução aos exercícios do Capítulo 1

1.1 $S_5 = (1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C, 5B, 1A, 2B, 1B, 3A, 1C, 2A, 1A, 4B, 1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B)$.

1.2 Uma solução é: $S = (1A, 4B, 1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 6C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C, 4A, 1A, 2B, 1B, 3A, 1C, 2A, 1A, 5C, 1B, 2C, 1C, 3B, 1A, 2B, 1B, 4C, 1C, 2A, 1A, 3C, 1B, 2C, 1C)$.

1.3 Vamos pensar na quantidade mínima de movimentos necessários para movê-los de haste. Chamemos os discos de 1, 2 e 3, onde 1 é o menor. Para mover 3 para a haste C , é preciso retirar 1 e 2 da haste A , sem quebrar as regras estabelecidas, movemos os discos 1 e 2 para B , depois o 3 para C , por último, 1 e 2 para C . Essa é a solução com a menor quantidade de movimento:

$$S = (1C, 2B, 1B, 3C, 1A, 2C, 1C),$$

foram 7 movimentos, então vemos que os números em questão devem ser superiores a 7. Se quisermos realizar 8 movimentos, basta no final da solução transferir o 1 para B e depois para C , totalizando 8 movimentos. Desse modo, fica claro que podemos realizar quantos movimentos desejarmos, desde que seja mais que 7.

Solução aos exercícios do Capítulo 2

2.1 Júlia percebeu que a recursão é $x_{n+1} = 2x_n + 2$, equação recursiva não-homogênea de ordem 1. Para resolver, vamos achar primeiro uma solução qualquer da homogênea associada: $h_{n+1} = 2h_n$. Nos exemplos desse capítulo, para $h_0 = 1$, achamos que $h_n = 2^n$. A solução é do tipo $x_n = h_n y_n$, vamos encontrar y_n .

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2^n}.$$

Resolvendo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 1 \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{2} \\ y_3 &= y_2 + \frac{1}{2^2} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Somando os extremos, obtemos que

$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = y_0 + \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 1/2}.$$

Como $x_0 = 0 = h_0 y_0 = 1 \cdot y_0$, então $y_0 = 0$. A solução será

$$x_n = h_n y_n = 2^n \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 1/2} = 2^{n+1} - 2.$$

Resta ver se $10878 = 2^{n+1} - 2$, isto é, existe n tal que $2^{n+1} = 10880$? Ou ainda, $5440 = 2^n$. Júlia viu que $2^12 = 4.096$, e que $2^13 = 8192$. Logo, não é possível que tal número pertença à sequência em questão.

2.2 Nesse problema, essa é uma equação recursiva não homogênea de ordem 1, a solução é do tipo $x_n = h_n y_n$. Primeiro, encontraremos uma sequência h_n solução de $h_{n+1} = 2^{n+1} h_n$, e que corresponde à parte homogênea da equação.

$$\begin{aligned} h_1 &= 2^1 h_0 \\ h_2 &= 2^2 h_1 \\ &\vdots \\ h_n &= 2^n h_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando os membros do lado esquerdo e igualando com os membros do lado direito, temos que

$$h_n = 2^{1+2+\dots+n} h_0 = 2^{\frac{(1+n)n}{2}} h_0.$$

Escolhendo $h_0 = 1$, temos que

$$h_n = 2^{\frac{(1+n)n}{2}}.$$

Agora, vamos encontrar a segunda parcela da solução y_n , que satisfaz

$$y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{2^{n+1} 2^{\frac{(1+n)n}{2}}} = y_n + \frac{n^2}{2^{\frac{(n+1)^2 n}{2}}}.$$

Resolvendo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{4} \\ y_3 &= y_2 + \frac{2^2}{2^9} = y_2 + \frac{1}{2^7} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{(n-1)^2}{2^{\frac{(n)^2(n-1)}{2}}}. \end{aligned}$$

Somando os extremos, obtemos que

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{2^{k^2(k-1)/2}}.$$

Vamos determinar o valor de y_0 . No problema, não temos o valor de x_0 , desse modo, como $h_0 = 1$, temos que $y_0 = x_0$.

