COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORDESTE

III Colóquio de Matemática
da Região Nordeste

SOBRE A NOÇÃO DE COMPACIDADE

CECÍLIA DE SOUZA FERNANDEZ
LUIZ ALBERTO VIANA DA SILVA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

SOBRE A NOÇÃO DE COMPACIDADE

Sobre a noção de compacidade

Editor Executivo
Hilário Alencar

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Capa: Pablo Diego Regino

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN (eBook) 978-85-8337-165-6

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES
REGIÃO NORDESTE

III Colóquio de Matemática
da Região Nordeste

SOBRE A NOÇÃO DE COMPACIDADE

CECÍLIA DE SOUZA FERNANDEZ
LUIZ ALBERTO VIANA DA SILVA

1ª EDIÇÃO
2020
RIO DE JANEIRO

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Para Ana Cecília
(CSF)
Para Minha Mãe Izabel
(LAVS) .

Sumário

Prefácio

Em topologia, a compacidade é uma propriedade que generaliza a noção de intervalo fechado e limitado de números reais, bastante presente no estudo do Cálculo de uma variável. O termo *compacto* foi introduzido por Maurice Fréchet (1878-1973) em sua tese de doutorado defendida em 1906, na qual ele unificou diversas ideias que deram origem à teoria dos espaços métricos. A importância dessa nova teoria está relacionada ao fato de que importantes teoremas clássicos da Análise Real ganharam versões em um contexto mais geral, resultando em contribuições muito relevantes ao desenvolvimento da Matemática. Dentre as extensões obtidas, algumas possibilitaram o entendimento de certos fatos, válidos para intervalos fechados e limitados da reta, no âmbito dos espaços métricos compactos. Desde então, a ideia de compacidade ganhou um papel de destaque, tendo sido inserida no escopo geral dos espaços topológicos, onde a topologia pode não ser proveniente de uma métrica.

O conceito de compacidade é importante também em outros ramos da Matemática, além da Análise. Exemplos concretos desta afirmação são os teoremas de imersão compacta, essenciais ao estudo das equações a derivadas parciais, e a relação existente entre compacidade lógica e compacidade topológica. Alguns enunciados marcantes da geometria também fazem mensão à ideia de compacidade, como é o caso do resultado que classifica as superfícies compactas, conexas e orientáveis como sendo aquelas que são homeomorfas à espera ou a uma soma conexa de toros. No contexto dos grupos de Lie compactos e conexos, mencionamos dois fatos bem conhecidos. O primeiro garante que se G é um tal grupo de Lie, então o seu recobrimento universal é compacto se, e somente se, o grupo fundamental de G é finito. O segundo, é o Teorema de Weyl, que assegura que o grupo fundamental de G é finito se, e somente se, sua álgebra de Lie é semi-simples. Ressaltamos que esses dois teoremas da teoria dos grupos de Lie fornecem uma relação bastante forte entre uma propriedade topológica de G (a finitude do seu grupo fundamental) e uma propriedade algébrica dos espaços tangentes a G.

Neste livro, apresentaremos alguns resultados sobre compacidade importantes na Análise. No Capítulo 1, abordaremos alguns aspectos básicos da topologia dos espaços métricos, imprescindíveis à compreensão dos capítulos subsequentes. No Capítulo 2, estudaremos os espaços métricos compactos, bem como particularidades desse conceito nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$. Caracterizaremos os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ como sendo os subconjuntos fechados e limitados desse espaço, resultado estabelecido pelo teorema de Heine-Borel. Finalizaremos o capítulo com um teorema clássico de Riesz, que afirma que os espaços $\mathbb{K}^n$ são essencialmente os únicos espaços normados nos quais as bolas fechadas são compactas, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. No Capítulo 3, abordaremos de forma breve as noções de convergência pontual, de convergência uniforme e de equicontinuidade, muito importantes na teoria dos espaços de funções. Encerraremos o Capítulo 3 apresentando o teorema de Arzelá-Ascoli, onde são caracterizados os subconjuntos compactos do espaço normado $C([0,1])$, e também algumas aplicações. No Capítulo 4, levantaremos uma breve discussão sobre topologias fracas, com o objetivo de apresentar resultados envolvendo conjuntos fracamente compactos. A parte principal desse capítulo concentra-se na obtenção dos teoremas de Banach-Alaoglu-Bourbaki e de Kakutani.

As notações usadas neste texto são usuais e não devem gerar dificuldades para o leitor. Mencionamos apenas que $A \setminus B$ denota a diferença do conjunto A pelo conjunto B, ou seja, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$, que $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais (incluindo o 0) e que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Terminamos agradecendo a Rogério Trindade pelo excelente trabalho de digitação.

Rio de Janeiro, Março 2016

Cecília de Souza Fernandez
Luiz Alberto Viana da Silva

Capítulo 1

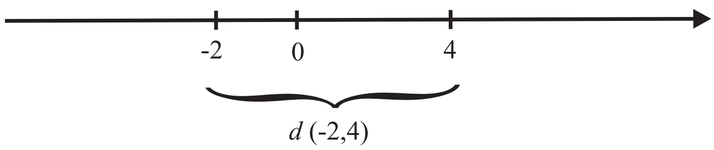
Noções Básicas Sobre Espaços Métricos

1.1 Definição e exemplos

Em uma primeira disciplina de Cálculo, vemos que, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a distância entre dois números a e b em $\mathbb{R}$, denotada por $d(a, b)$, é dada por

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Por exemplo, $d(-2, 4) = 6$.



A ideia de "estar próximo" é muito importante em Matemática. Se M é um conjunto não vazio e se $a, b \in M$, dizer que "a está próximo de b" significa dizer que "a distância entre a e b é pequena". A seguir, vamos definir a noção de distância entre dois elementos de um conjunto não vazio M qualquer.

Definição 1.1. *Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par $(a, b) \in M \times M$ associa o número real $d(a, b)$, é dita uma métrica em M se, para quaisquer a, b e $c \in M$, são válidas as seguintes condições:*

(d1) $d(a, b) \geq 0$*;*

(d2) $d(a, b) = 0$ *se, e somente se,* $a = b$*;*

(d3) $d(a, b) = d(b, a)$*;*

(d4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M. Frequentemente, designamos o espaço métrico (M, d) apenas por M, deixando a métrica subentendida.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1. $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico, onde

$$d(a, b) = |a - b|; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

De fato, as condições (d1)–(d4) resultam imediatamente das propriedades do valor absoluto de números reais. A métrica d é chamada de *métrica usual* em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. Seja M um conjunto não vazio. A função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ se } a \neq b; \\ 0 \text{ se } a = b, \end{cases}$$

onde $(a, b) \in M \times M$, é uma métrica em M. De fato, as condições (d1), (d2) e (d3) são facilmente verificadas. Para verificar (d4), tomemos a, b e $c \in M$. Vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: $a \neq b$ e $b \neq c$.
Como $d(a, b) = d(c, b)$ e $d(c, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, segue que $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Caso 2: $a = b$.
Como $d(a, c) \geq 0$ e $d(c, b) \geq 0$, segue que $d(a, b) = 0 \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Caso 3: $b = c$.
Se $b = c$, então $d(a, c) = d(a, b)$ e $d(c, b) = 0$. Assim, $d(a, b) = d(a, c) + d(c, b)$.

A métrica d é chamada de *métrica discreta* em M. Essa métrica será importante para darmos contraexemplos.

Exemplo 1.3. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) dois espaços métricos. Podemos definir em $M \times N$ uma métrica da seguinte maneira:

$$d((a, b), (c, d)) = \max\{d_1(a, c), d_2(b, d)\},$$

onde (a, b), $(c, d) \in M \times N$. Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que d é uma métrica em $M \times N$ (ver Exercício (1.4)). Esta é a *métrica usual no produto cartesiano* $M \times N$ e será usada salvo menção ao contrário.

Exemplo 1.4. Podemos generalizar o exemplo acima para um produto cartesiano de n $(n \in \mathbb{N}^*)$ espaços métricos. Dados $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos, podemos definir uma métrica d em $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ da seguinte maneira:

$$d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i); 1 \leq i \leq n\},$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in M$. A métrica d é a *métrica usual no produto cartesiano* M. Em particular, $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico onde

$$d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\},$$

com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Espaços normados

Nesta seção, estudaremos uma classe especial de espaços métricos: os espaços normados. Esses serão os espaços métricos de maior interesse no decorrer deste texto, visto que os mesmos possuem estrutura vetorial.

Cabe observar que os espaços estudados na Análise Funcional Clássica são os espaços normados. Resultados importantes dessa teoria, como o teorema de Banach-Steinhaus, o teorema da aplicação aberta e o teorema do gráfico fechado, são enunciados no contexto dos espaços normados. Para os leitores interessados neste assunto, indicamos [3] e [7].

No que se segue, $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Além disso, os espaços vetoriais mencionados são todos considerados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.2. *Seja E um espaço vetorial. Uma função $||\cdot||\colon E \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in E$ associa o número real $||x||$, é dita uma norma em E se, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, são válidas as seguintes condições:*

(n_1) $||x|| = 0$ *implica* $x = 0$*;*

(n_2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$*;*

(n_3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Um espaço vetorial normado, ou simplesmente um espaço normado, é um par $(E, ||\cdot||)$, onde E é um espaço vetorial e $||\cdot||$ é uma normal em E. Frequentemente, designamos espaço normado $(E, ||\cdot||)$ apenas por E, deixando a norma subentendida.

Note que $||0|| = 0$, bastando tomar, em (n_2), $\lambda = 0$. Tomando $\lambda = -1$ em (n_2), vemos que $||x|| = ||-x||$ para todo $x \in E$. Além disso, tomando $y = -x$ em (n_3), temos $0 = ||0|| = ||x + (-x)|| \leq ||x|| + ||-x|| = 2||x||$, ou seja, $||x|| \geq 0$ para todo $x \in E$.

Uma consequência bastante útil dos axiomas $(n_1), (n_2)$ e (n_3) é que, para quaisquer $x, y \in E$, temos

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||.$$

De fato, sejam $x, y \in E$. Por (n_3), temos

$$||x|| = ||(x-y)+y|| \leq ||x-y|| + ||y||,$$

o que implica que

$$||x|| - ||y|| \leq ||x-y||.$$

Trocando os papéis de x e y na desigualdade que acabamos de obter, temos

$$||y|| - ||x|| \leq ||y-x|| = ||x-y||.$$

Consequentemente,

$$\Big|||x|| - ||y||\Big| = \max\{||x|| - ||y||, ||y|| - ||x||\} \leq ||x-y||.$$

A seguir, vejamos alguns exemplos de espaços normados.

Exemplo 1.5. O par $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, onde $|\cdot|$ denota o valor absoluto em $\mathbb{R}$, é um espaço normado. Com efeito, a condição (n_1) segue imediatamente da definição de $|\cdot|$. Para verificar a condição (n_2), basta observar que $|\cdot|$ é uma função não negativa e que

$$|\lambda x|^2 = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = |\lambda|^2 |x|^2 = (|\lambda| \cdot |x|)^2$$

para quaisquer $\lambda, x \in \mathbb{R}$. Passemos à verificação de (n_3). Tomando $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$|x| = \max\{-x, x\} \quad \text{e} \quad |y| = \max\{-y, y\},$$

donde concluímos que $x + y \leq |x| + |y|$ e $-x - y \leq |x| + |y|$. Logo,

$$|x+y| = \max\{-x-y, x+y\} \leq |x| + |y|.$$

Exemplo 1.6. O par $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, onde $|\cdot|$ denota o módulo usual em $\mathbb{C}$, é um espaço normado. Com efeito, temos que $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, onde $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Daí $|z| = 0$ implica que $\sqrt{x^2+y^2} = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 0$. Daí, $x = y = 0$, mostrando a condição (n_1). Notemos que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos $|\lambda z|^2 = (\lambda z) \cdot \overline{(\lambda z)} = (\lambda\overline{\lambda}) \cdot (z\overline{z}) = |\lambda|^2 |z|^2 = (|\lambda| \cdot |z|)^2$ (onde a barra denota a conjugação), donde $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$. Assim, vale a condição (n_2).

Finalmente, a condição (n_3) vem das relações

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

válidas para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, onde utilizamos propriedades básicas dos números complexos ([1]).

Exemplo 1.7. Os pares $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||), (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$ e $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$, onde para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$||x|| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad ||x||_1 = \max_{1\le k\le n} |x_k| \quad \text{e} \quad ||x||_2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

são espaços normados. As aplicações $||\cdot||, ||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ são normas em $\mathbb{R}^n$. Com efeito:

(a) <u>$||\cdot||$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$</u>: A propriedade (n_1) é satisfeita, pois se $||x|| = 0$, então $|x_k| = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, implicando que $x_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ e, consequentemente, $x = 0$. A propriedade (n_2) também é satisfeita, pois

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^2 |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| ||x|| \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para verificarmos a propriedade (n_3), recordamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver [5])

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k)^2} = ||x||\ ||y||,$$

válida para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Vamos mostrar que $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$. Com efeito,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \\ &\le ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

Daí, $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$ e concluímos que $||\cdot||$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

(b) <u>$||\cdot||_1$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$</u>: Se $||x||_1 = 0$, temos que $|x_k| = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, $x_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, $x = 0$. Logo, a condição (n_1) está verificada. Notemos que se $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$||\lambda x||_1 = \max_{1\le k\le n} |\lambda x_k| = \max_{1\le k\le n} |\lambda| \cdot |x_k| = |\lambda| \max_{1\le k\le n} |x_k| = |\lambda| \cdot ||x||_1$$

e

$$||x + y||_1 = \max_{1\le k\le n} |x_k + y_k| \le \max_{1\le k\le n} |x_k| + \max_{1\le k\le n} |y_k| = ||x||_1 + ||y||_1,$$

seguindo as condições (n_2) e (n_3). Assim, $||\cdot||_1$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

(c) Para concluir que $||\cdot||_2$ é uma norma, basta argumentar como no item (b), o que deixamos a cargo do leitor (ver Exercício (1.6)).

No Exemplo 1.7, vimos que $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ é um espaço normado. Podemos definir a função $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Temos que d é uma métrica em $\mathbb{R}^n$. De fato, as condições (d1), (d2) e (d3) são facilmente verificadas. Para verificarmos (d4), basta notar que, para quaisquer x e y em $\mathbb{R}^n$, temos

$$d(x,y) = ||x - y||,$$

e assim, para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} d(a,b) &= ||a-b|| = ||(a-c)+(c-b)|| \\ &\leq ||a-c|| + ||c-b|| = d(a,b) + d(b,c). \end{aligned}$$

A métrica d é chamada de *métrica euclidiana* em $\mathbb{R}^n$ e será denotada por d_e. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos no plano (em coordenadas cartesianas), deduzida através do Teorema de Pitágoras (Figura 1).

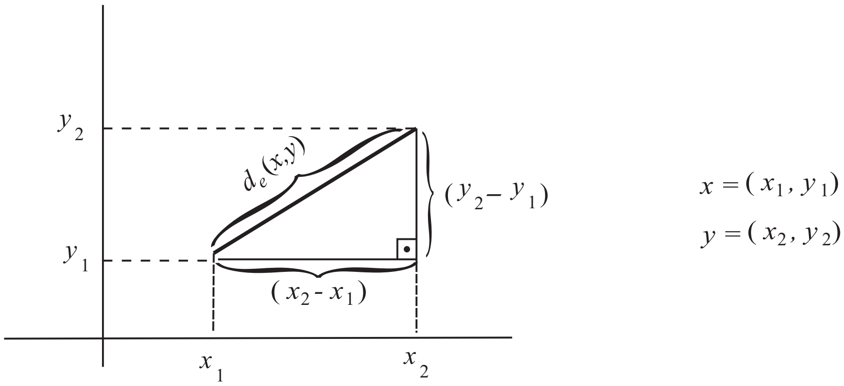


Figura 1

Em Geometria Analítica, d_e é conhecida como a *distância euclidiana* e $(\mathbb{R}^n, d_e)$ como o espaço euclideano n-dimensional.

Vimos que a norma euclidiana $||\cdot||$ e a métrica euclidiana d_e estão relacionadas entre si. Mais precisamente,

$$d_e(x,y) = ||x-y||; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Os Exemplos 1.4 e 1.7 mostram que a norma $||\cdot||_1$ e a métrica usual d em $\mathbb{R}^n$ estão relacionadas de mesma forma, ou seja,

$$d(x,y) = ||x-y||_1; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A relação entre d_e e $||\cdot||$ e a relação entre d e $||\cdot||_1$ não são uma coincidência. O próximo resultado traz a informação de que *todo espaço normado é um espaço métrico*.

Proposição 1.1. *Seja* $(E, ||\cdot||)$ *um espaço normado. A função* $d\colon E\times E\to\mathbb{R}$, *definida por*

$$d(x,y) = ||x-y|| \quad (x, y \in E),$$

é uma métrica em E. *A métrica* d *é chamada de métrica proveniente da norma* $||\cdot||$.

Demonstração. Para mostrar (d1), (d2), (d3) e (d4), basta utilizar o fato de $||\cdot||$ ser uma norma em E. ■

Pela Proposição 1.1, todo espaço normado é um espaço métrico. Uma pergunta natural é se toda métrica em um espaço vetorial E provém de uma norma. O próximo resultado nos diz que isso nem sempre é verdade.