A solução geral será

$$x_n = h_n y_n = 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \left(x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{2^{k^2(k-1)/2}} \right),$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Como queremos duas soluções, tome $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$, obtendo:

$$x_n = 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{2^{k^2(k-1)/2}} \right)$$

e

$$x_n = 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{2^{k^2(k-1)/2}} \right).$$

Solução aos exercícios do Capítulo 3

3.1 21 minutos e 15 segundos é o mesmo que $21 \cdot 60 + 15 = 1275$ segundos. O aluno realiza 5 jogadas/segundo, então foram realizados $\frac{1275}{5} = 255$ jogadas. Logo,

$$2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8.$$

Portanto, o aluno jogou com 8 discos.

3.2 Sejam a e b as quantidades de discos utilizados pelos robôs α e β , respectivamente. O tempo total do jogo por α é $2^a - 1$, já β será $4(2^b - 1)$, pois este realiza uma jogada a cada 4

segundos. Como β finalizou o jogo por uma diferença de 3 segundos em relação ao robô α , então podemos escrever a seguinte equação:

$$2^a - 1 - 4(2^b - 1) = 3. \quad (1)$$

Como α é mais rápido, então o número de discos utilizado por ele é maior que o de β , ou seja, $a > b$. Como a e b são números naturais e $a > b$, então existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + n$. Logo, podemos reescrever a equação (1):

$$\begin{aligned} 2^{b+n} - 1 - 4(2^b - 1) &= 3 \\ \Rightarrow 2^b \cdot 2^n - 1 - 4 \cdot 2^b + 4 &= 3 \\ \Rightarrow 2^b \cdot (2^n - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Como $2^b > 0$, então $2^n - 4 = 0$ e, portanto, $n = 2$.

3.3 A quantidade total de jogadas é

$$\begin{aligned} &(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + (2^4 - 1) + (2^5 - 1) \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) - 5 \\ &= 2 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} - 5 \\ &= 57. \end{aligned}$$

O caso geral,

$$\begin{aligned} (2^1 - 1) + \dots + (2^k - 1) &= (2 + \dots + 2^k) - k \\ &= 2 \cdot \frac{2^k - 1}{2 - 1} - k \\ &= 2^{k+1} - 2 - k. \end{aligned}$$

Solução aos exercícios do Capítulo 4

4.1 Usando o teorema 4.4, temos:

$$(2p - 1) \cdot 2^{k-1} = 1000 = 125 \cdot 2^3.$$

Assim, $2p - 1 = 125$ e $2^{k-1} = 2^3$, então $p = 63$ e $k = 4$.
Portanto, o disco movido na milésima jogada é o disco 4.

4.2 Pelo teorema 4.4, temos $(2p - 1) \cdot 2^{k-1}$, onde k é o número do disco e p é quantidade de vezes que o disco k foi movido. Substituindo $p = 1$ e $k = 8$ chegaremos na resposta.

4.3 Pelo teorema 4.4, temos que $p = 2$. Assim

$$(2 \cdot 2 - 1) \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}.$$

Portanto, os 10 primeiros termos serão

$$(3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536).$$

4.4 Para $p = 1$ temos a primeira jogada que será

$$(2 \cdot 1 - 1)2^{3-1} = 4.$$

Para a segunda jogada temos $p = 2$, então

$$(2 \cdot 2 - 1)2^{3-1} = 12,$$

e assim sucessivamente. Portanto, para 8 jogadas a sequência é

$$(4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60).$$

4.5 Para que $(2 \cdot p - 1)2^{k-1}$ seja ímpar, 2^{k-1} deve ser igual a 1. Logo $k = 1$.

Solução aos exercícios do Capítulo 5

5.1 Duas soluções distintas são:

$$S_1 = (1B, 2C, 1C, 3B, 4D, 3D, 1A, 2D, 1D)$$

e

$$S_2 = (1C, 2B, 1B, 3C, 4D, 3D, 1A, 2D, 1D).$$

5.2 Vamos calcular o

$$k_5 = \left\lfloor \frac{\sqrt{8 \cdot 5 + 1} - 1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2,7 \rfloor = 2.$$