Proposição 1.2. *Seja* E *um espaço vetorial. Uma métrica* d *em* E *é proveniente de uma norma em* E *se, e somente se, para quaisquer* $x, y, a \in E$ *e* $\lambda\in\mathbb{K}$, *tem-se* $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ *e* $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

Demonstração. Suponhamos que d é uma métrica em E proveniente de uma norma em E, ou seja, para quaisquer x e y em E, temos

$$d(x,y) = ||x-y||,$$

onde $||\cdot||$ é uma norma em E. Ora,

$$d(x+a, y+a) = ||(x+a)-(y+a)|| = ||x-y|| = d(x,y)$$

e

$$d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda x - \lambda y|| = ||\lambda(x-y)|| = |\lambda| ||x-y|| = |\lambda| d(x,y),$$

para quaisquer $x, y, a \in E$ e $\lambda\in\mathbb{K}$.

Reciprocamente, suponhamos que d é uma métrica em E que satisfaz as condições

$$d(x+a, y+a) = d(x,y) \quad \text{e} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y),$$

para quaisquer $x, y, a \in E$ e $\lambda\in\mathbb{K}$. Vamos mostrar que existe uma norma $||\cdot||$ em E tal que d provém de $||\cdot||$. Para isso, definamos

$$\begin{aligned} ||\cdot||\colon E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ||x|| = d(x,0), \end{aligned}$$

e vejamos que (n_1), (n_2) e (n_3) são satisfeitas.

Verificação de (n_1): Se $||x|| = 0$, então $d(x, 0) = 0$. Como d é uma métrica, $x = 0$.

Verificação de (n_2): Tomemos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$. Temos que $||\lambda x|| = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| d(x, 0) = |\lambda| ||x||$.

Verificação de (n_3): Tomemos x e y em E. Como d é uma métrica, $d(0, -y) = d(-y, 0)$ e $d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y)$. Assim, $||x + y|| = d(x + y, 0) = d(x + y, -y + y) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(-y, 0) = ||x|| + || - y||$. Como $|| - y|| = ||y||$ por (n_2), segue que

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Como $(n_1), (n_2)$ e (n_3) são satisfeitas, $(E, || \cdot ||)$ é um espaço normado. Além disso, d provém de $|| \cdot ||$, pois, para quaisquer x e y em E, temos

$$d(x, y) = d(x - y, y - y) = d(x - y, 0) = ||x - y||.$$

■

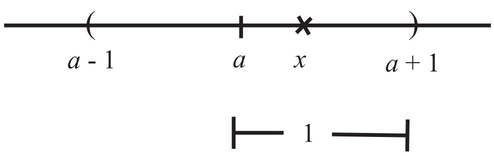
Com a Proposição 1.2, não é difícil obter um espaço métrico (E, d) que não seja um espaço normado. Por exemplo, consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com a sua métrica discreta d. Porém, d não provém de uma norma em $\mathbb{R}^2$. Se d fosse proveniente de uma norma em $\mathbb{R}^2$, então $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ para quaisquer x, y em $\mathbb{R}^2$ e λ em $\mathbb{R}$. Mas, como d é a métrica discreta, tomando $x = (1, 0)$, $y = (0, 0)$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, temos

$$d\left(\frac{1}{2}(1, 0), \frac{1}{2}(0, 0)\right) = 1 \neq \frac{1}{2} = \left|\frac{1}{2}\right| d((1, 0), (0, 0)).$$

1.3 Bolas e conjuntos limitados

A noção de intervalo em $\mathbb{R}$ é importante para expressar matematicamente a ideia "x está próximo de a", onde x e a são números reais. De fato, se considerarmos em $\mathbb{R}$ a sua métrica usual, dizer que "x dista de a menos que 1" é equivalente a dizer que "x pertence ao intervalo aberto $(a - 1, a + 1)$".

$$|x - a| < 1 \Leftrightarrow x \in (a - 1, a + 1)$$



As noções a seguir generalizam, para um espaço métrico qualquer, as noções de intervalo aberto e intervalo fechado de números reais.

Definição 1.3. *Seja (M, d) um espaço métrico. Para cada $a \in M$ e cada número real $r > 0$, definimos*

$$\begin{aligned} B(a;r) &= \{x \in M; d(x.a) < r\}, \\ B[a;r] &= \{x \in M; d(x,a) \leq r\}, \\ S(a;r) &= \{x \in M; d(x,a) = r\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos $B(a;r)$, $B[a;r]$ e $S(a;r)$ são chamados, respectivamente, de bola aberta, bola fechada e esfera de centro a e raio r. Notemos que $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$. Notemos também que se considerarmos $\mathbb{R}$ com a métrica usual, $B(a;r) = (a-r, a+r)$, $B[a;r] = [a-r, a+r]$ e $S(a;r) = \{a-r, a+r\}$.

Exemplo 1.8. Consideremos o espaço métrico (M, d), onde d é a métrica discreta. Tomemos $a \in M$. Então

$$B(a;1) = \{a\}, \quad B[a;1] = M \quad \text{e} \quad S(a;1) = M \setminus \{a\}.$$

Se $r < 1$,

$$B(a;r) = B[a;r] = \{a\} \quad \text{e} \quad S(a;r) = \emptyset.$$

Se $r > 1$,

$$B(a;r) = B[a;r] = M \quad \text{e} \quad S(a;r) = \emptyset.$$

Exemplo 1.9. Consideremos $\mathbb{R}^2$ com as normas apresentadas no Exemplo 1.7. Dados $a \in \mathbb{R}^2$ e um número real $r > 0$, a bola $B(a;r)$ adquire formas geométricas distintas dependendo da norma utilizada. Vamos verificar tal fato. Primeiramente, em $(\mathbb{R}, ||\cdot||)$, temos que a bola aberta $B(a;r)$ é o interior do círculo de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r. Com efeito, se $x \in B(a;r)$, com $x = (x_1, x_2)$, então $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$. A Figura 2 representa essa bola no plano $\mathbb{R}^2$:

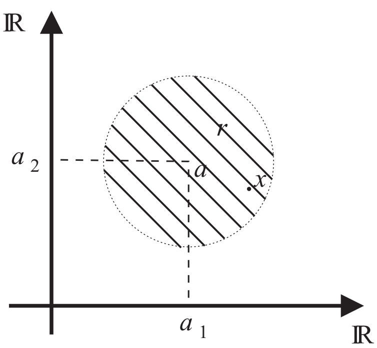


Figura 2: $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$.

Considerando $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$, a bola $B(a;r)$ é o interior de um quadrado de centro $a = (a_1, a_2)$ e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos coordenados. Com efeito, se $x = (x_1, x_2) \in B(a;r)$, então $||x - a||_1 < r$, ou seja, $\max\limits_{1 \leq k \leq 2} |x_k - a_k| =$

$\max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r$. Assim, $|x_1 - a_1| < r$ e $|x_2 - a_2| < r$. Logo, $x_1 \in (a_1 - r, a_1 + r)$ e $x_2 \in (a_2 - r, a_2 + r)$, isto é, $x \in (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)$. Reciprocamente, se $x = (x_1, x_2) \in (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)$, então $x_1 \in (a_1 - r, a_1 + r)$ e $x_2 \in (a_2 - r, a_2 + r)$. Daí, $|x_1 - a_1| < r$ e $|x_2 - a_2| < r$, ou seja, $||x - a||_1 = \max\limits_{1 \leq k \leq 2} |x_k - a_k| = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r$, o que implica que $x \in B(a; r)$. Temos a representação dessa bola na Figura 3.

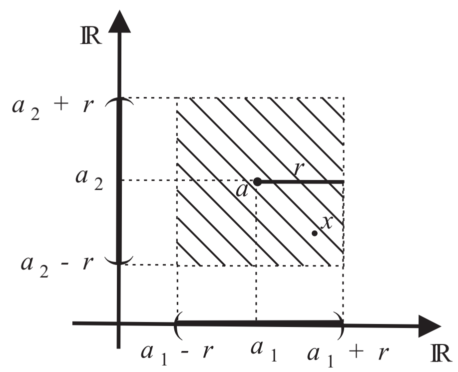


Figura 3: $|x_1 - a_1| < r$ e $|x_2 - a_2| < r$.

Já em $(\mathbb{R}^2, || \cdot ||_2)$, a bola $B(a; r)$ é o interior de um quadrado de centro $a = (a_1, a_2)$ e diagonais de comprimento $2r$, ambas paralelas aos eixos coordenados. Com efeito, se $x = (x_1, x_2) \in B(a; r)$, então $||x - a||_2 < r$, ou seja, $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r$. Tomemos, inicialmente, $a = (0, 0)$, ou seja, $a_1 = a_2 = 0$. Daí, $|x_1| + |x_2| < r$. Logo, temos quatro casos para analisar:

1º) Se $x_1, x_2 \geq 0$, então $x_1 + x_2 < r$; $(\mathcal{R}_1)$

2º) Se $x_1 \geq 0$ e $x_2 < 0$, então $x_1 - x_2 < r$; $(\mathcal{R}_2)$

3º) Se $x_1 < 0$ e $x_2 \geq 0$, então $-x_1 + x_2 < r$; $(\mathcal{R}_3)$

4º) Se $x_1, x_2 < 0$, então $-x_1 - x_2 < r$. $(\mathcal{R}_4)$

Temos representadas no plano $\mathbb{R}^2$, as quatro regiões $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$. Observemos que $B(0, r) = \bigcap\limits_{i=1}^{4} \mathcal{R}_i$:

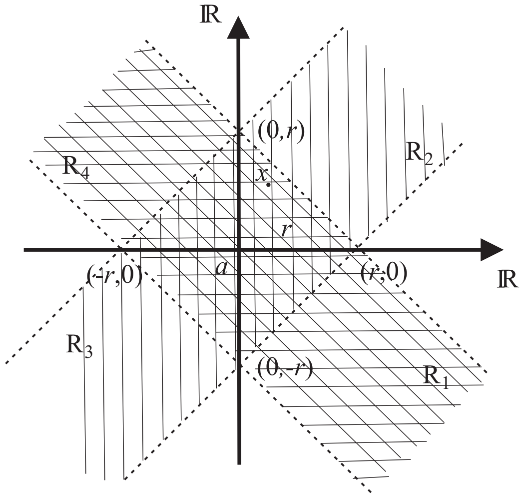


Figura 4: $|x_1| + |x_2| < r$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $a = (a_1, a_2)$ seja um ponto do primeiro quadrante. Considerando a translação $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$, a região que aparece na Figura 4 transforma-se na que aparece abaixo:

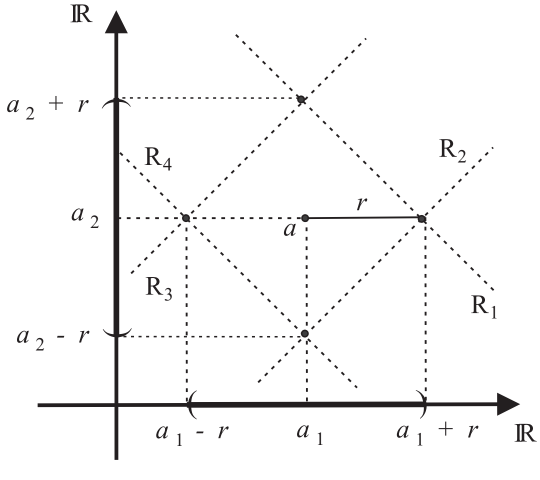


Figura 5: $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r$.

Proposição 1.3. *Sejam a e b dois pontos distintos de um espaço normado. Se $||a - b|| \geq r + s$, onde $r > 0$ e $s > 0$, então as bolas abertas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ são disjuntas.*

Demonstração. Suponhamos que $B(a; r) \cap B(b; s) \neq \emptyset$ e tomemos $x \in B(a; r) \cap B(b; s)$. Daí, $||a - x|| < r$ e $||b - x|| < s$, donde obtemos

$$||a - b|| \leq ||a - x|| + ||x - b|| < r + s,$$

o que contradiz a hipótese. Portanto, $B(a;r) \cap B(b;s) = \emptyset$. ■

Seja E um espaço normado, e consideremos $a \in E$, $r > 0$ e $\lambda > 0$. Definindo

$$a + B(0;r) = \{x \in E; x = a + y, \text{ com } y \in B(0;r)\}$$

e

$$\lambda \cdot B(0;r) = \{x \in E; x = \lambda y, \text{ com } y \in B(0;r)\},$$

temos a seguinte

Proposição 1.4. *Com a notação acima, temos:*
(i) $a + B(0;r) = B(a;r)$;
(ii) $\lambda \cdot B(0;r) = B(0;\lambda r)$.

Demonstração. (i) Para mostrarmos essa afirmação, tomemos $w \in B(a;r)$ e consideremos $y = w - a$. Temos, então, que $w = a + y$, onde $y \in B(0;r)$, já que $||y|| = ||w - a|| < r$. Com isso, vemos que $w \in a + B(0;r)$. Por outro lado, tomemos $w \in a + B(0;r)$. Por definição, $w = a + y$, onde $y \in B(0;r)$. Assim, $||w - a|| = ||y|| < r$, o que mostra que $w \in B(a;r)$.

(ii) Tomemos $w \in B(0,\lambda r)$. Logo, $||w|| < \lambda r$. Seja $y = w/\lambda$. Temos $w = \lambda y$, com $y \in B(0;r)$, já que $||y|| = \|\frac{w}{\lambda}\| = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \cdot ||w|| = \frac{1}{\lambda} \cdot ||w|| < \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda r = r$. Com isso, temos que $w \in \lambda \cdot B(0;r)$. Para mostrarmos a outra inclusão, tomemos $w \in \lambda \cdot B(0;r)$. Daí, temos que $w = \lambda y$ com $y \in B(0;r)$. Notemos que $||w|| = ||\lambda y|| = \lambda ||y|| < \lambda r$, o que mostra que $w \in B(0;\lambda r)$. ■

A Proposição 1.3 pode ser generalizada para um espaço métrico qualquer, mas a Proposição 1.4 não, uma vez que precisamos da operação de adição e da operação de multiplicação por escalar no espaço E.

O próximo resultado mostra que se considerarmos (M,d) como no Exemplo 1.4, "a bola aberta do produto cartesiano é um produto cartesiano de bolas abertas".

Proposição 1.5. *Sejam $(M_1,d_1), (M_2,d_2), \ldots, (M_n,d_n)$ espaços métricos. Consideremos (M,d) como sendo o espaço métrico $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ e d a métrica usual em M. Tomemos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ e $r > 0$. Então*

$$B(a;r) = B(a_1;r) \times B(a_2;r) \times \cdots \times B(a_n;r).$$

Demonstração. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$. Temos

$$x \in B(a;r) \Leftrightarrow d(x,a) < r$$

$$\Leftrightarrow \max\{d_i(x_i,a_i); 1 \leq i \leq n\} < r$$

$$\Leftrightarrow d_i(x_i,a_i) < r, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\Leftrightarrow x_i \in B(a_i;r), \quad \text{para todo} \quad 1 \le i \le n$$
$$\Leftrightarrow x \in B(a_1;r) \times \cdots \times B(a_n;r).$$

■

O resultado acima também é válido para bolas fechadas. Mais precisamente,

$$B[a;r] = B[a_1;r] \times B[a_2;r] \times \cdots \times B[a_n;r].$$

Definição 1.4. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que X é limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x,y) \le c$ para quaisquer $x, y \in X$. Notemos que um tal c é uma cota superior para o conjunto $\{d(x,y); x,y \in X\}$. A menor de tais cotas superiores é chamada de diâmetro de X e denotada por* $\operatorname{diam}(X)$. *Em outras palavras,*

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x,y); x,y \in X\}.$$

Ao fazermos considerações sobre o diâmetro de um conjunto X, sempre suporemos que $X \neq \emptyset$.

Proposição 1.6. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Se X é limitado e $Y \subset X$, então Y é limitado e* $\operatorname{diam}(Y) \le \operatorname{diam}(X)$.

Demonstração. Seja $c = \operatorname{diam}(X)$. Então, para quaisquer $x, y \in X$, $d(x,y) \le c$. Como $Y \subset X$, dados $x_1, y_1 \in Y$, temos que $x_1, y_1 \in X$ e, daí, $d(x_1,y_1) \le c$, mostrando que Y é limitado. Notemos que c é uma cota superior do conjunto $\{d(x_1,y_1); x_1,y_1 \in Y\}$. Seja c_1 o supremo desse conjunto. Daí, $c_1 \le c$, isto é, $\operatorname{diam}(Y) \le \operatorname{diam}(X)$. ■

Exemplo 1.10. Em um espaço normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B = B(a;r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro é igual a $2r$. De fato, sejam $x, y \in B$. Notemos que

$$||x-y|| = ||(x-a)+(a-y)|| \le ||x-a|| + ||y-a|| < 2r,$$

donde B é limitado com $\operatorname{diam}(B) \le 2r$. Suponhamos, por absurdo, que $\operatorname{diam}(B) = s < 2r$. Tomemos $y \neq 0$ em E e $t \in \mathbb{R}$ tal que $s < 2t < 2r$. Notemos que o vetor $x = t \cdot \frac{y}{||y||}$ é tal que $||x|| = t < r$. Com isso, temos que $a+x$ e $a-x$ pertencem a B, pois $||(a+x)-a|| = ||x|| < r$ e $||(a-x)-a|| = ||-x|| < r$. Além disso,

$$||a+x-(a-x)|| = 2||x|| = 2t > s,$$

o que não ocorre. Portanto, $\operatorname{diam}(B) = 2r$.

Toda bola aberta $B = B(a; r)$ de um espaço métrico é um conjunto limitado, pois para quaisquer x e y em B,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r.$$

Porém, $\operatorname{diam}(B)$ pode ser diferente de $2r$. De fato, considere $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica discreta. A bola aberta $B = B(3, 1) = \{3\}$ tem diâmetro igual a zero.

O próximo resultado mostra a relação entre conjuntos limitados e bolas abertas.

Proposição 1.7. *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *X é limitado;*

(ii) *$X \subset B(a; r)$ para algum $a \in M$ e algum $r > 0$.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que $X \subset M$ seja não vazio e limitado. Daí, existe $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in X$. Tomemos $a \in X$. Logo, $d(x, a) \leq c$ para todo $x \in X$. Portanto, $x \in B[a; c]$ para todo $x \in X$ e, então, $X \subset B[a; c] \subset B(a; r)$ onde $r = 2c$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Como $B(a; r)$ é limitado, segue da Proposição 1.6 que X é limitado.
$\blacksquare$

No caso de um espaço normado E, dado $X \subset E$, não vazio, dizer que *X é limitado* equivale a dizer que *X está contido em alguma bola aberta centrada no zero*, pois num espaço normado cada bola $B(a; r)$ está contida em alguma bola $B(0; s)$. Deixamos a prova desse fato como exercício (ver Exercício 1.11).

1.4 Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Definição 1.5. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Dizemos que um ponto $a \in X$ é um ponto interior de X quando existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado o interior de X, e é denotado por int(X).*

Por definição, int$(X) \subset X$. Notemos que, dizer que um ponto $b \in X$ *não* é interior a X, significa que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.6. *O conjunto formado pelos pontos $b \in M$ tais que $B(b; r) \cap X \neq \emptyset$ e $B(b; r) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$, para todo $r > 0$, é chamado de fronteira de X e denotado por ∂X.*

É fácil ver que $\partial X = \partial(M \setminus X)$.

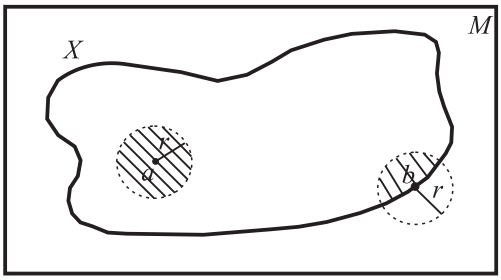


Figura 6: $a \in \text{int}(X)$ e $b \in \partial X$.

Exemplo 1.11. Consideremos $\mathbb{R}$ com a sua métrica usual. O intervalo $I = [-1, 2)$ é tal que $\text{int}(I) = (-1, 2)$ e $\partial I = \{-1, 2\}$. Com efeito, se $-1 < a < 2$ então, pondo $r = \min\{a+1, 2-a\}$, temos que $(a-r, a+r) \subset [-1, 2)$. Logo, $a \in \text{int}(I)$. Porém, $-1 \in \partial I$, pois, para todo $r > 0$, temos $(-1 - r, r - 1) \cap (\mathbb{R} - I) \neq \emptyset$ e $(-1 - r, r - 1) \cap I \neq \emptyset$. Analogamente, vemos que $2 \in \partial I$.

Consideremos $X \subset M$, onde M é um espaço métrico. Dado um ponto $a \in M$, temos três possibilidades exclusivas: ou $a \in \text{int}(X)$, ou $a \in \text{int}(M \setminus X)$ ou $a \in \partial X$. Assim, podemos afirmar que todo conjunto X decompõe o espaço M na reunião disjunta

$$M = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(M \setminus X).$$

Observação 1.1. Se um conjunto e seu complementar têm ambos interior vazio, então a fronteira de cada um deles é o espaço inteiro.

Definição 1.7. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que $X \subset M$ é aberto em M quando int$(X) = X$.*

Como $\text{int}(X) \subset X$, para mostrarmos que um conjunto X em M é aberto, devemos provar que $X \subset \text{int}(X)$, ou seja, que, para cada $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset X$.

Proposição 1.8. *Em qualquer espaço métrico M, toda bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Vamos mostrar que para cada $x \in B(a; r)$, existe $s > 0$ tal que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Para isso, seja $x \in B(a; r)$. Então, $d(x, a) < r$. Tomemos $s > 0$ tal que $d(x, a) + s = r$. Temos que $B(x; s) \subset B(a; r)$, pois se $y \in B(x; s)$, então $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < s + d(x, a) = r$, mostrando que $y \in B(a; r)$. ■

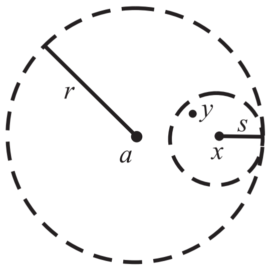


Figura 7: $B(x; s) \subset B(a; r)$.

Corolário 1.1. *Seja M um espaço métrico. Para todo $X \subset M$, int(X) é aberto em M.*

Demonstração. Com efeito, seja $a \in \text{int}(X)$. Daí, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. Pela Proposição anterior, para todo $x \in B(a; r)$ existe $s > 0$ tal que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Logo, $B(x; s) \subset X$, ou seja, para todo $x \in B(a; r)$ tem-se que $x \in \text{int}(X)$. Portanto, $B(a; r) \subset \text{int}(X)$, o que mostra que int$(X)$ é aberto em M. ∎

Pelo Corolário acima, vemos que int(X) é o maior aberto contido em X, ou seja, se A é aberto em X e $A \subset X$, então $A \subset \text{int}(X)$.

Proposição 1.9. *Seja M um espaço métrico. Então:*

(i) *M e $\emptyset$ são conjuntos abertos;*

(ii) *a interseção de um número finito de conjuntos abertos de M é um conjunto aberto;*

(iii) *a reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos de M é um conjunto aberto.*

Demonstração. (i) a) M é aberto, pois dados $a \in M$ e $r > 0$, temos $B(a; r) \subset M$, ou seja, $a \in \text{int}(M)$. O conjunto vazio $\emptyset$ também é aberto. Com efeito, se $\emptyset$ não fosse aberto, existiria $x \in \emptyset$, tal que $x \notin \text{int}(\emptyset)$, o que é impossível. Logo $\emptyset$ é aberto.

(ii) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abertos de M, onde $n \in \mathbb{N}^*$. Tomemos $a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Como esses conjuntos são abertos, existem $r_1 > 0$, $r_2 > 0, \ldots, r_n > 0$ tais que $B(a; r_1) \subset A_1$, $B(a; r_2) \subset A_2, \ldots, B(a; r_n) \subset A_n$. Tomemos $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Daí,

$$B(a; r) \subset B(a; r_1) \subset A_1,$$

$$B(a; r) \subset B(a; r_2) \subset A_2, \ldots, B(a; r) \subset B(a; r_n) \subset A_n.$$

Logo,

$$B(a;r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Portanto, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto.

(iii) Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de abertos de M. Tomemos $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Daí, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset A_{\lambda_0}$. Logo, $B(a;r) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A$. Portanto, A é aberto. ∎

Corolário 1.2. *Consideremos um espaço métrico M. Um subconjunto A de M é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.9. ∎

Exemplo 1.12. A interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Consideremos $\mathbb{R}$ com sua métrica usual. Temos que $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$. É claro que $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$. Vamos mostrar a outra inclusão. Com efeito, tomemos $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$. Suponhamos, por absurdo, que $x \neq 0$. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_0 > 1/|x|$, ou seja, $|x| > 1/n_0$. Logo, $x \notin (-1/n_0, 1/n_0)$. Portanto, $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$, o que é um absurdo. Note também que $\{0\}$ não é aberto, já que a bola $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset \{0\}$, para todo $\varepsilon > 0$.

Proposição 1.10. *Seja E um espaço normado. Se F é um subespaço vetorial de E, onde $F \neq E$, então int$(F) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que int$(F) \neq \emptyset$. Então, existem $x \in F$ e $r > 0$ tais que $B(x;r) \subset F$. Ora, pela Proposição 1.4 temos que $x + B(0;r) = B(x;r) \subset F$. Como F é um subespaço vetorial de E,

$$B(0,r) \subset F - x \subset F. \tag{1.1}$$

Além disso, para todo $\lambda > 0$.

$$\lambda \cdot B(0;r) \subset \lambda \cdot F \subset F. \tag{1.2}$$

Aplicando a Proposição 1.4 em (1.2), temos $B(0;\lambda r) \subset F$ para todo $\lambda > 0$.

Agora, tomemos $x \in E$. Se $x = 0$, então $x \in F$ já que F é um subespaço vetorial de E. Se $x \neq 0$, temos $B(0; 2||x||) = B(0;\lambda r) \subset F$, onde $\lambda = \frac{2||x||}{r}$. Isso mostra que $x \in F$. Daí, temos que $F = E$, o que contraria o fato de F ser um subespaço próprio de E. Portanto, int$(F) = \emptyset$. ∎

Definição 1.8. *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que um ponto $a \in M$ é aderente a X quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \phi$.*

Chamamos de fecho (ou aderência) de um conjunto $X \subset M$, ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos de M que são aderentes a X.

Exemplo 1.13. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X, já que $a \in X$ implica que $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Consequentemente $a \in \overline{X}$. Assim, $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset M$. Claramente, vemos que os pontos da fronteira de X são aderentes a X, já que $x \in \partial X$ implica que $B(x;\varepsilon) \cap X \neq \phi$.

Exemplo 1.14. Num espaço normado E, o fecho de uma bola aberta $B(a;r)$ é a bola fechada $B[a;r]$, isto é, $\overline{B(a;r)} = B[a;r]$. Com efeito, tome $b \in B[a;r]$. Logo, $||b-a|| \leq r$. Temos então dois casos a analisar:

a) Se $||b-a|| < r$, então $b \in B(a;r)$. Pelo exemplo anterior, temos que $b \in \overline{B(a;r)}$.

b) Seja agora $||b-a|| = r$. Dado $\varepsilon > 0$, vamos mostrar que existe $x \in B(a;r)$ tal que $||b-x|| < \varepsilon$. Com efeito, comecemos fixando $\varepsilon > 0$. Seja $u = \frac{b-a}{r}$. Tomemos um número real $t > 0$ tal que $r - \varepsilon < t < r$. Temos, portanto, $0 < r-t < \varepsilon$. Pondo $x = a+tu$, vemos que $||x-a|| = ||tu|| = |t| \cdot ||u|| = |t| = t < r$. Logo, $x \in B(a;r)$. Além disso, $||x-b|| = ||b-a-tu|| = ||ru-tu|| = ||u|| \cdot |r-t| = r-t < \varepsilon$. Daí, $||b-x|| < \varepsilon$ e, portanto, $B(a;r) \cap B(b;\varepsilon) \neq \emptyset$. Isto mostra que $b \in \overline{B(a;r)}$.

Para provarmos a outra inclusão, tome $b \in \overline{B(a;r)}$. Suponhamos, por absurdo, que $b \notin B[a;r]$. Daí, $||b-a|| > r$, ou seja, $||b-a|| = r+\varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Temos, ainda, que para todo $x \in B(a;r)$, $||x-a|| < r$. Como $||b-a|| \leq ||b-x|| + ||x-a||$, temos então que $||b-a|| - ||x-a|| \leq ||b-x||$ implica que $||b-x|| > \varepsilon > 0$, para todo $x \in B(a;r)$. Logo, $B(b;\varepsilon) \cap B(a;r) = \emptyset$ para algum $\varepsilon > 0$, isto é, $b \notin \overline{B(a;r)}$ o que é um absurdo. Portanto, $b \in B[a;r]$.

Num espaço métrico qualquer não é verdade que o fecho de uma bola aberta é a bola fechada. Como exemplo, consideremos $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica discreta. Temos que

$$B(0;1) = \{0\} \quad \text{e} \quad B[0;1] = \mathbb{R}.$$

Notemos que $\overline{B(0;1)} = \{0\}$.

Para que a não seja aderente a $X \subset M$ é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro a, na qual não há pontos de X, ou seja, $a \notin \overline{X}$ se, e somente se, $B(a;r) \cap X = \emptyset$ para algum $r > 0$. Assim, vemos que $M \setminus \overline{X} = \text{int}(M \setminus X)$. Como foi visto anteriormente, o espaço M pode ser decomposto em três conjuntos dois a dois disjuntos, a saber: $M = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(M \setminus X)$. Como $M \setminus \overline{X} = \text{int}(M \setminus X)$, concluímos que $\overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial X$.

Definição 1.9. *Dizemos que um conjunto $F \subset M$ é fechado num espaço métrico M quando $F = \overline{F}$, isto é, se todo ponto aderente a F pertencer a F.*

Proposição 1.11. *Para todo subconjunto $X \subset M$, tem-se $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Demonstração. Com efeito, vamos mostrar que $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$, já que a outra inclusão é óbvia. Tomemos, $a \in \overline{\overline{X}}$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Por definição temos que $B(a;\varepsilon) \cap \overline{X} \neq \emptyset$. Daí, existe $b \in \overline{X}$ tal que $b \in B(a;\varepsilon)$. Seja $\delta > 0$ tal que $B(b;\delta) \subset B(a;\varepsilon)$. Como $b \in \overline{X}$, temos que $B(b;\delta) \cap X \neq \emptyset$. Logo, $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário, segue que $a \in \overline{X}$. ■

Pela Proposição acima, segue que o fecho de todo conjunto $X \subset M$ é um conjunto fechado. Além disso, $\overline{X}$ é o menor subconjunto fechado de M que contém X, ou seja, se F é fechado e $X \subset F$, então $\overline{X} \subset F$. De fato, se $X \subset F$ então $\overline{X} \subset \overline{F}$. Como $F = \overline{F}$, segue que $\overline{X} \subset F$.

Proposição 1.12. *Seja M um espaço métrico. Temos que $F \subset M$ é fechado se, e somente se, seu complementar $M \setminus F$ é aberto.*

Demonstração. Vimos que $M \setminus \overline{X} = \text{int}(M \setminus X)$ para qualquer $X \subset M$. Tomemos $F \subset M$ fechado. Então $M \setminus \overline{F} = M \setminus F$. Daí, $M \setminus F = \text{int}(M \setminus F)$, mostrando que $M \setminus F$ é aberto. Suponhamos agora que $M \setminus F$ seja aberto. Então, $M \setminus F = \text{int}(M \setminus F)$. Como $\text{int}(M \setminus F) = M \setminus \overline{F}$, segue que $M \setminus F = M \setminus \overline{F}$, ou seja, $F = \overline{F}$, mostrando que F é fechado. ■

Exemplo 1.15. Num espaço métrico M, toda bola fechada $B[a;r]$ é um subconjunto fechado de M, pois seu complementar é aberto. Com efeito, seja $A = M \setminus B[a;r]$. Se $A = \emptyset$, então A é aberto. Suponhamos $A \neq \emptyset$. Tomemos $c \in A$. Daí, $d(c,a) > r$. Tomemos $s > 0$ tal que $r + s < d(a,c)$. Pela Proposição 1.3 , temos que $B[a;r] \cap B[c;s] = \emptyset$. Logo, $B[c;s] \subset M \setminus B[a;r]$, donde $c \in \text{int}(A)$. Portanto, $A = M \setminus B[a;r]$ é aberto.

A seguinte proposição é a versão para conjuntos fechados da Proposição 1.9.

Proposição 1.13. *Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos subconjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

(i) *$M \in \mathcal{F}$ e $\phi \in \mathcal{F}$ (o espaço M e ϕ são fechados);*

(ii) *Se $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, então $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$ (a reunião de um número finito de conjuntos fechados de M é um subconjunto fechado de M);*

(iii) *Se $F_\lambda \in \mathcal{F}$ para todo $\lambda \in L$ então $A = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \mathcal{F}$ (a interseção arbitrária de subconjuntos fechados de M é um subconjunto fechado de M).*

Demonstração. (i) $M \in \mathcal{F}$ e $\phi \in \mathcal{F}$, pois $M \setminus M = \phi$ e $M \setminus \phi = M$ são subconjuntos abertos em M.

(ii) Neste caso, notemos que $A_1 = M \setminus F_1, A_2 = M \setminus F_2, \ldots, A_n = M \setminus F_n$ são abertos em M. Logo, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (M \setminus F_1) \cap (M \setminus F_2) \cap \cdots \cap (M \setminus F_n) = M \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n)$ é aberto, portanto $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado em M.

(iii) Consideremos $A_\lambda = M \setminus F_\lambda$ para cada $\lambda \in L$. Então A_λ é aberto, para cada $\lambda \in L$, e, portanto, $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \in L} (M \setminus F_\lambda) = M \setminus \left[\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda\right]$ é aberto em M. Logo $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado em M. ■

Definição 1.10. *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é um ponto de acumulação de X quando $B(a;\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Denotamos por X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de X.

Notemos que, pela definição, $a \in X'$ se, e somente se, $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$.

Proposição 1.14. *Se $X \subset M$, onde M é um espaço métrico, então $\overline{X} = X \cup X'$.*

Demonstração. Com efeito, tome $a \in \overline{X}$. Daí, $a \in X$ ou $a \notin X$. Se $a \notin X$, então toda bola de centro a contém um ponto $x \in X$, onde $x \neq a$ e, portanto, $a \in X'$. Por outro lado, tomemos $a \in X \cup X'$. Logo, $a \in X$ ou $a \in X'$. Se $a \in X$, então $a \in \overline{X}$. Se $a \in X'$, então $a \in \overline{X \setminus \{a\}} \subset \overline{X}$. ■

Pela Proposição acima, todo ponto de acumulação é um ponto aderente. Mas nem todo ponto aderente é ponto de acumulação.