Logo,

$$b_5 = 2^2 \left(5 - 1 - \frac{2 \cdot 1}{2} \right) + 1 = 13.$$

5.3 Seja $q \in \mathbb{N}$ qualquer fixado. Mostraremos, por indução em ν , que os polinômios coincidem para todo $\nu \geq 1$. Para $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{P}_q(1) &= \sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q+1}{q-i} \\ &= \sum_{i=0}^q (-2)^i \left[\binom{q}{q-i} + \binom{q}{q-i-1} \right]. \end{aligned}$$

Usando as propriedades dos números binomiais:

$$\binom{a}{a-b} = \binom{a}{b}$$

e que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i,$$

temos

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_q(1) &= \sum_{i=0}^q (-2)^i \left[\binom{q}{i} + \binom{q}{i+1} \right] \\
 &= (1 + (-2))^q + \sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q}{i+1} \\
 &= (-1)^q + \sum_{i=1}^{q+1} (-2)^{i-1} \binom{q}{i} \\
 &= (-1)^q + \frac{1}{-2} \left[\sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q}{i} - (-2)^0 - (-2)^{q+1} \cdot 0 \right] \\
 &= (-1)^q - \frac{1}{2} [(-1)^q - 1] \\
 &= \frac{(-1)^q + 1}{2}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 P_q(1) &= (-1)^q \sum_{i=0}^q (-1)^i \binom{1+i-1}{i} \\
 &= (-1)^q \sum_{i=0}^q (-1)^i \\
 &= (-1)^q \frac{1 - (-1)^{q+1}}{1 - (-1)}.
 \end{aligned}$$

Assim, $P_q(1) = 1$ se q for par, e $P_q(1) = 0$ se for ímpar. Concluimos que $P_q(1) = \hat{P}_q(1)$. Suponha, por hipótese de indução que $P_q(\nu) = \hat{P}_q(\nu)$, mostraremos que vale a igualdade para $\nu + 1$.

Por um lado,

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_q(\nu + 1) &= \sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q + \nu + 1}{q - i} \\
 &= \sum_{i=0}^q (-2)^i \left[\binom{q + \nu}{q - i} + \binom{q + \nu}{q - i - 1} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q + \nu}{q - i} + \sum_{i=0}^q (-2)^i \binom{q + \nu}{q - i - 1} \\
 &= P_q(\nu) + \sum_{j=1}^{q+1} (-2)^{j-1} \binom{q + \nu}{q - j} \\
 &= P_q(\nu) - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^q (-2)^j \binom{q + \nu}{q - j} - (-2)^0 \binom{q + \nu}{q} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[(-2)^{q+1} \binom{q + \nu}{-1} \right] \\
 &= P_q(\nu) - \frac{1}{2} \left[P_q(\nu) - \binom{q + \nu}{q} + 0 \right] \\
 &= \frac{P_q(\nu)}{2} + \frac{1}{2} \binom{q + \nu}{q}.
 \end{aligned}$$

Analisando o outro polinômio:

$$\begin{aligned}
 P_q(\nu + 1) &= (-1)^q \sum_{i=0}^q (-1)^i \binom{\nu + i}{i} \\
 &= (-1)^q \sum_{i=0}^q (-1)^i \left[\binom{\nu + i - 1}{i} + \binom{\nu + i - 1}{i - 1} \right] \\
 &= P_q(\nu) + (-1)^q \sum_{i=0}^q (-1)^i \binom{\nu + i - 1}{i - 1} \\
 &= P_q(\nu) + (-1)^q \sum_{j=-1}^{q-1} (-1)^{j+1} \binom{\nu + 1 + j - 1}{j} \\
 &= P_q(\nu) - (-1)^q \sum_{j=0}^q (-1)^j \binom{\nu + j}{j} \\
 &\quad + (-1)^q (-1)^q \binom{\nu + q}{q} \\
 &= P_q(\nu) - P_q(\nu + 1) + \binom{\nu + q}{q},
 \end{aligned}$$

daí,

$$2P_q(\nu + 1) = P_q(\nu) + \binom{\nu + q}{q}$$

e, portanto,

$$P_q(\nu + 1) = \frac{1}{2}P_q(\nu) + \frac{1}{2} \binom{\nu + q}{q}.$$

Logo, $\hat{P}_q(\nu + 1) = P_q(\nu + 1)$, e os polinômios são iguais.