Definição 1.11. *Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz-se que a é um ponto isolado, isto é, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \cap X = \{a\}$.*

Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito discreto quando todo ponto de X é isolado.

Por exemplo, $\mathbb{Z}$ é um subconjunto discreto do espaço métrico $\mathbb{R}$. De fato, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos $(n-1, n+1) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$.

1.5 Sequências

Definição 1.12. *Seja M um espaço métrico. Uma sequência em M, denotada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou simplesmente (x_n), é uma aplicação $x\colon \mathbb{N}^* \to M$ que faz corresponder a cada $n \in \mathbb{N}^*$ um ponto $x_n \in M$. A imagem de $n \in \mathbb{N}^*$ pela aplicação x é chamada de n-ésimo termo da sequência, e será denotada por x_n. Por outro lado, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ ou $x(\mathbb{N}^*)$ denotam o conjunto dos termos, ou conjunto imagem, da sequência.*

Exemplo 1.16. Consideremos $x\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ onde $x_n = 1 + (-1)^n$. Temos que $(x_n) = (0, 2, 0, 2, \ldots)$ e o conjunto de seus termos é $x(\mathbb{N}^*) = \{0, 2\}$.

Definição 1.13. *Uma subsequência de uma sequência (x_n) é a restrição da função $x\colon \mathbb{N}^* \to M$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}^*$. Denotamos a subsequência $x|_{\mathbb{N}'}$ por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$.*

Notemos que a notação $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ representa uma função com domínio $\mathbb{N}^*$ que, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, faz corresponder um x_{n_k}, ou seja, uma subsequência é efetivamente uma sequência.

Exemplo 1.17. Consideremos a sequência $(x_n) = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)$. Temos que $(x_{n_k}) = (1, 1/3, 1/5, \dots 1/(2k-1), \dots)$ é uma subsequência de (x_n), onde $n \in \mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N}^* : n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Definição 1.14. *Uma sequência (x_n) em M é dita limitada quando o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado.*

Pela Proposição 1.7, dizer que (x_n) é limitada equivale a dizer que existe uma bola aberta $B(a;r)$ tal que $x(\mathbb{N}^*) \subset B(a;r)$. Claramente, uma subsequência de uma sequência limitada (x_n) também é limitada.

Exemplo 1.18. Seja $a \in \mathbb{R}$. A sequência constante $(x_n) = (a, a, \dots,)$ é limitada.

Definição 1.15. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M. Dizemos que (x_n) é convergente se existir $a \in M$ com a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$d(x_n, a) < \varepsilon \quad \textit{sempre que} \quad n \geq n_0.$$

Em virtude da próxima proposição, dizemos que $a \in M$ é o limite da sequência (x_n) e escrevemos

$$a = \lim x_n \textit{ ou } x_n \to a.$$

Proposição 1.15. *Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço métrico M. Então (x_n) possui um único limite.*

Demonstração. Suponhamos que $a \in M$ e $b \in M$ sejam limites da sequência (x_n), seja $\varepsilon > 0$. Então existem $n_0 \in \mathbb{N}^*$ e $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_0$$

e

$$d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_1.$$

Daí, tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$, resulta que

$$d(a,b) \leq d(x_N, a) + d(x_N, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrario, concluímos que $d(a,b) = 0$, ou seja $a = b$.

∎

Proposição 1.16. *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração. Com efeito, seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}^*$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ se $n > n_0$. Como $\mathbb{N}'$ é ilimitado, existe $k_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo, se $k > k_0$, então $n_k > n_{k_0} > n_0$, o que implica que $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a = \lim x_n$. ■

Proposição 1.17. *Seja M um espaço métrico. Toda sequência convergente em M é limitada.*

Demonstração. Com efeito, seja (x_n) uma sequência convergente em M. Digamos que $x_n \to a$. Tomemos $\varepsilon = 1$. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in B(a;1)$ se $n > n_0$. Como o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a;1)$ é reunião de dois conjuntos limitados, é fácil ver que esse conjunto é também limitado. Pelo fato de todos os termos de (x_n) pertencerem a esse conjunto, segue que (x_n) é limitada. ■

Notemos que a recíproca da Proposição 1.17 é falsa. Para isso, tomemos a sequência de números reais dada por $x_n = (-1)^n$. Essa sequência é limitada, pois o conjunto de seus termos é $\{-1, 1\}$. No entanto, essa sequência diverge em virtude da Proposição 1.15.

Proposição 1.18. (Operações com limites). *Seja E um espaço normado. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$ e $\lim(kx_n) = k \lim x_n$, onde $k \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $||x_n - a|| < \varepsilon/2$ se $n > n_1$ e $||y_n - b|| < \varepsilon/2$ se $n > n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Notemos que se $n > n_0$, então

$$\begin{aligned}||(x_n + y_n) - (a + b)|| &= ||x_n - a + y_n - b|| \\ &\leq ||x_n - a|| + ||y_n - b|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto $lim(x_n + y_n) = a + b$. De modo análogo provamos que $\lim(x_n - y_n) = a - b$. Para provarmos que $\lim(kx_n) = k \lim x_n$, onde $k \in \mathbb{K}$, notemos que se $k = 0$, então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $kx_n = 0$ e a sequência (kx_n) converge trivialmente para $0 = ka$. Suponhamos que $k \neq 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $||x_n - a|| < \varepsilon/|k|$ se $n > n_0$. Consequentemente $||kx_0 - ka|| = |k|||x_n - a|| < \varepsilon$ se $n > n_0$. Assim, $\lim(kx_n) = ka = k \lim x_n$. ■

A seguir vamos caracterizar o fecho de um conjunto através de sequências. Também caracterizaremos conjuntos fechados, conjuntos abertos e a noção de ponto de acumulação através de sequências.

Proposição 1.19. *Sejam $X \subset M$ e $a \in M$. Então $a \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) seja uma sequência em X tal que $\lim x_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Logo, $x_n \in B(a, \varepsilon) \cap X$ para todo $n > n_0$, o que implica que $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Portanto, $a \in \overline{X}$. Reciprocamente, suponhamos que $a \in \overline{X}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a; 1/n) \cap X \neq \emptyset$, donde podemos tomar $x_n \in B(a; 1/n) \cap X$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Obtemos assim uma sequência (x_n) em X que satisfaz $d(x_n, a) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $\lim x_n = a$. ■

Corolário 1.3. *Seja $F \subset M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *F é fechado;*

b) *Se (x_n) é uma sequência em F convergindo a $a \in M$, então $a \in F$.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b): Suponhamos que $F = \overline{F}$ e que (x_n) seja uma sequência em F tal que $\lim x_n = a$. Pela Proposição anterior temos que $a \in \overline{F}$. Daí, $a \in F$.

b) $\Rightarrow$ a): Com efeito, basta mostrar que $\overline{F} \subset F$. Tomemos $a \in \overline{F}$. Pela Proposição 1.19, existe uma sequência (x_n) em F tal que $\lim x_n = a$. Pela hipótese, temos que $a \in F$ e, portanto, $\overline{F} \subset F$. Daí, F é fechado. ■

Proposição 1.20. *Seja A um subconjunto de M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *A é aberto;*

b) *Para cada sequência (x_n) em M, que converge a um elemento $a \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b): Suponhamos que A seja aberto e que $\lim x_n = a \in A$. Daí, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) \subset A$ e, portanto, para este $\varepsilon > 0$ dado, existe n_0 tal que $x_n \in B(a; \varepsilon) \subset A$ se $n > n_0$.

b) $\Rightarrow$ a): Se A não fosse aberto, existiria $b \in A$ com a seguinte propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}^*$, teríamos

$$B\left(b, \frac{1}{n}\right) \cap (M \setminus A).$$

Assim, b seria o limite de uma sequência (y_n) em $M \setminus A$, o que na ■

Proposição 1.21. *Seja $X \subset E$, onde E é um espaço normado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *$a \in X'$;*

b) *existe uma sequência (x_n), de pontos distintos de X, tal que $\lim x_n = a$.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b): Seja $a \in X'$. Daí, existe $x_1 \neq a$ tal que $x_1 \in B(a;1) \cap X$. Da mesma forma, existe $x_2 \neq a$ tal que $x_2 \in (a;\varepsilon_1) \cap X$ onde $\varepsilon_1 = \min\{1/2, d(x_1,a)\}$. Prosseguindo indutivamente, obtemos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de modo que $x_n \in B(a;1/n) \cap X$, onde $x_m \neq x_n$ sempre que $m \neq n$. Como $d(x_n,a) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, segue que (x_n) é uma sequência de pontos distintos de X, tal que $\lim x_n = a$.
b) $\Rightarrow$ a): Suponhamos que (x_n) seja uma sequência de pontos distintos em X, onde $\lim x_n = a$. Daí, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in B(a;\varepsilon) \cap X$ se $n > n_0$. Como (x_n) possui pontos distintos, possivelmente apenas um dos seus termos pode ser igual a a. Com isso, $B(a;\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Logo $a \in X'$. ■

Terminamos esta seção apresentando um espaço de sequências muito importante em Análise: os espaços ℓ^p, onde $p \in [1 + \infty)$.

Exemplo 1.19. Seja ℓ^p, com $p \in [1, +\infty)$, o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de $\mathbb{R}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Se definirmos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então ℓ^p é um espaço vetorial, e a aplicação

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p \mapsto ||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em ℓ^p.

Não havendo dificuldades em tratar o caso em que $p = 1$, analisemos o caso em que $p > 1$.

Antes disso, vamos provar três afirmações:

Afirmação 1: Se $0 < \alpha < 1$ e $a, b \geq 0$, então $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $0 < a < b$ (o caso em que $a = b = 0$ é óbvio). Consideremos a aplicação derivável $t \in [a,b] \mapsto t^{1-\alpha} \in \mathbb{R}$. Pelo teorema do valor médio, existe $t \in (a,b)$ tal que

$$(1-\alpha)t^{-\alpha}(b-a) = b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}.$$

Como $a < t$, então $t^{-\alpha} < a^{-\alpha}$. Daí, $b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1-\alpha)t^{-\alpha}(b-a) < (1-\alpha)a^{-\alpha}(b-a)$. Multiplicando essa desigualdade por a^α, temos $a^\alpha b^{1-\alpha} - a < (1-\alpha)(b-a)$, isto é,

$$a^\alpha b^{1-\alpha} < \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Afirmação 2: Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(*Desigualdade de Hölder*[1]).

Com efeito, o caso em que $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p = 0$ (ou $\sum\limits_{k=0}^{n} |y_k|^q = 0$) é claro.

Assim, suponhamos que $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p > 0$ e $\sum\limits_{k=0}^{n} |y_k|^q > 0$. Para cada k, com $0 \leq k \leq n$, consideremos

$$a_k = \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{j=0}^{n} |x_j|^p} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{j=0}^{n} |y_j|^q}.$$

Aplicando a Afirmação 1, com $\alpha = \frac{1}{p}$, temos

$$(a_k)^{1/p} \cdot (b_k)^{1/q} = a_k^{\alpha} \cdot b_k^{1-\alpha} \leq \alpha a_k + (1-\alpha) b_k = \frac{1}{p} a_k + \frac{1}{q} b_k.$$

Logo,

$$\frac{|x_k|}{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_k|}{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{j=0}^{n} |x_j|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{j=0}^{n} |y_j|^q},$$

para cada $k = 0, 1, \ldots, n$.

Assim,

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{|x_k|}{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_k|}{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right] \leq \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{j=0}^{n} |x_j|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{j=0}^{n} |y_j|^q} \right],$$

ou seja,

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k| \cdot |y_k|}{\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p}{\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |y_k|^p}{\sum\limits_{k=0}^{n} |y_k|^p} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

seguindo a desigualdade desejada.

[1]Otto Ludwig Hölder (1859–1937): Nascido em Stuttgart, Alemanha, estudou engenharia no Instituto Politécnico de Stuttgart por um ano, e em 1877 foi para Universidade de Berlim. Sua área de pesquisa era a convergência das Séries de Fourier, posteriormente se interessando pela Teoria dos Grupos. Em 1884 descobriu a desigualdade que leva seu nome.

Afirmação 3: Se $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, então

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(*Desigualdade de Minkowski*[2]).

O resultado é claro se $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k + y_k| = 0$. Assim, suponhamos que $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k + y_k| > 0$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} (|x_k + y_k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} (|x_k + y_k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade foi obtida aplicando duas vezes a desigualdade de Hölder.

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ implica $p = (p-1)q$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p \leq &\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p)\right)^{\frac{1}{q}} \\
= &\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].
\end{aligned}$$

Multiplicando esta desigualdade por $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{-\frac{1}{q}} > 0$, vem

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

[2]Hermann Minkowski (1864-1909): Nascido em Alexotas, Império Russo (hoje Kaunas, Lituânia), mostrou seu talento para matemática ainda cedo, ao estudar no ginásio em Königsberg, Alemanha. Em 1883 ganhou o prêmio da Academia de Paris por ter dado uma solução para o problema do número de representações de um inteiro como soma de cinco quadrados. Seu interesse era pela matemática pura, em particular, pelas Formas Quadráticas e pelas Frações Contínuas. Sua contribuição mais original foi sobre Geometria dos Números, conduzindo-o a trabalhar em Corpos Convexos.

seguindo a Afirmação 3.

Com as três afirmações que acabamos de demonstrar, vejamos que ℓ^p é um espaço normado. Com efeito, o fato de ℓ^p ser um espaço vetorial segue diretamente da desigualdade de Minkowski, obtida na Afirmação 3. Além disso, a aplicação

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_p \longmapsto ||x|| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em ℓ_p. Realmente, as condições (n1) e (n2) da Definição 1.2 podem ser facilmente verificadas. Já a condição (n3) provém diretamente da desigualdade de Minkowski. Portanto, ℓ_p é um espaço normado.

1.6 Funções contínuas

Nesta seção, vamos estudar uma classe importante de funções entre espaços métricos: as funções contínuas.

Definição 1.16. *Sejam M e N dois espaços métricos. Uma função $f\colon M \to N$ é dita contínua em $a \in M$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $d(x,a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Uma função $f\colon M \to N$ é dita contínua quando ela é contínua em todos os pontos de M.*

Podemos dizer, de forma equivalente, que $f\colon M \to N$ é contínua em $a \in M$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$ (ver Figura 8).

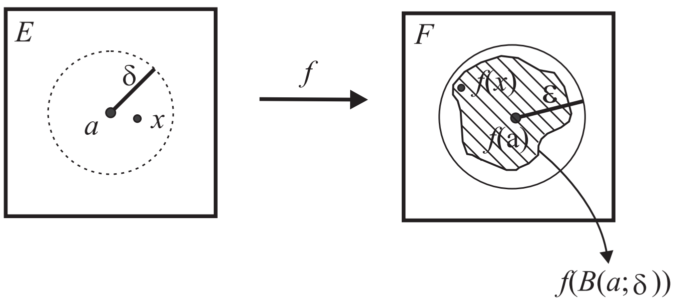


Figura 8: $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$.

Devemos observar que a noção de continuidade num ponto depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. Assim, se existir uma bola aberta $B = B(a;r)$ tal que a restrição $f|_B$ seja contínua em a, então $f\colon M \to N$ será contínua no ponto a. De modo geral, se $f|_X$ for contínua em toda parte limitada $X \subset M$, então $f\colon M \to N$ é contínua, lembrando que X é limitado quando está contido em alguma bola aberta.

Exemplo 1.20. Uma aplicação constante $f\colon M \to N$, definida por $f(x) = k \in N$ para todo $x \in M$, é uma função contínua. Temos também que, se E é um espaço normado, a norma $||\cdot||\colon E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, pois $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$ para quaisquer $x, y \in E$.

Exemplo 1.21. Sejam E e F dois espaços normados. Se $f, g\colon E \to F$ são funções contínuas, então $f + g\colon E \to F$ e $cf\colon E \to F$, com $c \in \mathbb{K}$, são funções contínuas.

Exemplo 1.22. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, é contínua em cada parte limitada de $\mathbb{R}$. Com efeito, se $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$, então

$$\begin{aligned} |x^n - y^n| &= |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} \\ &\leq |x - y| \cdot (|x|^{n-1} + |x|^{n-2} \cdot |y| + \cdots + |x||y|^{n-2} + |y|^{n-1}) \\ &\leq c|x - y|, \end{aligned}$$

onde $c = na^{n-1}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon/c$. Notemos que, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| \leq c|x - a| < c\delta = \varepsilon$.

Pelos Exemplos 1.21 e 1.22, segue que um polinômio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função contínua em cada intervalo limitado $[a, b]$. Logo, todo polinômio $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. De modo análogo, temos que um polinômio $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, onde $a_i \in \mathbb{C}$ para $0 \leq i \leq n$, é uma função contínua.

Exemplo 1.23. (Continuidade das operações de soma e multiplicação por um escalar em um espaço normado)

Seja E um espaço normado. A operação de soma $s\colon E \times E \to E$ definida por $s(x, y) = x + y$ e a operação de multiplicação por escalar $m\colon \mathbb{R} \times E \to E$ definida por $m(\lambda, x) = \lambda x$ são aplicações contínuas. Com efeito, fixados $x_0, y_0 \in E$ e $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} ||s(x, y) - s(x_0, y_0)|| &= ||(x + y) - (x_0 + y_0)|| \leq ||x - x_0|| + ||y - y_0|| \\ &\leq 2\max\{||x - x_0||, ||y - y_0||\} \\ &= 2||(x - x_0, y - y_0)|| \\ &= 2||(x, y) - (x_0, y_0)||, \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in E \times E$, e

$$\begin{aligned} ||m(\lambda, x) - m(\lambda, x_0)|| &= ||\lambda x - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - \lambda_0 x_0|| \\ &\leq ||x|| \cdot |\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0| \cdot ||x - x_0||, \end{aligned}$$

para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Daí, s é contínua em $(x_0, y_0) \in E \times E$ e m é contínua em $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$.

Definição 1.17. *Quando uma função $f\colon M \to N$ não é contínua num ponto $a \in M$ dizemos que f é descontínua nesse ponto.*

Quando quisermos mostrar que f é descontínua em a, basta exibirmos um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, seja possível obter $x_\delta \in M$ com $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Exemplo 1.24. Consideremos a função $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\xi(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $\xi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dita a função característica do conjunto $\mathbb{Q}$. Em todo ponto $a \in \mathbb{R}$, ξ é descontínua. De fato, tomemos $\varepsilon = 1/2$. Dado $\delta > 0$, tomemos x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, sendo x_δ racional se a for irracional ou x_δ irracional se a for racional. Em qualquer caso, $|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = 1 \geq 1/2$. Portanto, ξ é descontínua em $\mathbb{R}$.

Proposição 1.22. *Se $f\colon M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ e $g\colon N \to P$ é contínua no ponto $f(a) \in N$, então $g \circ f\colon M \to P$ é contínua no ponto a. Consequentemente, a composição de funções contínuas é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como g é contínua no ponto $f(a)$, então existe $\lambda > 0$ tal que se $y \in N$ e $d(y, f(a)) < \lambda$, então $d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$. Agora, como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) < \lambda$, o que implica que $d(g(f(x)), g(f(a)) < \varepsilon$. Logo, $g \circ f\colon M \to P$ é contínua no ponto a. ■

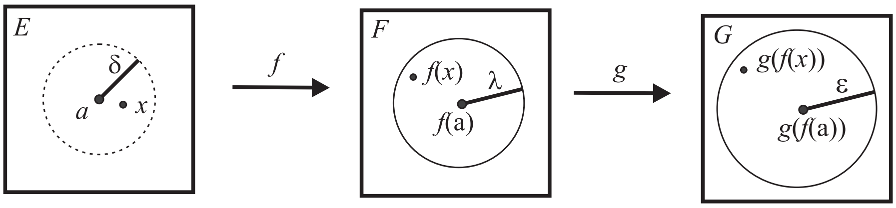


Figura 9: Composição de funções contínuas.

Corolário 1.4. *Se $f\colon M \to N$ é contínua e se $X \subset M$, então $f|_X\colon X \to N$ é contínua. Em outras palavras, toda restrição de uma aplicação contínua é contínua.*

Demonstração. Com efeito, $f|_X = f \circ i$, onde $i\colon X \to M$ é a aplicação de inclusão, $i(x) = x$ com $x \in X$. Claramente $i\colon X \to M$ é contínua, e, portanto, $f|_X = f \circ i$ é contínua. ■

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f \circ i"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Notemos que a recíproca desse corolário é falsa, como mostra o Exemplo 1.24. A função $\xi|_{\mathbb{Q}}$ é contínua, mas ξ não é contínua em ponto algum de $\mathbb{Q}$.

O próximo resultado traz uma caracterização sequencial da noção de continuidade em espaços métricos.

Proposição 1.23. *Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *f é contínua em a;*

b) *Para toda sequência (x_n) em M, com $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to f(a)$.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b): Suponhamos que f seja contínua em a. Daí, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Consideremos uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \to a$. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_n, a) < \delta$ sempre que $n > n_0$. Logo, $d(f(x_n, f(a)) < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Portanto, como ε foi tomado arbitrariamente, segue que $f(x_n) \to f(a)$.

b) $\Rightarrow$ a): Suponhamos, por absurdo, que f não seja contínua em a. Daí, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$, isto é, existe uma sequência (x_n) em M, onde $x_n \to a$, mas $(f(x_n))$ não converge para $f(a)$, o que é um absurdo. Portanto, f é contínua em a. ∎

Terminamos esta seção com o próximo resultado, que relaciona a noção de continuidade com a noção de conjuntos abertos.

Proposição 1.24. *Seja $f\colon M \to N$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *f é contínua;*

b) *$f^{-1}(A)$ é um aberto em M, para qualquer subconjunto A aberto em N.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b): Seja A um aberto em N. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$, então segue que $f^{-1}(A)$ é um aberto em M. Suponhamos que $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e tomemos $a \in f^{-1}(A)$. Como $f(a) \in A$ e A é um aberto em N, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A$. Pela continuidade de f em a, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Daí, $f(B(a; \delta)) \subset A$ e, portanto, $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A)$. Como $a \in f^{-1}(A)$ foi tomado arbitrariamente, segue que $f^{-1}(A)$ é um aberto em M.

b) $\Rightarrow$ a): Tomemos $a \in M$ e $\varepsilon > 0$. Como $A = B(f(a); \varepsilon)$ é um aberto em N, $f^{-1}(A)$ é um aberto em M. Como $a \in f^{-1}(A)$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A)$. Consequentemente, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Como $a \in M$ foi tomado arbitrariamente, segue que f é contínua. ∎

1.7 Densidade

Definição 1.18. *Um subconjunto $X \subset M$ é dito denso em M quando $\overline{X} = M$. Em outras palavras, X é denso em M quando para todo $a \in M$ e para todo $r > 0$, tem-se $B(a;r) \cap X \neq \emptyset$.*

Exemplo 1.25. Como todo intervalo aberto de números reais contém números racionais e números irracionais, temos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também é denso em $\mathbb{R}$.

O próximo resultado implica que o conjunto dos elementos $x \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são números racionais, denotado por $\mathbb{Q}^n$, é denso em $\mathbb{R}^n$. Também é denso em $\mathbb{R}^n$ o conjunto dos elementos $x \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são números irracionais.

Proposição 1.25. *Sejam M e N dois espaços métricos e sejam $X \subset M$ e $Y \subset N$ subconjuntos densos. Então, $X \times Y$ é denso em $M \times N$.*

Demonstração. Lembremos que estamos considerando em $M \times N$ a métrica do Exemplo 1.3. Fixemos $(a,b) \in M \times N$ e $r > 0$. Como $a \in M$ e $\overline{X} = M$, temos $B(a;r) \cap X \neq \emptyset$. Analogamente, $B(b;r) \cap Y \neq \emptyset$. Lembrando que $B((a,b);r) = B(a;r) \times B(b;r)$. (Proposição 1.5), vem que $B((a,b);r) \cap (X \times Y) \neq \emptyset$. Logo, $X \times Y \subset M \times N$ é denso. ■

Terminamos esta seção com o seguinte resultado:

Proposição 1.26. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então existe um conjunto enumerável $E \subset X$, que é denso em X, isto é,*

$$\overline{E} \cap X = X.$$

Demonstração. Consideremos a coleção de bolas

$$\mathcal{B} = \{B(a;r); a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+^* \text{ e } B(a;r) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Como $\mathcal{B}$ é enumerável, ponhamos

$$\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k, \ldots\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, seja $x_k \in B_k \cap X$.

Afirmação: $E = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ é denso em X, ou seja, $\overline{E} \cap X = X$.

Com efeito, tomemos $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Fixando $r \in (0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$, existe $a \in B(x;r) \cap \mathbb{Q}^n$ (lembre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$). Portanto,

$$x \in B(a;r) \cap X,$$

donde concluímos que $B(a;r) \in \mathcal{B}$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $B(a;r) = B_{k_0}$. Uma vez que

$$||x_{k_0} - x|| \leq ||x_{k_0} - a|| + ||x - a|| < r + r = 2r < \varepsilon,$$

segue que $B(x;\varepsilon) \cap E \neq \emptyset$. Assim, $\overline{E} \cap X = X$, o que completa a demonstração. ■

1.8 Espaços métricos completos

Definição 1.19. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é dita uma sequência de Cauchy quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m > n_0$.*

Não é difícil ver que *toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy*. Além disso, é fácil ver que toda sequência de Cauchy é limitada. O próximo resultado fornece uma condição para que uma sequência de Cauchy seja convergente.

Proposição 1.27. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M. Se (x_n) possui uma subsequência que converge para um ponto $a \in M$, então (x_n) converge para a.*

Demonstração. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) que converge para o ponto $a \in M$. Vamos mostrar que $\lim x_n = a$. Para isso, tomemos $\varepsilon > 0$. Como $\lim x_{n_k} = a$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$ sempre que $n_k > p$. Agora, pelo fato de (x_n) ser uma sequência de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ sempre que $m, n > q$. Seja $N = \max\{p, q\}$. Fixando $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > N$, temos

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \varepsilon,$$

para todo $n > N$, mostrando o desejado. ■

O fato de nem toda sequência de Cauchy em um espaço métrico ser convergente motiva a seguinte definição:

Definição 1.20. *Um espaço métrico M é dito um espaço métrico completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Uma classe importante de espaços métricos completos é a classe dos chamados espaços de Banach. Um espaço de Banach é um espaço normado que é completo segundo a métrica proveniente de sua norma.

Os espaços de Banach são objetos de estudo da Análise Funcional. Não entraremos em detalhes aqui, pois isso foge do objetivo deste livro. Para os leitores interessados no assunto indicamos [4] e [8]. A seguir vejamos alguns exemplos de espaços métricos completos.

Exemplo 1.26. $\mathbb{R}$ com sua métrica usual é completo. De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como essa sequência é limitada, o teorema de Bolzano-Weierstrass garante que (x_n) possui uma subsequência convergente. Daí, pela Proposição 1.27, (x_n) é convergente.

Exemplo 1.27. Os espaços ℓ^p são espaços métricos completos. De fato, fixemos $1 \leq p < \infty$ e seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ^p. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, x_n é uma sequência (x_m^n) de números reais tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^n|^p < \infty.$$

Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n, \ldots) \in \ell^p.$$

Como (x_n) é uma sequência de Cauchy em ℓ^p, segue que, para cada $k \in \mathbb{N}^*$ fixado, a sequência $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy de números reais, já que para quaisquer n e m em $\mathbb{N}^*$ tem-se

$$|x_k^n - x_k^m| \leq ||x_n - x_m||.$$

Pelo exemplo anterior, $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é convergente. Ponhamos

$$a_k = \lim_{n\to\infty} x_k^n; \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Vamos mostrar que a sequência $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ é um elemento de ℓ^p e que $x_n \to a$. Ora, pelo fato de (x_n) ser de Cauchy, (x_n) é limitada (ver Exercício 15). Assim, existe $M > 0$ tal que

$$||x_n|| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para todo $k \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||x_n|| \leq M.$$

Agora, fixemos $k \in \mathbb{N}^*$. Fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade acima, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M.$$

Como $k \in \mathbb{N}^*$ foi fixado arbitrariamente, a desigualdade anterior mostra que $a \in \ell^p$. Para mostrar que $x_n \to a$, tomemos $\varepsilon > 0$. Pelo fato de (x_n) ser de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n - x_m|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sempre que $n, m > n_0$. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||x_n - x_m|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sempre que $n, m > n_0$. Agora, fixemos $k \in \mathbb{N}^*$ e $n > n_0$. Fazendo $m \to +\infty$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n - a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $k \in \mathbb{N}^*$ foi fixado arbitrariamente, segue da desigualdade anterior que

$$||x_n - a|| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

sempre que $n > n_0$, mostrando o desejado.

O próximo resultado mostra que o produto cartesiano de dois espaços métricos completos é um espaço métrico completo.

Proposição 1.28. *Sejam (M, d_1) e (N, d_2) dois espaços métricos completos. Então $(M \times N, d)$ é um espaço métrico completo, onde d é a métrica usual de $M \times N$.*

Demonstração. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$. Assim, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência em M e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência em N. Como, para quaisquer n e m em $\mathbb{N}^*$, temos

$$d_1(x_n, x_m) \leq d(z_n, z_m)$$

e

$$d_2(y_n, y_m) \leq d(z_n, z_m),$$

segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é de Cauchy em M e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é de Cauchy em N. Pela completude de M e N, existem $a \in M$ e $b \in N$ tais que $x_n \to a$ e $y_n \to b$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(z_n, c) = \max\{d_1(x_n, a), d_2(y_n, b)\},$$

onde $c = (a, b)$, concluímos que $z_n \to c$. ■

Corolário 1.5. *$\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo. Em particular, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Basta observar que, pela Proposição 1.28, se (M_i, d_i) é um espaço métrico completo para $1 \leq i \leq n$, então $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é um espaço métrico completo. Em outras palavras, o produto cartesiano de n, $n \in \mathbb{N}^*$, espaços métricos completos é um espaço métrico completo. ■

Observamos que $\mathbb{R}^n$ é completo com a métrica euclidiana, já que

$$d_e(x, y) \leq nd(x, y),$$

para quaisquer x e y em $\mathbb{R}^n$.

Terminamos esta seção com o próximo resultado.

Proposição 1.29. *Um subespaço fechado F de um espaço métrico completo M também é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Como M é completo, existe $a \in M$ tal que $x_n \to a$. Como F é fechado, segue que $a \in F$. Isso prova a completude de F. ■

1.9 Exercícios

(1.1): Sejam M um conjunto não vazio e $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$, para quaisquer $x, y, z \in M$.

Mostre que d é uma métrica em M.

(1.2): Considere as seguintes funções $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(i) $d(x, y) = x - y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) $d(x, y) = (x - y)^2$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) $d(x, y) = 2|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Quais das funções acima não são uma métrica em $\mathbb{R}$? Quais das condições d1) a d4) da definição de métrica não são verificadas?

(1.3): Sejam (M, d) um espaço métrico e $S \subset M$ não vazio. Mostre que (S, d_s) é um espaço métrico, com

$$d_S = d|_{S \times S},$$

ou seja, d_S é a restrição da função d ao conjunto $S \times S$.

O espaço métrico (S, d_s) é chamado *subespaço de M* e a métrica d_s é chamada *métrica induzida* por d.

(1.4): Sejam (M, d_1) e (N, d_2) dois espaços métricos. Defina, para (a, b) e (c, d) em $M \times N$,

$$d((a, b), (c, d)) = \max\{d_1(a, c), d_2(b, d)\}.$$

Prove que d é uma métrica no produto cartesiano $M \times N$.

(1.5): Com a notação do Exercício 1.3, para cada $a \in S$ e cada $r > 0$, considere

$$B_s(a; r) = \{x \in S; d_s(x, a) < r\},$$

$$B_s(a; r) = \{x \in S; d_s(x, a) \leq r\}$$

e

$$S_s(a; r) = \{x \in S; d_s(x, a) = r\},$$

a bola aberta, a bola fechada e a esfera de centro a e raio r em (S, d_s), respectivamente.

i) Verifique que $B_s(a; r) = B(a; r) \cap S$, $B_s[a; r] = B[a; r] \cap S$ e $S_s(a; r) = S(a; r) \cap S$.

ii) Determine $B_s(0; 2)$, $B_s[0; 2]$ e $S_s(0; 2)$ para $S = (0, 3)$, com a métrica induzida pela métrica usual em $\mathbb{R}$.

(1.6): Prove que, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$||x||_2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

(1.7): Seja X um conjunto não vazio. Uma função real $f\colon X \to \mathbb{R}$ é dita *limitada* quando existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Considere $\mathcal{B}(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R}; f \text{ é limitada }\}$. Mostre que $(\mathcal{B}(X), d)$ é um espaço métrico, onde

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X)$.

Considere também $C(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$. Prove que se $X = [a, b]$, com a e b em $\mathbb{R}$, $a < b$, então $C([a, b])$ é um subespaço normado de $\mathcal{B}([a, b])$.

(1.8): Seja $(E, ||\cdot||)$ um espaço normado. Mostre que $(E \times E, |||\cdot|||)$ é um espaço normado, com

$$|||(x, y)||| = \max\{||x||, ||y||\},$$

para cada $(x, y) \in E \times E$.

(1.9): Mostre que todo espaço métrico é uma reunião enumerável de subconjuntos limitados.

(1.10): Sejam X e Y dois subconjuntos limitados de um espaço métrico M. Prove que $X \cup Y$ é limitado.

(1.11): Sejam E um espaço normado e X um subconjunto não vazio de E. Prove que X é limitado se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $X \subset B(0; r)$.

(1.12): Sejam E um espaço normado e M um subespaço fechado em E. Se $x_0 \in E \setminus M$, prove que

$$d(x_0, M) := \inf\{||x_0 - x||; x \in M\} > 0.$$

(1.13): Seja (M, d) um espaço métrico com d sendo a métrica discreta. Prove que todos os subconjuntos de M são conjuntos abertos e também conjuntos fechados.

(1.14): Seja M um espaço métrico e seja $F \subset M$ finito. Prove que $F' = \emptyset$.

(1.15): Sejam X e Y dois subconjuntos de um espaço métrico M. Prove que:

(i) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$;

(ii) $\text{int}(X \cup Y) \supset \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$;

(iii) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

(iv) $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

(1.16): Mostre que $X \subset M$ é denso se, e somente se, $\text{int}(M \setminus X) = \emptyset$.

(1.17): Sejam M e N dois espaços métricos e seja $f\colon M \to N$ uma função. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é contínua;

(ii) $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ para todo $X \subset M$;

(iii) $f^{-1}(Y)$ é fechado em M qualquer que seja Y fechado em N.