5.4 Para $n = 5$ e $t = 2$, temos que $0 \leq r < 2$, então $r = 0$ ou $r = 1$. Mas $n - 1 = (N - 1)t + r$ implica em $4 = (N - 1)2 + r$, r deve ser zero, e $N = 3$. O número de movimentos será $2.2^3 - 2.2 + 1 = 13$. A solução seria

$$S = (1C, 2C, 3B, 4B, 2B, 1B, 5C, 1A, 2A, 4C, 3C, 2C, 1C).$$

5.5 Para hastes A , B e C , e discos 1, 2 e 3 distribuídos nessas hastes, respectivamente, as possíveis soluções são

$$S_1 = (1B, 3A, 1A, 2C, 1B),$$

$$S_2 = (1C, 2A, 1A, 3B, 1C),$$

$$S_3 = (2A, 3B, 2B, 1C, 2A).$$

5.6 Com 2 discos, teremos 22 movimentos, chamaremos os discos da haste A de 1 e $1'$, onde 1 é o menor deles. Os da haste B de 2 e $2'$, e os da haste C de 3 e $3'$. Assim, duas soluções distintas são:

$$S_1 = (2A, 3A, 3'B, 3B, 2B, 1B, 1'C, 1A, 2A, 3A, 3'C, 3C, 2C, \\ 1C, 2'A, 1B, 2A, 1A, 3A, 3'B, 3B, 1C)$$

e outra poderia ser

$$S_2 = (1B, 3B, 3'A, 3A, 1A, 2A, 2'C, 2B, 1B, 3B, 3'C, 3C, 1C, \\ 2C, 1'B, 2A, 1B, 2B, 3B, 3'A, 3A, 2C).$$

Reza a lenda que são 30.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Ilustração da Torre de Hanói do século XIX	2
1.2	Édouard Lucas	3
1.3	Torre de Hanoi com 5 discos	4
1.4	Solução com um disco	5
1.5	Solução com dois discos	6
1.6	Solução com três discos	8
1.7	Torre de Hanói com n discos	11
3.1	Solução com n discos.	46
3.2	Solução com 1 disco.	47
3.3	Solução com 3 discos.	47
3.4	Solução com 3 discos.	48
3.5	Gráfico ajustado.	49
3.6	Solução da Torre com 3 pinos.	58
4.1	Jogada em que o disco k é movido pela primeira vez	70
4.2	Primeira jogada do disco k	70
4.3	Ordem dos movimentos do disco k	72
4.4	Configuração da Torre após mover o disco k	74
4.5	Gráfico de pontos	77
4.6	Gráfico da Ordem dos movimentos	78
4.7	Configuração da Torre com 4 discos	87
5.1	Torre de Hanói com 4 pinos.	89
5.2	Torre de Hanói com 4 pinos.	91
5.3	Torre de Hanói com 4 pinos.	93