(1.18): Sejam M e N dois espaços métricos e seja $f\colon M \to N$ uma função contínua bijetiva. Se $f^{-1}\colon N \to M$ é contínua, dizemos que f é um *homeomorfismo* e que M e N são *espaços homeomorfos*. Prove que:

(i) Duas bolas abertas em um espaço normado são homeomorfas;

(ii) Toda bola aberta de um espaço normado E é homeomorfa a E.

(1.19): Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M. Prove que (x_n) é limitada.

(1.20): Prove que $\mathbb{C}^n$ é um espaço de Banach.

(1.21): Seja ℓ^∞ o conjunto de todas as sequências limitadas de números reais. Para cada $x = (x_n) \in \ell^\infty$, defina

$$||x|| = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Prove que $(\ell^\infty, ||\cdot||)$ é um espaço de Banach. (Note que $\ell^\infty = \mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$, caso particular de $bc(X)$, dado no Exercício 1.7).

(1.22): Prove que um subespaço completo de um espaço métrico qualquer é fechado.

(1.23): Seja c_{00} o conjunto de todas as sequências de números reais cujos termos são iguais a zero a partir de um certo índice. Para cada $x = (x_n) \in c_{00}$, defina

$$||x|| = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Prove que c_{00} não é um subespaço fechado de ℓ^∞.

(1.24): Prove que um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não vazios de M, com $\lim \operatorname{diam}(F_n) = 0$, existe $a \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Capítulo 2

Espaços Métricos Compactos

No contexto dos espaços métricos, a noção de compacidade substitui a ideia de "finitude", proveniente da teoria dos conjuntos. Tal noção possui uma grande importância em Análise Matemática, principalmente pela sua notável ligação com o conceito de continuidade. Este capítulo é dedicado ao estudo dos espaços métricos compactos, destacando-se as peculiaridades desse conceito no âmbito dos espaços normados.

2.1 Compacidade e coberturas abertas

Definição 2.1. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma família $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de M é dita uma* cobertura *de X se*

$$X \subset \bigcup_{i\in I} C_i.$$

Além disso, se J for um subconjunto de I e

$$X \subset \bigcup_{i\in J} C_i,$$

dizemos que $\mathcal{C}' = (C_i)_{j\in J}$ é uma subcobertura *de X.*

Observação 2.1. Consideremos as notações da Definição 2.1. Às vezes, classificamos a cobertura $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ de X em M levando em consideração a cardinalidade de I ou propriedades topológicas de cada C_i $(i \in I)$. Por exemplo, $\mathcal{C}$ é dita uma cobertura finita de X (respectivamente, enumerável) se I é finito (respectivamente, enumerável), ou ainda, $\mathcal{C}$ é dita uma cobertura aberta de X se cada C_i é aberto $(i \in I)$.

Definição 2.2. *Um subconjunto K de um espaço métrico M é dito* compacto *se cada cobertura aberta $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de X em M possui uma subcobertura finita de X, ou seja, se existem $i_1, \ldots, i_k \in I$, com $k \in \mathbb{N}^*$, tais que*

$$X \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_k}.$$

Exemplo 2.1. Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em M convergindo para $a \in M$. Então

$$K := \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{a\}$$

é um subconjunto compacto em M.

De fato, seja $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de K. Tomemos $i_0 \in I$ e $r > 0$ tais que

$$B(a; r) \subset \mathcal{U}_{i_0}.$$

Como $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B(a; r)$$

para todo $k > k_0$. Por outro lado, para cada $k \in \{1, \ldots, k_0\}$, seja $i_k \in I$ de forma que $x_k \in \mathcal{U}_{i_k}$. Portanto,

$$K \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_{k_0}} \cup \mathcal{U}_{i_0},$$

o que significa que K é um subconjunto compacto de M.

Exemplo 2.2. O intervalo

$$(0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1\}$$

não é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, ponhamos

$$\mathcal{U}_n := \left(\frac{1}{n}, 2\right),$$

que é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. É fácil ver que

$$(0, 1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{U}_n,$$

isto é, $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Entretanto, $\mathcal{C}$ não possui uma subcobertura finita de $(0, 1]$.

No restante desta seção, deduziremos algumas propriedades básicas dos subconjuntos compactos de um espaço métrico.

Proposição 2.1. *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Então K é fechado e limitado.*

Demonstração. Inicialmente, vejamos que K é fechado. Para tanto, mostremos que $\mathcal{U} := M \setminus K$ é um conjunto aberto. Com efeito, seja $a \in \mathcal{U}$. Então tomando $r_x = \frac{d(x,a)}{2}$, para cada $x \in K$, temos

$$a \notin B(x; r_x).$$

Como K é compacto e

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x; r_x),$$

existem $j \in \mathbb{N}^*$ e $x_1, \ldots, x_j \in K$ tais que

$$K \subset B(x_1; r_{x_1}/2) \cup \cdots \cup B(x_j; r_{x_j}/2).$$

Logo, $\mathcal{V} := B(a; r_{x_1}/2) \cap \cdots \cap B(a; r_{x_j}/2)$ é um subconjunto aberto de M, contendo $a \in \mathcal{U}$, tal que

$$\mathcal{V} \cap K = \emptyset.$$

Isto significa que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, ou seja, $\mathcal{U}$ é aberto.

Para ver que K é limitado, basta notar que

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x; 1),$$

donde existem $\ell \in \mathbb{N}^*$ e $x_1, \ldots, x_\ell \in K$ tais que

$$K \subset B(x_1; 1) \cup \cdots \cup B(x_\ell; 1).$$

Assim, a demonstração está concluída. ∎

Proposição 2.2. *Seja M um espaço métrico compacto e suponhamos que F seja um subconjunto fechado de M. Então F é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de F em M. Como M é compacto, $M \setminus F$ é aberto e

$$M = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) \cup (M \setminus F),$$

existem $j \in \mathbb{N}^*$ e $i_1, \ldots, i_j \in I$ tais que

$$M = \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_j} \cup (M \setminus F).$$

Consequentemente,

$$F \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_j},$$

donde concluímos que F é compacto. ∎

O nosso próximo objetivo é demonstrar o Teorema de Cantor, referente a uma sequência encaixada de subconjuntos compactos e não vazios de um espaço métrico. Para tanto, começamos com o seguinte resultado:

Lema 2.1. *Seja $(K_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos compactos e não vazios de um espaço métrico M. Suponhamos que, para cada subconjunto finito J de I, seja válido*

$$\bigcap_{i\in J} K_i \neq \emptyset.$$

Então $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ é compacto e não vazio.

Demonstração. Em virtude da Proposição 2.2, concluímos que K é compacto.

Vejamos que $K \neq \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que exista $i_0 \in I$ com a seguinte propriedade: para cada $x \in K_{i_0}$, existe $i_x \in I$ tal que

$$x \notin K_x := K_{i_x}.$$

Como K_{i_0} é compacto, cada $\mathcal{U}_x := M \setminus K_x$ é aberto $(x \in K_{i_0})$ e

$$K_{i_0} \subset \bigcup_{x\in K_{i_0}} \mathcal{U}_x,$$

existem $j \in \mathbb{N}^*$ e $x_1, \ldots, x_j \in K_{i_0}$ tais que

$$K_{i_0} \subset \mathcal{U}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{x_j}.$$

Portanto,

$$K_{i_0} \cap K_{x_1} \cap \cdots \cap K_{x_j} = \emptyset,$$

o que é uma contradição. Assim, $K = \bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$. ■

Corolário 2.1. (Cantor)*: Seja $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de subconjuntos compactos e não vazios de um espaço métrico M, e suponhamos que*

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots .$$

Então $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$ é compacto e não vazio.

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 2.1. ■

2.2 Compacidade e compacidade sequencial em espaços métricos

O objetivo central desta seção é apresentar outras possíveis formulações para o conceito de compacidade no contexto dos espaços métricos.

Teorema 2.1. *Seja M um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *M é compacto;*

(b) *Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*

(c) *M é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência em M possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja A um subconjunto infinito de M. Então existe

$$\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset A$$

infinito e enumerável. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}.$$

Afirmação: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $\mathcal{U}_n := M \setminus F_n$. Se ocorresse

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \emptyset,$$

$\mathcal{C} = (\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ seria uma cobertura aberta de M (que é compacto), donde existiriam $j \in \mathbb{N}^*$ e $n_1 < \cdots < n_j$ em $\mathbb{N}^*$ tais que

$$M = \mathcal{U}_{n_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{n_j}.$$

Daí, teríamos

$$\emptyset = M \setminus (\mathcal{U}_{n_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{n_j}) = F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_j} = F_{n_1},$$

o que não é verdadeiro. Isso estabelece a presente afirmação.

Assim, tomemos $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$. Como cada F_n é um subconjunto infinito de M ($n \in \mathbb{N}^*$), concluímos que a é um ponto de acumulação de A.

(b) $\Rightarrow$ (c): Agora, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência em M e consideremos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Se X é finito, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência constante e, portanto, convergente. Caso X seja infinito, seja $a \in M$ um ponto de acumulação de X. Indutivamente, podemos definir uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que

$$x_{n_1} \in B(a; 1) \quad \text{e} \quad x_{n_{k+1}} \in B(a; r_k),$$

onde $r_k = \min\left\{\frac{1}{k+1}, d(x_{n_k}; a)\right\}$. Logo, $\lim x_{n_k} = a$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Seja $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M.

Afirmação 1: Existe $r > 0$ tal que, para cada $y \in M$, é possível encontrar $i \in I$ de modo que $B(y;r) \subset \mathcal{V}_i$.

Suponhamos que essa afirmação não seja verdadeira. Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $y_n \in M$ de forma que

$$B\left(y_n; \frac{1}{n}\right) \cap (M \setminus \mathcal{V}_i) \neq \emptyset$$

para todo $i \in I$. Por hipótese, existem $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}^*$ infinito e $b \in M$, tais que $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} y_n = b$. Sejam $i_0 \in I$ e $\varepsilon > 0$ de modo que

$$B(b;\varepsilon) \subset \mathcal{V}_{i_0}.$$

Como $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} y_n = b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}'$, com $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, tal que

$$d(y_n; b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $n \in \mathbb{N}'$ e $n \geq n_0$. Portanto, seguem imediatamente as inclusões

$$B\left(y_{n_0}; \frac{1}{n_0}\right) \subset B(b;\varepsilon) \subset \mathcal{V}_{i_0},$$

o que é uma contradição. Daí, está provada a Afirmação 1.

Afirmação 2: Dado $s > 0$, existem $j \in \mathbb{N}^*$ e $y_1, \ldots, y_j \in M$ tais que

$$M = B(y_1; s) \cup \cdots \cup B(y_j; s).$$

Admitamos que essa afirmação seja falsa e tomemos $b_1 \in M$. Assim,

$$M \neq B(b_1; s)$$

e podemos encontrar $b_2 \in M$ tal que

$$d(b_2, b_1) \geq s.$$

Analogamente,

$$M \neq B(b_1; s) \cup B(b_2; s),$$

donde existe $b_3 \in M$ tal que

$$d(b_3, b_1) \geq s \quad \text{e} \quad d(b_3, b_2) \geq s.$$

Prosseguindo dessa forma, definimos indutivamente uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ em M satisfazendo

$$d(b_m, b_n) \geq s$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^*$. Logo, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ não possui subsequências de Cauchy em M. No entanto, isso contradiz a hipótese de que M é sequencialmente compacto. Daí, está constatada a Afirmação 2.

Passemos à demonstração de que M é compacto. De fato, aplicando a Afirmação 2 com o número real $r > 0$ obtido na Afirmação 1, sabemos que existem $j \in \mathbb{N}^*$ e $y_1, \ldots, y_j \in M$ tais que

$$M = B(y_1; r) \cup \cdots \cup B(y_j; r).$$

Ainda pela Afirmação 1, para cada $k \in \{1, \ldots, j\}$, existe $i_k \in I$ de modo que

$$B(y_k; r) \subset \mathcal{V}_{i_k}.$$

Portanto,

$$M = B(y_1; r) \cup \cdots \cup B(y_j; r) = \mathcal{V}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{i_k}.$$

Isso conclui a demonstração de que M é compacto. ■

No restante desta seção, aplicaremos o Teorema 2.1 com a finalidade de deduzir alguns resultados importantes que relacionam a noção de compacidade e o conceito de continuidade.

Proposição 2.3. *Sejam M e N dois espaços métricos, com M compacto, e consideremos uma aplicação contínua $f\colon M \to N$. Então Imf é um subconjunto compacto de N.*

Demonstração. Pela equivalência entre as condições (a) e (c) do Teorema 2.1, a presente proposição estará provada se constatarmos que toda sequência em Imf possui uma subsequência convergindo a um elemento de Imf.

Com efeito, seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em Imf e, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos $x_n \in M$ tal que $f(x_n) = y_n$. Assim, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência no espaço métrico compacto M. Pelo Teorema 2.1, existem $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}^*$ infinito e $a \in M$ tais que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = a.$$

Como f é contínua, temos

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = \lim_{n\in\mathbb{N}'} f(x_n) = f(a) \in Imf,$$

seguindo assim a conclusão desejada. ■

Da Proposição 2.3, podemos obter um importante teorema clássico de Weierstrass, referente à existência de valores extremos para funções reais contínuas, definidas em espaços métricos compactos.

Corolário 2.2. (Weierstrass). *Sejam M um espaço métrico compacto e $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $a, b \in M$ tais que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

para todo $x \in M$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3, Imf é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Sendo Imf um conjunto limitado (Proposição 2.1), consideremos

$$\alpha = \inf\{f(x); x \in M\} \quad \text{e} \quad \beta = \sup\{f(x); x \in M\}.$$

Afirmação: $\alpha, \beta \in Imf$.

Realmente, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $x_n \in M$ tal que

$$\alpha \leq f(x_n) < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Nesse caso, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \alpha$, donde $\alpha \in \overline{Imf} = Imf$ (Proposição 2.1). Analogamente, $\beta \in Imf$.

Pela afirmação que acabamos de demonstrar, existem $a, b \in M$ tais que

$$f(a) = \alpha \leq f(x) \leq \beta = f(b)$$

para todo $x \in M$. ∎

Corolário 2.3. *Sejam M e N dois espaços métricos, com M compacto, e suponhamos que $f\colon M \to N$ seja uma bijeção contínua. Então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Denotemos por $g\colon N \to M$ a aplicação inversa de f. Fixemos $b \in N$ arbitrariamente e vejamos que g é contínua em b.

Suponhamos, por absurdo, que g não seja contínua em b, e ponhamos $g(b) = a$. Nesse caso, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em N tais que

$$d(y_n, b) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d(g(y_n), g(b)) \geq \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $x_n = g(y_n)$. Como M é um espaço métrico compacto, o Teorema 2.1 garante a existência de $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}^*$ infinito e $c \in M$ tais que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = c.$$

Sendo f contínua, temos

$$f(c) = \lim_{n\in\mathbb{N}'} f(x_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n = b = f(a),$$

donde concluímos que $c = a$ (f é injetora). Entretanto, isso não pode ocorrer, pois

$$d(c,a) = \lim_{n\in\mathbb{N}'} d(x_n,a) = \lim_{n\in\mathbb{N}'} d(g(y_n),g(b)) \geq \varepsilon > 0.$$

(veja o Exercício 2.1). Daí, resulta que g é contínua em $b \in N$ e, portanto, é uma aplicação contínua. ■

Exemplo 2.3. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ não é um espaço métrico compacto, pois não é um conjunto limitado (Proposição 2.1);

(b) $B = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n; ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ não é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, já que a aplicação

$$f\colon x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{x}{1+||x||} \in B$$

é um homeomorfismo (veja a Proposição 2.3 e o Exercício 2.2);

(c) $\overline{B} = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n; ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. De fato, tomemos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em $\overline{B}$. Assim, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$, e podemos utilizar o teorema de Bolzano-Weierstrass (válido em $\mathbb{R}^n$) para obter $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}^*$ infinito e $a \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} x_n = a.$$

Além disso, como $||\cdot||$ é uma função contínua, vem que

$$||a|| = \lim_{n\in\mathbb{N}'} ||x_n|| \leq \lim_{n\in\mathbb{N}'} 1 = 1,$$

isto é, $a \in \overline{B}$. Daí, $\overline{B}$ é um subespaço métrico compacto de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.4. A condição "M compacto" não pode ser suprimida do enunciado do Corolário 2.3.

De fato, seja $Y = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ e definamos uma bijeção $f\colon \mathbb{N}^* \to Y$ pondo

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n = 1; \\ \frac{1}{n-1}, & \text{se} \quad n \in \{2,3,\dots\}. \end{cases}$$

Como $\mathbb{N}^*$ é um conjunto discreto, f é contínua. Apesar disso, a sua função inversa $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{N}^*$, dada por

$$f^{-1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t = 0; \\ 1 + \frac{1}{t}, & \text{se} \quad t \in Y \setminus \{0\}, \end{cases}$$

não é contínua em $0 \in Y$, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, mas

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1+n) = +\infty.$$

Em resumo, $f\colon \mathbb{N}^* \to Y$ é uma bijeção contínua que não é um homeomorfismo.

2.3 Compacidade em $\mathbb{R}^n$: o teorema de Heine-Borel

O objetivo desta seção é caracterizar os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ como sendo, precisamente, aqueles que são fechados e limitados. Para tanto, começamos com dois resultados preliminares: o teorema da interseção de Cantor e o teorema de Lindelöf.