5.4	Torre de Hanói cíclica	114
5.5	Solução para o pino C	115
5.6	Solução para o pino B	115
5.7	Solução para o pino C	116
5.8	Solução para o pino B	117
5.9	Solução para o pino C	117
5.10	Solução para o pino B	118
5.11	Torre de Hanói dupla com 4 pares de discos.	122
5.12	Torre de Hanói Magnética com 4 discos.	132
5.13	Torre de Hanói Caótica com 7 discos	138
5.14	Torre de Antuérpia com 24 discos	143
5.15	Pequena Torre de Antuérpia com 24 discos	146
6.1	imagem de wired.com Floco de Neve	152
6.2	Triângulo Equilátero	156
6.3	Passo 1 da Construção da Curva de Sierpinski	156
6.4	Triângulo Equilátero Dividido	157
6.5	Passo 2 da Construção da Curva de Sierpinski	157
6.6	Passo 3 da Construção	158
6.7	Passo 4 da Construção	158
6.8	O Triângulo de Sierpinski	159
6.9	Passo 2 da Construção do TS	160
6.10	Königsberg	163
6.11	7 Pontes	163
6.12	Diagrama de Euler	164
6.13	Grafo da Torre de 1 disco	167
6.14	Grafo da Torre de 2 discos	167
6.15	Grafo da Torre de 3 discos	168
6.16	Grafo Γ_0	169
6.17	Grafo Γ_1	170
6.18	Grafo Γ_2	170

LISTA DE FIGURAS

6.19	Passos 1 e 2 da construção de TS	175
6.20	Passo 1 da construção de TS	176
6.21	Grafo da Torre de 2 discos	180
6.22	Distância de um ponto a um conjunto	182
6.23	Distância entre conjuntos	183
6.24	Distância entre círculos	184

LISTA DE TABELAS

3.1	Número mínimo de jogadas em função do número de discos.	49
3.2	Número mínimo de jogadas para 5 discos em função da soma dos movimentos de cada disco	56
3.3	Número mínimo de jogadas para 5 discos em função da soma dos movimentos de cada disco	56
3.4	Número de vezes que um disco vai para os pinos	58
3.5	Número de vezes que os discos 1 e 2 ocupam os pinos	59
3.6	Número de vezes que os discos 1, 2 e 3 ocupam os pinos	59
4.1	Ordem de movimentação dos discos com 4 discos no total	68
4.2	Ordem de movimentação dos discos com 5 discos no total	71
5.1	Quantidade mínima de jogadas para 4 pinos. . . .	94

BIBLIOGRAFIA

- [1] Alonso-Ruiz, P., and Freiberg, U. *Hanoi Attractors and the Sierpinski Gasket*. Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol. 3, No. 4, 251 - 265, 2009.
- [2] Atkinson, M. D. *The Cyclic Towers of Hanoi*. INFORMATION PROCESSING LETTERS, v. 3, n. 3, p. 118-119, Canadá, 1981.
- [3] Barnsley, M. F. *Fractals Everywhere*. Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2012.
- [4] Biembengut, M. S., and Hein, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. Editora Contexto, São Paulo, 2000.
- [5] Brousseau, B. A. *Tower of Hanoi with more pegs*. Journal of Recreational Mathematics 8, 1975/6.
- [6] Chan, T.-H. *A statistical analysis of the towers of Hanoi problem*. International Journal Computer Mathematics, 1989.
- [7] Chen, X., Tian, B., and Wang, L. *Santa Claus' Towers of Hanoi*. Graphs and Combinatorics 23 (Supplement 1), 2007.
- [8] Chu, I.-P. *The Four-Peg Tower of Hanoi Puzzle*. Johnsonbaugh: SIGCSE. Vol. 23. No. 3, Johnsonbaugh, 1991.
- [9] da Silva, M. V. O. L. *Geometria Fractal e Atividades para o Ensino de Matemática: Degraus Fractais e Esponja de*

- Menger*. Dissertação de mestrado do PROFMAT- UFBA, Bahia, 2020.
- [10] Dinitz, Y., and Solomon, S. *Optimality of an algorithm solving the Bottleneck Tower of Hanoi problem*. ACM Transactions on Algorithms 4, 2008.
- [11] Dudeney, H. E. *The Canterbury Puzzles*. New York: E. P. Dutton and co, New York, 1908.
- [12] Er, M. *A generalization of the cyclic towers of hanoi: an iterative solution*. International Journal of Computer Mathematics, v. 15, n. 1-4, 1984.
- [13] Ferreira, D. B., and de Oliveira, E. P. *A Matemática da Ordem das Movimentações das Peças da Torre de Hanói*. Gazeta de Matemática, v. 1, n. 190, p. 6-10, Lisboa, 2020.
- [14] Hefez, A. *Aritmética - Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.
- [15] Hinz, A. M., Klavza, S., Milutinovic, U., and Petr, C. *The Tower of Hanoi – Myths and Maths*. Birkhäuser Basel, Springer, Birkhäuser Basel, 2013.
- [16] Hinz, A. M., and Schief, A. *The average distance on the Sierpinski gasket*. Probability Theory and Related Fields, 1990.
- [17] Jara, M. *Análise em Fractais*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2013.
- [18] Klavzar, Milutinovica, S., U., and C., P. *On the Frame-Stewart algorithm for the multi-peg Tower of Hanoi problem*. Discrete Applied Mathematics, v. 120, Issue 1-3, pg 141-147, 2002.

-
- [19] Klavžar, S., and Milutinovic, U. *Simple Explicit Formulas for the Frame–Stewart Numbers*. Annals of Combinatorics 6, 2002.
- [20] Ley, U. *The Magnetic Tower of Hanoi*. Journal of Recreational Mathematics, vol. 35, number 3, 2010.
- [21] Lima, E. L. *Análise Real, Funções de uma variável, volume 1*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.
- [22] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - vol. 1*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [23] Lu, X. M. *Towers of Hanoi Problem with Arbitrary k C 3 Pegs*. International Journal of Computer Mathematics, 1988.
- [24] Magalhães, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. edusp, São Paulo, 2004.
- [25] Minsker, S. *The Towers of Antwerpen problem*. Information Processing Letters 38 Mathematics, 1991.
- [26] Minsker, S. *The Little Towers of Antwerpen problem*. Information Processing Letters 94 Mathematics, 2005.
- [27] Morgado, A. C., and Carvalho, P. C. P. *Matemática Discreta - Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [28] Nussenzveig, H. M. *Complexidade e Caos*. Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.
- [29] Oliveira, E. P. *As Diversas Maneiras de Explorar a Matemática Através do Jogo Torres de Hanói*. Dissertação de Mestrado do PROFMAT, Natal, 2018.

BIBLIOGRAFIA

- [30] Pereira, A., and Rodrigues, R. *O problema das torres de Hanoi: a lenda, algoritmos e generalizações*. Gazeta de Matemática, v. 1, n. 144, p. 10-11, Lisboa, 2003.
- [31] Poole, D. *The Bottleneck Towers of Hanoi Problem*. Journal of Recreational Mathematics, 24, número 3, 1992.
- [32] S. Kordrostami, R. A., and Ghane, A. *Tower of Hanoi Problem with Arbitrary Number of Pegs and Present a Solution*. World Applied Sciences Journal 10(11): 1351-1353, 2010.
- [33] Santos, M. S. *Algumas Variações do jogo Torre de Hanói*. Dissertação do PROFMAT, 2017.
- [34] Stewart, I. *desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot*. Zahar, 2019.
- [35] Viali, L. *Algumas considerações sobre a origem da Teoria da Probabilidade*, vol. 8. Revista Brasileira de História da Matemática - SBHM, 2009.
- [36] Wood, D. *The towers of Brahma and Hanoi revisited*. Journal of Recreational Mathematics, 1981.
- [37] Wood, D. *The Towers of Brahma and Hanoi revisited*. Journal of Recreational Mathematics, 14, número 1, 1982.
- [38] Édouard Lucas. *Récréations Mathématiques*. Albert Blanchard, Paris, 1892.

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- Logaritmos - E. L. Lima
- Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança) - E. L. Lima
- Meu Professor de Matemática e outras Histórias - E. L. Lima
- Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- Trigonometria, Números Complexos - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- Coordenadas no Espaço - E. L. Lima
- Progressões e Matemática Financeira - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- Construções Geométricas - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- Introdução à Geometria Espacial - P. C. P. Carvalho
- Geometria Euclidiana Plana - J. L. M. Barbosa
- Isometrias - E. L. Lima
- A Matemática do Ensino Médio Vol. 1 - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- A Matemática do Ensino Médio Vol. 2 - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- A Matemática do Ensino Médio Vol. 3 - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- Matemática e Ensino - E. L. Lima