Teorema 2.2. (Cantor): *Seja $(F_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de subconjuntos fechados e não vazios de $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que F_1 seja limitado e que*

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots .$$

Então $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} F_k \neq \emptyset$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, tomemos $x_k \in F_k$. Portanto, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência cujos termos pertencem ao conjunto limitado F_1. Pelo Teorema de Bolzano Weierstrass (válido em $\mathbb{R}^n$), existem $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}^*$ infinito e $a \in F_1$ (lembre que F_1 é fechado), tais que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}'} x_k = a.$$

Fixemos $k_0 \in \mathbb{N}^*$ arbitrariamente e ponhamos $\mathbb{N}'' = \{k \in \mathbb{N}'; k > k_0\}$. Nesse caso, para todo $k \in \mathbb{N}''$, temos

$$x_k \in F_k \subset F_{k_0},$$

o que implica

$$a = \lim_{k\in\mathbb{N}''} x_k \in F_{k_0}$$

(lembre que F_{k_0} é fechado). Da arbitrariedade de $k_0 \in \mathbb{N}^*$, segue que $a \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} F_k$.

■

Observação 2.2. O Teorema 2.2 garante que uma sequência encaixada de subconjuntos fechados, limitados e não vazios em $\mathbb{R}^n$ usufrui da propriedade deduzida no Corolário 2.1, que foi obtida para sequências encaixadas de subconjuntos compactos e não vazios em um espaço métrico M (Corolário 2.1). Este fato sugere a possibilidade de os conjuntos fechados e limitados em $\mathbb{R}^n$ possuírem outras características típicas dos espaços métricos compactos.

Teorema 2.3. (Lindelöf). *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de X. Então existe um subconjunto enumerável J de I tal que*

$$X \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.26, existe um subconjunto enumerável

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$$

de X, que é denso em X. Consideremos a coleção de bolas abertas

$$\mathcal{B} = \{B(x;r); x \in E, r \in \mathbb{Q}_+^* \text{ e existe } i \in I \text{ de modo que } B(x;r) \subset \mathcal{U}_i\}.$$

Fixemos uma enumeração

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots\}$$

de $\mathcal{B}$.

Afirmação 1: $X \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$.

De fato, seja $x \in X$. Como $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de X, existem $i_0 \in I$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tais que

$$B(x;2r) \subset \mathcal{U}_{i_0}.$$

Como E é denso em X, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$||x - x_{k_0}|| < r,$$

isto é, $x \in B(x_{k_0};r)$. A demonstração da Afirmação 1 estará concluída ao verificarmos que

$$B(x_{k_0};r) \in \mathcal{B}.$$

Para tanto, mostraremos que $B(x_{k_0};r) \subset \mathcal{U}_{i_0}$. Com efeito, dado $y \in B(x_{k_0};r)$, temos

$$||y - x|| = ||(y - x_{k_0}) + (x_{k_0} - x)|| \le ||y - x_{k_0}|| + ||x_{k_0} - x|| < r + r = 2r,$$

o que implica

$$y \in B(x;2r) \subset \mathcal{U}_{i_0}.$$

Afirmação 2: A cobertura $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de X admite uma subcobertura enumerável.

Realmente, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, fixemos $i_k \in I$ de forma que $B_k \subset \mathcal{U}_{i_k}$. Pondo $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$, segue da Afirmação 1 que

$$X \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{U}_{i_k} = \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i,$$

resultando o desejado. ■

Agora, já podemos apresentar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.4. (Heine-Borel). *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *K é fechado e limitado;*

(b) *K é compacto.*

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a): Segue diretamente da Proposição 2.1.

(a) $\Rightarrow$ (b): Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de K. Pelo Teorema 2.3, existe um subconjunto enumerável

$$J = \{i_1, i_2, \dots, i_j, \dots\}$$

de I tal que

$$K \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}^*$, consideremos o conjunto

$$K_j := K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_j})).$$

Portanto,

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_j \supset \dots$$

é uma sequência decrescente de subconjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}^n$. Afirmamos que

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} K_j = \emptyset,$$

pois, tomando $x \in K$ e escolhendo $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in \mathcal{U}_{i_{j_0}}$, temos

$$x \notin K_{j_0} = K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_{j_0}})).$$

Assim, pelo Teorema 2.2, existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$K_\ell = K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_\ell})) = \emptyset,$$

ou seja,

$$K \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_\ell}.$$

Daí, K é compacto. ∎

A seguir, apresentaremos um exemplo envolvendo a caracterização obtida no Teorema 2.4.

Exemplo 2.5. Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ convergindo para $a \in \mathbb{R}^n$. Então

$$K := \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{a\}$$

é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$.

De fato, seja $\mathcal{C} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de K. Tomemos $i_0 \in I$ e $r > 0$ tais que

$$B(a;r) \subset \mathcal{U}_{i_0}.$$

Como $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B(a;r) \subset \mathcal{U}_{i_0}$$

para todo $k > k_0$. Por outro lado, para cada $k \in \{1, \ldots, k_0\}$, seja $i_k \in I$ tal que $x_k \in \mathcal{U}_{i_k}$. Portanto,

$$K \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_{k_0}} \cup \mathcal{U}_{i_0},$$

o que significa que K é compacto. Pelo Teorema 2.4, K é fechado e limitado.

2.4 Compacidade em espaços normados: o teorema de Riesz

No Capítulo 1, apresentamos os rudimentos básicos da teoria dos espaços métricos. Em particular, estudamos os espaços vetoriais normados, que constituem uma classe especial de espaços métricos. Na presente seção, obteremos um teorema clássico de Riesz, que garante que os espaços euclideanos $\mathbb{R}^n$ são, essencialmente, os únicos espaços normados nos quais as bolas fechadas são compactas.

Definição 2.3. *Sejam E e F dois espaços normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço vetorial formado por todas as aplicações lineares e contínuas*

$$T\colon E \to F.$$

Em particular, o dual topológico de E é definido por

$$E' := \mathcal{L}(E;\mathbb{K}),$$

cujos elementos são os funcionais lineares contínuos de E em $\mathbb{K}$.

Proposição 2.4. *Sejam $(E, ||\cdot||_E)$ e $(F, ||\cdot||_F)$ dois espaços normados. A respeito de uma aplicação linear $T\colon E \to F$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *T é contínua;*

(b) *Existe $C > 0$ tal que $||T(x)||_F \leq C||x||_E$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Por hipótese T é contínua em $0 \in E$. Então existe $r > 0$ tal que

$$||T(x)||_F = ||T(x) - T(0)||_F < 1$$

sempre que $x \in E$ e $||x||_E = ||x - 0||_E < r$. Logo, se $x \in E \setminus \{0\}$, temos

$$\left\| \left(\frac{r}{2||x||_E} \right) x \right\|_E = \frac{r}{2} < r,$$

o que implica

$$\left\| T\left(\left(\frac{r}{2||x||_E}\right)x\right)\right\|_F < 1.$$

Isto significa que

$$||T(x)||_F \leq \frac{2}{r}||x||_E$$

para todo $x \in E$, conforme desejávamos.

(b) $\Rightarrow$ (a): Admitindo a validade de (b) e lembrando que T é linear, segue que

$$||T(x) - T(y)||_F = ||T(x-y)||_F \leq C||x-y||_E$$

para quaisquer $x, y \in E$. Portanto, T é uniformemente contínua. Em particular, T é contínua. ■

Observação 2.3. Em virtude da Proposição 2.4, concluímos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se, e somente se,

$$\sup\{||T(x)||_F; x \in E \text{ e } ||x||_E = 1\} < +\infty.$$

Deixamos a cargo do leitor a verificação de que a aplicação

$$T \in \mathcal{L}(E;F) \longmapsto ||T|| = \sup\{||T(x)||_F; x \in E \text{ e } ||x||_E = 1\} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$, sendo $\mathcal{L}(E;F)$ um espaço de Banach (veja os Exercícios 2.7 e 2.8).

Definição 2.4. *Uma bijeção $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é dita um isomorfismo topológico se $T^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$. Nesse caso, dizemos que E e F são topologicamente isomorfos.*

As definições e fatos básicos abordados até o momento permitem a apresentação dos resultados centrais desta seção. Começamos com o

Lema 2.2. (Hausdorff). *Quaisquer dois espaços normados de dimensão n são topologicamente isomorfos.*

Demonstração. Seja E um espaço normado de dimensão $n \in \mathbb{N}^*$. Como a composição de dois isomorfismos topológicos também é um isomorfismo topológico, o enunciado deste lema é equivalente a verificarmos que E e $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_0)$ são topologicamente isomorfos, onde

$$||x||_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

De fato, seja $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E e definamos

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{K}^n &\longrightarrow E \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \end{aligned}$$

Claramente, T é linear. Uma vez que as coordenadas de um vetor são unicamente determinadas com respeito a uma base de um espaço vetorial de dimensão finita, segue que T é uma bijeção.

Afirmação 1: T é contínua.

Realmente, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} ||T(x)||_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, ||e_i||_E \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||e_i||_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= A||x||_0 \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, onde $A = \left(\sum_{i=1}^{n} ||e_i||_E^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Pela Proposição 2.4, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$.

Afirmação 2: T^{-1} é contínua.

Consideremos o subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{K}^n$ dado por

$$S = \{x \in \mathbb{K}^n; ||x||_0 = 1\}.$$

Pelo Teorema 2.4, S é compacto. Sendo

$$\begin{aligned} f\colon S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ||T(x)||_E \end{aligned}$$

uma função contínua e sabendo que $f(x) > 0$ para todo $x \in S$, o teorema de Weierstrass (Corolário 2.2) garante a existência de $a \in S$ tal que

$$||T(a)||_E = f(a) = \min\{f(x); x \in S\}.$$

Pondo $B = ||T(a)|| > 0$, vem que

$$||T(x)||_E \geq B||x||_0$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$, o que equivale a $T^{-1} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^n)$.

Assim, E e $(\mathbb{K}^n, || \cdot ||_0)$ são topologicamente isomorfos. ∎

Uma consequência importante do Lema de Hausdorff é apresentada a seguir:

Corolário 2.4. *Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

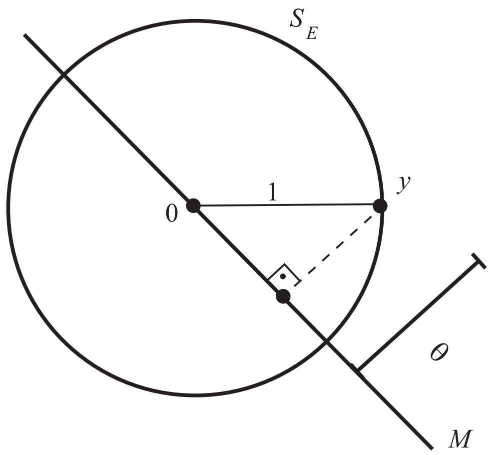
O seguinte lema será importante para provarmos o Teorema de Riesz, que caracteriza os espaços normados de dimensão finita como aqueles em que a bola fechada unitária é um subconjunto compacto.

Lema 2.3. (Riesz). *Sejam E um espaço normado e M um subespaço fechado de E, com $M \neq E$. Então, dado $\theta \in (0,1)$, existe $y \in E$, com $||y|| = 1$, tal que*

$$||y - x|| \geq \theta$$

para todo $x \in M$.

Demonstração.



Seja $S_E = \{x \in E; ||x|| = 1\}$. Como $M \neq E$, consideremos $y_0 \in E \setminus M$. Sendo M é um subespaço fechado de E, é fácil ver que

$$d := d(y_0; M) = \inf\{||y_0 - x||; x \in M\} > 0.$$

Observando que $d < \frac{d}{\theta}$, obtemos $x_0 \in M$ tal que

$$d \leq ||y_0 - x_0|| < \frac{d}{\theta}.$$

Consideremos $y = \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} \in S_E$. Assim, para cada $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} ||y - x|| &= \left\| \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} - x \right\| \\ &= \frac{||y_0 - (x_0 + x||y_0 - x_0||)||}{||y_0 - x_0||} \geq \frac{d}{||y_0 - x_0||} > \theta, \end{aligned}$$

uma vez que $(x_0 + x||y_0 - x_0||) \in M$. Isso conclui a demonstração do lema. ■

O próximo teorema traz o principal resultado desta seção.

Teorema 2.5. (Riesz). *Seja E um espaço normado. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E tem dimensão finita;*

(b) *$B_E := \overline{B}(0;1) = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$ é um subconjunto compacto de E.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Esta implicação é clara, utilizando o Lema 2.2 e uma argumentação análoga àquela apresentada no Exemplo 2.3(c).

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos que E tenha dimensão infinita. Tomemos $x_1 \in E$, com $||x_1|| = 1$, e seja M_1 o espaço gerado por x_1. Como E tem dimensão infinita, $M_1 \neq E$. Assim, segue do Lema 2.3 que existe $x_2 \in E$, com $||x_2|| = 1$, tal que

$$||x_2 - x|| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $x \in M_1$. Em particular,

$$||x_2 - x_1|| \geq \frac{1}{2}.$$

Agora, seja M_2 o espaço gerado por x_1e x_2. Como $M_2 \neq M_1$, aplicando novamente o Lema 2.3, obtemos $x_3 \in E$, com $||x_3|| = 1$, tal que

$$||x_3 - x|| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $x \in M_2$. Em particular,

$$||x_3 - x_j|| \geq \frac{1}{2},$$

onde $j \in \{1, 2\}$.

Prosseguindo dessa forma, obtemos indutivamente uma sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ em

$$S_E = \{x \in E; ||x|| = 1\} \subset B_E$$

de tal forma que

$$||x_j - x_k|| \geq \frac{1}{2}$$

para quaisquer $j, k \in \mathbb{N}^*$, com $j \neq k$. Portanto, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ não possui subsequências convergentes. Pelo Teorema 2.1, B_E não é um subconjunto compacto de E. Equivalentemente, se B_E for um subconjunto compacto de E, então $\dim E < +\infty$. ■

Observação 2.4. Em geral, a conclusão do Lema 2.3 não é válida quando $\theta = 1$.

Realmente, consideremos o espaço normado

$$E = \{f \in C([0,1]); f(0) = 0\},$$

bem como o seu subespaço

$$M = \left\{ f \in E; \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$$

(ambos com a norma induzida pela norma de $C([0,1])$, vista no Exercício (1.7)).

Suponhamos, por absurdo, que exista $g \in E$, com $||g|| = 1$, de forma que

$$||g - f|| \geq 1$$

para todo $f \in M$.

Afirmação 1: $\left|\int_0^1 g(t)dt\right| < 1$.

Como g é contínua em 0 e $g(0) = 0$, existe $\delta \in (0,1)$ tal que

$$|g(t)| = |g(t) - g(0)| < \frac{1}{2},$$

sempre que $t \in [0,\delta]$. Uma vez que $||g|| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 g(t)dt\right| &\leq \left|\int_0^\delta g(t)dt\right| + \left|\int_\delta^1 g(t)dt\right| \\ &\leq \int_0^\delta |g(t)|dt + \int_\delta^1 |g(t)|dt \\ &< \frac{1}{2} \cdot \delta + ||g||(1-\delta) \\ &= \frac{\delta}{2} + 1 - \delta \\ &= 1 - \frac{\delta}{2} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Afirmação 2: Para cada $h \in E \setminus M$, temos

$$\left|\int_0^1 h(t)dt\right| \leq \left|\int_0^1 g(t)dt\right| \cdot ||h||.$$

Com efeito, dado $h \in E \setminus M$, definamos

$$\lambda = \frac{\int_0^1 g(t)dt}{\int_0^1 h(t)dt}.$$

Nesse caso, é claro que $\int_0^1 [g(t) - \lambda h(t)]dt = 0$, isto é, $(g - \lambda h) \in M$. Assim,

$$\begin{aligned} 1 \leq ||g - (g - \lambda h)|| &= ||\lambda h|| = |\lambda| \cdot ||h|| \\ &= \frac{\left|\int_0^1 g(t)dt\right|}{\left|\int_0^1 h(t)dt\right|} \, ||h||, \end{aligned}$$

seguindo a conclusão da Afirmação 2.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos $h_n \in E \backslash M$, definida por $h_n(t) = \sqrt[n]{t}$. Nesse caso, $||h_n|| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 h_n(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \right) = 1.$$

Pela Afirmação 2,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 h_n(t)dt \right| &\leq \left| \int_0^1 g(t)dt \right| \; ||h_n|| \\ &= \left| \int_0^1 g(t)dt \right| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$, donde concluímos que

$$\left| \int_0^1 g(t)dt \right| \geq 1.$$

Esta última desigualdade contradiz a Afirmação 1. Portanto, não existe $g \in E$, com $||g|| = 1$, tal que

$$||g - f|| \geq 1 \quad \text{para todo} \quad f \in M.$$

Exemplo 2.6. Para cada $p \in [1, +\infty)$, o espaço normado ℓ_p, mencionado no Exemplo 1.27, possui dimensão infinita.

Realmente, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos

$$e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ésimo termo}}, 0, \ldots) \in \ell_p.$$

Assim, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência na bola fechada unitária de ℓ_p. Além disso, dados $m, n \in \mathbb{N}^*$, com $m > n$, temos

$$\begin{aligned} &||e_m - e_n||_p^p \\ &= ||(0, \ldots, 0, \underbrace{-1}_{m\text{-ésimo termo}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{+1}_{n\text{-ésimo termo}}, 0, \ldots,)||_p^p = 2, \end{aligned}$$

o que significa que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ não possui subsequências convergentes. Portanto, os Teoremas 2.1 e 2.5 asseguram que ℓ_p tem dimensão infinita.