- Temas e Problemas - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- Episódios da História Antiga da Matemática - A. Aaboe
- Exame de Textos: Análise de livros de Matemática - E. L. Lima
- A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercícios e Soluções - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- Construções Geométricas: Exercícios e Soluções - S. Lima Netto
- Um Convite à Matemática - D.C de Morais Filho
- Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- Treze Viagens pelo Mundo da Matemática - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- Como Resolver Problemas Matemáticos - T. Tao
- Geometria em Sala de Aula - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- Números Primos, amigos que causam problemas - P. Ribenboim
- Introdução à Teoria dos Conjuntos - G. P. Novaes
- Manual de Redação Matemática - D. C. de Morais Filho
- Introdução à Teoria dos Conjuntos - G. Pires Novaes
- Elementos de Aritmética e Álgebra - F. Vieira e R. Aleixo de Carvalho

COLEÇÃO PROFMAT

- Introdução à Álgebra Linear - A. Hefez e C.S. Fernandez
- Tópicos de Teoria dos Números - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- Polinômios e Equações Algébricas - A. Hefez e M.L. Villela
- Tópicos de Historia de Matemática - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- Recursos Computacionais no Ensino de Matemática - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- Temas e Problemas Elementares - E. L. Lima, P. C. Pinto Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- Números e Funções Reais - E. L. Lima
- Aritmética - Abramo Hefez
- Geometria - A. Caminha
- Avaliação Educacional - M. Rabelo
- Geometria Analítica - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- Matemática Discreta - A. Morgado e P.C.P. Carvalho
- Matemática e Atualidade - Volume 1 - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- Fundamentos de Cálculo - A. C. Muniz Neto
- Matemática e Atualidade - Volume 2 - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- Exercícios Resolvidos de Aritmética - A. Hefez
- Probabilidade e estatística: aspectos de tomada de decisões e incerteza para o ensino fundamental e médio - L. Rifo

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- Números Irracionais e Transcendentes - D. G. de Figueiredo
- Números Racionais e Irracionais - I. Niven
- Tópicos Especiais em Álgebra - J. F. S. Andrade
- Teoria das Categorias: Uma breve introdução - M. F. Silva Ribeiro

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- Introdução à Computação Algébrica com o Maple - L. N. de Andrade
- Elementos de Aritmética - A. Hefez
- Métodos Matemáticos para a Engenharia - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies - M. P. do Carmo
- Matemática Discreta - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- Álgebra Linear: Um segundo Curso - H. P. Bueno
- Introdução às Funções de uma Variável Complexa - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- Elementos de Topologia Geral - E. L. Lima
- A Construção dos Números - J. Ferreira
- Introdução à Geometria Projetiva - A. Barros e P. Andrade
- Análise Vetorial Clássica - F. Acker
- Funções, Limites e Continuidade - P. Ribenboim
- Fundamentos de Análise Funcional - D. Pellegrino, E. Teixeira e G. Botelho
- Teoria dos Números Transcendentes - D. Marques
- Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré - P. Andrade
- Álgebra Linear: Teoria e Aplicações - T. P. de Araújo

- Introdução à Análise Matemática na Reta - C. I. Doering
- Topologia e Análise no Espaço \mathbb{R}^n - R. Freire de Lima
- Equações Ordinárias e Aplicações - B. Scárdua
- Cálculo Avançado - R. Cipelatti
- Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e superfícies - A. Lymberopoulos e I. Terek Couto
- Geometrias: Euclidiana, esférica e hiperbólica - C. M. Doria
- Elementos de Computação Matemática com SageMath - L. Silva, M. Santos e R. Machado
- Ortogonalidade: Um passeio pela Análise Funcional - H. Prado Bueno, G. Ercole, H. Candido Rodrigues e A. Zumpano
- Álgebra Linear no \mathbb{R}^n e Geometria Analítica Vetorial - P. Andrade

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- Introdução à Inferência Estatística - H. Bolfarine e M. Sandoval
- Discretização de Equações Diferenciais Parciais - J. Cuminato e M. Meneguette
- Fenômenos de Transferência - com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos - J. Pontes e N. Mangiavacchi
- Fenômenos de Transferência - com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 2: Aplicações - J. Pontes, N. Mangiavacchi, L. Alves, G. dos Anjos, K. Estacio-Hiroms e S. Hirata e R. Rosa
- Fundamentos para a Estatística de Convergência de Variáveis Aleatórias - K.L.P. Vasconcellos
- Introdução aos Métodos de Perturbação - J. A. Cuminato e M. Vynnycky

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1^a a 8^a - E. Mega, R. Watanabe
- Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9^a a 16^a - C. Moreira, E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- 21 Aulas de Matemática Olímpica - C. Y. Shine
- Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio - E. Carneiro, O. Campos e M. Paiva
- Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17^a a 24^a - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- 10 matemáticos 100 problemas - E. Wagner (Organização)
- Treinamento Olímpico - B. Holanda, C. Ribeiro, C. Magalhães, S. Feitosa e Y. Lima
- Belos Problemas de Matemática Discreta - R. R. Steffenon e F. M. Guarnieri

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- Fundamentos da Teoria Ergódica - M. Viana e K. Oliveira
- Tópicos de Geometria Diferencial - A. C. Muniz Neto
- Formas Diferenciais e Aplicações - M. Perdigão do Carmo
- Topologia das Variedades - W. de Melo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

COLEÇÃO HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

- Curso de Análise de Cauchy: Uma edição comentada - G. Schurbring e T. Roque

COLEÇÃO COLETÂNEAS DE MATEMÁTICA

- Teorema Vivo - C. Villani
- Geometria Diferencial das Curvas no \mathbb{R}^2 - H. Alencar, W. Santos, G. Silva Neto
- Perspectivas do Profmat: Política Pública em Construção - A. M. Takai
- Matemática nas Profissões - V. Santos, E. F. S. e Silva
- A Matemática dos Empréstimos & Financiamentos no Ensino Médio - V. G. Moreira, B.G de Freitas

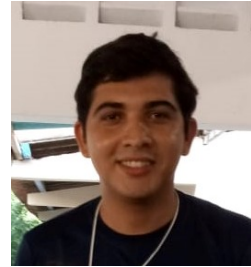
SOBRE OS AUTORES



Débora Borges 

É natural de Sobradinho, Distrito Federal, onde morou até os 28 anos. cursou licenciatura, mestrado e doutorado em Matemática na Universidade de Brasília. Em 2009, após concluir o doutorado, mudou-se para Natal e tornou-se professora adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em Natal, até os dias atuais. Sua área de pesquisa de formação é Probabilidade. Professora do PROFMAT desde 2011. Coordenou o referido programa entre 2018 e 2022, e orientou o professor Edvan Pontes de Oliveira. É mãe da Isadora e ama contar histórias para crianças.

É natural de João Câmara, interior do Rio Grande do Norte, mesma cidade onde atua como professor da rede estadual na Escola Estadual de Ensino Médio em Tempo Integral *Francisco de Assis Bittencourt*, e professor da rede municipal na Escola Municipal *Professora Ivanise Lacerda Pimenta*. cursou Técnico Subsequente em Informática no IFRN Campus João Câmara (2009-2012), nesse mesmo período foi bolsista de monitoria da disciplina de Matemática. No ano de 2013, iniciou licenciatura em Matemática na UFRN, concluindo no ano de 2016. No ano seguinte, ingressou no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), finalizando em 2019. Adora jogos que exploram estratégias, quebra-cabeças e resolver problemas de Matemática. Devido a esses hobbies e interesses, ministra um projeto voluntário denominado Olimpíadas de Matemática do Bittencourt (OMB), visando o aperfeiçoamento no desempenho em olimpíadas de matemática para alunos do ensino médio. Além disso, periodicamente, organiza torneios oficiais de Cubo Mágico, para reforçar a participação dos seus alunos, não apenas focando no desempenho em Matemática, mas também incentivando a socialização.



Edvan Pontes 