2.5 Exercícios

(2.1): Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Prove que:

a) existe $a \in K$ tal que $|c - a| = \inf\{|c - x|; x \in k\}$;

b) existe $b \in K$ tal que $|c - b| = \sup\{|c - x|; x \in k\}$.

(2.2): Seja $f \in C([0,1])$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$.

(2.3): Sejam K_1 e K_2 dois subconjuntos compactos de um espaço métrico. Prove que $K_1 \cup K_2$ é compacto.

(2.4): Seja $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos fechados de um espaço métrico. Se existe $\lambda_0 \in L$ tal que K_{λ_0} é compacto, então $\bigcap\limits_{\lambda \in L} K_\lambda$ é compacto.

(2.5): Dê um exemplo de um conjunto compacto que tem uma cobertura de conjuntos com interior não vazio que não admite subcobertura finita.

(2.6): Verifique que se A e B são compactos disjuntos de um espaço métrico M, então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $d(a,b) = \inf\{d(x,y); x \in A$ e $y \in B\}$.

(2.7): Seja (M,d) um espaço métrico e considere $a \in M$. Mostre que

$$|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. Conclua que a função $x \in M \mapsto d(x,a) \in \mathbb{R}$ é contínua.

(2.8): Prove o teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}^n$.

(2.9): Mostre que a aplicação f mencionada no Exemplo 2.3(b) é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e B.

(2.10): Sejam K e $\mathcal{U}$ dois subconjuntos de espaço métrico M, sendo K compacto, $\mathcal{U}$ aberto e $K \subset \mathcal{U}$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x;\varepsilon) \subset \mathcal{U}$$

para todo $x \in K$.

(2.11): Seja $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de um espaço métrico compacto M. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para cada subconjunto A de M, com $\operatorname{diam}(A) < \varepsilon$, existe $j \in I$ tal que $A \subset \mathcal{U}_j$.

(2.12): Mostre que $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach com as normas mencionadas no Exemplo 1.7.

(2.13): Seja $(E, ||\cdot||_0)$ um espaço normado. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) E tem dimensão infinita;

(b) existe um funcional linear descontínuo $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$;

(c) existe uma norma $||\cdot||_1$ em E que não é equivalente a $||\cdot||_0$, isto é, a aplicação
$$x \in (E; ||\cdot||_0) \longmapsto x \in (E; ||\cdot||_1)$$
não é um isomorfismo topológico;

(d) existe um subespaço F de E que não é fechado.

(2.14): Mostre que a aplicação

$$T \in \mathcal{L}(E;F) \longmapsto ||T|| = \sup\{||T(x)||_F; x \in E \text{ e } ||x||_E = 1\} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(E;F)$. Além disso, verifique que

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\left\{\frac{||T(x)||_F}{||x||_E}; x \in E \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\{||T(x)||_F; x \in E \text{ e } ||x||_E \leq 1\} \\ &= \sup\{||T(x)||_F; x \in E \text{ e } ||x||_E < 1\} \\ &= \inf\{C > 0; ||T(x)||_F \leq C||x||_E \text{ para todo } x \in E\}. \end{aligned}$$

(2.15): Sejam E e F dois espaços normados. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) F é completo;

(b) $\mathcal{L}(E;F)$ é completo.

(**Observação:** para mostrar que a condição (b) implica a condição (a), é necessária a utilização do teorema de Hahn-Banach, que não foi abordado neste texto. Veja [7]).

Capítulo 3

O Espaço $C([0,1])$

No Capítulo 2 caracterizamos os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, apresentando o teorema de Hein-Borel. Neste capítulo, vamos apresentar o teorema de Arzelà-Ascoli, que caracteriza os subconjuntos compactos de $C([0,1])$ e, mais geralmente, de $C([a,b])$. Para tanto, vamos introduzir o conceito de equicontinuidade.

3.1 Espaços de funções: convergência pontual e convergência uniforme

De modo geral, um espaço de funções é um espaço métrico (M,d) cujos elementos de M são funções $f\colon A \to B$, onde A e B são conjuntos quaisquer não vazios.

Um espaço de funções bastante importante em Análise é o espaço $(C([0,1]),d)$, onde $C([0,1])$ é o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ e d é a métrica dada por

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad \text{onde} \ \ f,g \in C([0,1]).$$

No que se segue, denotaremos apenas por $C([0,1])$ o espaço métrico $(C([0,1]),d)$.

Sejam (f_n) uma sequência em $C[0,1]$ e $f \in C[0,1]$. Pela definição dada na Seção 5 do Capítulo 1, $f_n \to f$ quando $d(f_n,f) \to 0$. A seguir, vamos introduzir os conceitos de convergência pontual e convergência uniforme e vamos verificar que dizer $d(f_n,f) \to 0$ equivale a dizer que $f_n \to f$ uniformemente em $[0,1]$. Cabe observar aqui que a vantagem desse fato é que a convergência no espaço de funções $(C([0,1]),d)$ pode ser substituída por uma certa convergência de sequências de números reais.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais definidas em A, onde A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Uma sequência em $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$, denotada por $(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou simplesmente (f_n), é uma aplicação*

$f\colon \mathbb{N}^* \to \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ que, a cada $n \in \mathbb{N}^*$, associa $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. A imagem f_n, ou $f(n)$, de $n \in \mathbb{N}^*$ pela aplicação f é chamada o n-ésimo termo da sequência.

Claramente podemos considerar sequências de funções de A em B, onde A e B são dois conjuntos não vazios quaisquer. No entanto, para construirmos uma teoria matemática satisfatória, é necessário que ambos os conjuntos A e B tenham uma estrutura algébrica e uma métrica. Aqui, consideraremos apenas sequências de funções como na Definição 3.1.

Exemplo 3.1. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Assim, (f_n) é uma sequência de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. (Figura 1).

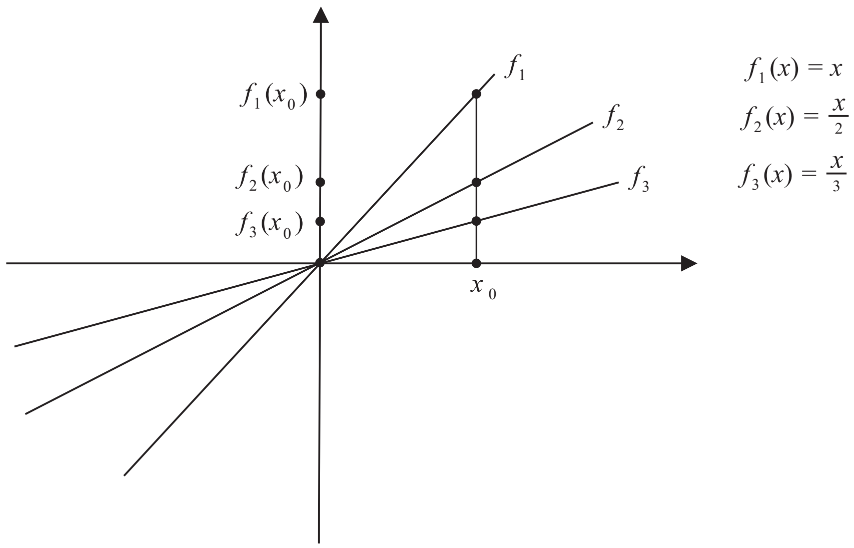


Figura 1

Consideremos a sequência (f_n) dada no exemplo anterior. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}$. A sequência $(f_n(x_0))$ é uma sequência de números reais, que converge para zero. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 > \frac{x_0}{\varepsilon}$. Para todo $n > n_0$, $\frac{x_0}{n} < \varepsilon$. Observemos que o índice n_0 depende de ε e x_0. Notemos também que $f_n(x) \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Assim, podemos definir a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

O comentário acima motiva a

Definição 3.2. *Seja (f_n) uma sequência de funções de A em $\mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que (f_n) converge pontualmente para f em A, e denotamos $f_n \to f$ em A, se para $x \in A$, a sequência de números reais $(f_n(x))$ converge para $f(x)$. A função f é chamada de limite pontual de (f_n) em A.*

Pela definição acima, para cada $x \in A$, temos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ou seja, para cada $x \in A$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n(x, \varepsilon)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Uma pergunta natural é se podemos encontrar um índice n_0 que dependa apenas de $\varepsilon > 0$ dado. O próximo exemplo mostra que isso nem sempre é possível.

Exemplo 3.2. Consideremos a sequência (f_n) dada no Exemplo 3.1. Dado $\varepsilon > 0$, não é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, suponhamos que, para cada $\varepsilon > 0$, exista um tal n_0. Como f é a função identicamente nula, afirmar que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ equivale a afirmar que

$$\frac{|x|}{n} < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomemos $n = n_0 + 1$ e $x = 2\varepsilon(n_0 + 1)$. Nesse caso,

$$2\varepsilon = \frac{2\varepsilon(n_0 + 1)}{n_0 + 1} = \frac{|x|}{n} < \varepsilon,$$

o que é um absurdo.

Quando for possível encontrar um n_0 que dependa apenas do $\varepsilon > 0$ dado, teremos uma convergência mais forte do que a convergência pontual. Vejamos agora a definição dessa outra noção de convergência.

Definição 3.3. *Seja (f_n) uma sequência de funções de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e seja $f \colon A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que (f_n) converge uniformemente para f em A, e denotamos $f_n \xrightarrow{u} f$ em A, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 = n(\varepsilon)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e para todo $x \in A$. A função f é chamada de limite uniforme de (f_n) em A.*

Da definição acima segue que se uma sequência de funções (f_n) converge uniformemente para f em A, então (f_n) converge pontualmente para f em A. A recíproca é falsa como pode ser visto no Exemplo 3.2. Vejamos a seguir um exemplo onde ocorre uma convergência uniforme.

Exemplo 3.3. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos a função $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}.$$

Temos que $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[0,1]$, sendo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x$.

De fato, primeiramente verificaremos que $f_n \to f$ em $[0,1]$. Para isso, fixemos $x_0 \in [0,1]$. Então

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_0^2}{n} + x_0 \right) = x_0.$$

Como $x_0 \in [0,1]$ foi tomado arbitrariamente, para cada $x \in [0,1]$, temos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x.$$

Para vermos que $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[0,1]$, tomemos $\varepsilon > 0$ e fixemos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Então

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e para todo $x \in [0,1]$.

A seguir, veremos que "convergir em $C([0,1])$" equivale a "convergir uniformemente em $[0,1]$".

Proposição 3.1. *Seja (f_n) uma sequência de funções em $C([0,1])$ e seja $f \in C([0,1])$. Então $d(f_n, f) \to 0$ se, e somente se, $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[0,1]$.*

Demonstração. Suponhamos que $d(f_n, f) \to 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f) < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|,$$

segue que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$ e $x \in [0,1]$. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário, $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[0,1]$.

Agora, suponhamos que $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[0,1]$ e tomemos $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n > n_0$ e $x \in [0,1]$. Daí,

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Assim, $f_n \to f$ em $C([0,1])$. ■

Muitas vezes é útil saber se o limite de uma sequência de funções é uma função contínua, derivável ou integrável. A seguir, veremos que o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas em $A \subset \mathbb{R}$ também é uma função contínua em $A \subset \mathbb{R}$. A propriedade da função limite ser derivável ou ser integrável não será tratada aqui, pois foge do objetivo deste texto.

Proposição 3.2. *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $f\colon A \to \mathbb{R}$ é o limite uniforme de (f_n) em A, então f é contínua.*

Demonstração. Tomemos $a \in A$ e $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em A, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $n > n_0$ e $x \in A$. Pelo fato de a função f_{n_0+1} ser contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

sempre que $x \in A$ e $|x - a| < \delta$. Daí,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| \leq {} & |f(x) - f_{n_0+1}(x)| \\ & + |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(a)| + |f_{n_0+1}(a) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

se $x \in A$ e $|x - a| < \delta$. Como $a \in A$ foi tomado arbitrariamente, segue que f é contínua. ■

3.2 Equicontinuidade

Para apresentarmos uma caracterização dos subconjuntos compactos do espaço métrico $C([0,1])$, necessitaremos da noção de equicontinuidade.

Definição 3.4. *Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. O conjunto $\mathcal{F}$ é dito equicontínuo em um ponto $x_0 \in A$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$, com $|x - x_0| < \delta$, e para todo $f \in \mathcal{F}$. O conjunto $\mathcal{F}$ é dito equicontínuo se $\mathcal{F}$ é equicontínuo em cada $x_0 \in A$.*

Observemos que $\delta > 0$ encontrado depende de $\varepsilon > 0$ dado e do ponto x_0 tomado em A, mas não depende dos elementos de $\mathcal{F}$. Claramente, se $\mathcal{F}$ é equicontínuo em um ponto $x_0 \in A$, então cada elemento $f \in \mathcal{F}$ é uma função contínua em x_0. Mas, o fato de termos um conjunto de funções $f\colon A \to \mathbb{R}$, contínuas em algum $x_0 \in A$, não implica que esse conjunto seja equicontínuo em x_0. Vejamos isso no exemplo a seguir.

Exemplo 3.4. Consideremos $\mathcal{F} = \{f_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = nx$ para todo $x \in [0,1]$. Claramente, todo elemento de $\mathcal{F}$ é uma função contínua em $[0,1]$. Mas, $\mathcal{F}$ não é equicontínuo em ponto algum $x_0 \in [0,1]$. Com efeito, fixemos $x_0 \in [0,1]$. Para todo $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Assim, se tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo $\delta > 0$, existem $x \in [0,1]$, a saber $x = x_0 + \frac{1}{n}$, e $f \in \mathcal{F}$, a saber $f = f_n$, tais que $|x - x_0| < \delta$, mas $|f_n(x) - f_n(x_0)| = 1 > \varepsilon$.

Com o próximo resultado, podemos obter vários exemplos de conjuntos equicontínuos.

Proposição 3.3. *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas de A em $\mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ em A, então o conjunto $\mathcal{F} = \{f, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ é equicontínuo.*

Demonstração. Fixemos $x_0 \in A$ e $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n > n_0$ e para todo $x \in A$. Pela Proposição 3.2 e pelo enunciado do presente resultado, $f, f_1, \ldots, f_{n_0}$ são funções contínuas, o que implica a existência de $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n_0$ e para todo $x \in A$, com $|x - x_0| < \delta$. Agora, se $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| \\ &\quad + |f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

para todo $x \in A$, com $|x - x_0| < \delta$, e para todo $g \in \mathcal{F}$, mostrando que $\mathcal{F}$ é equicontínuo em x_0. Como $x_0 \in A$ foi tomado arbitrariamente, segue que $\mathcal{F}$ é equicontínuo. ■

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. O conjunto $\mathcal{F}$ é dito uniformemente equicontínuo se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in A$, com $|x - y| < \delta$, e para todo $f \in \mathcal{F}$.*

O seguinte resultado será útil na demonstração do teorema de Arzelà-Ascoli.

Proposição 3.4. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(K;\mathbb{R})$ é um conjunto equicontínuo, então $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínuo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{F}$ não seja uniformemente equicontínuo. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existem $x_n, y_n \in K$ e existe $f_n \in \mathcal{F}$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ mas $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Como K é compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ convergindo a um elemento $a \in K$. Uma vez que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ converge para a. Sendo $\mathcal{F}$ equicontínuo no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

para todo $x \in K$ com $|x - a| < \delta$ e para todo $f \in \mathcal{F}$. Pelo fato de $x_{n_j} \to a$ e $y_{n_j} \to a$, existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|x_{n_{j_0}} - a| < \delta$ e $|y_{n_{j_0}} - a| < \delta$. Consequentemente, $|f(x_{n_{j_0}}) - f(y_{n_{j_0}})| \leq |f(x_{n_{j_0}}) - f(a)| + |f(y_{n_{j_0}}) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Em particular, $|f_{n_{j_0}}(x_{n_{j_0}}) - f_{n_{j_0}}(y_{n_{j_0}}| < \varepsilon$, o que não ocorre. ■

3.3 O teorema de Arzelà-Ascoli

A noção de equicontinuidade foi introduzida por volta de 1883 de forma independente pelos matemáticos italianos Giulio Ascoli (1843-1896) e Cesare Arzelà (1847-1912). Uma forma fraca do teorema de Arzelà-Ascoli foi provada por Ascoli em 1884, estabelecendo uma condição suficiente para compacidade em $C([0,1])$. Arzelà, em 1895, estabeleceu a condição necessária e deu a primeira apresentação clara do resultado. Uma generalização do teorema de Arzelà-Ascoli foi obtida por Maurice Fréchet, em 1906, para conjuntos de funções reais contínuas definidas em um espaço métrico compacto. Já é conhecida uma generalização do teorema de Arzelà-Ascoli para funções contínuas definidas em um espaço compacto de Hausdorff com valores em um espaço métrico arbitrário.

Nesta seção, demonstraremos o teorema de Arzelà-Ascoli. Apresentaremos também uma aplicação do teorema na teoria das equações diferenciais ordinárias, dando uma demonstração do conhecido Teorema de Peano.

Teorema 3.1. (Arzelà-Ascoli). *Seja $\mathcal{F} \subset C([0,1])$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *$\mathcal{F}$ é compacto;*

(b) *$\mathcal{F}$ é fechado, limitado e equicontínuo.*

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos que $\mathcal{F}$ seja fechado, limitado e equicontínuo. Pelo Teorema 2.1, basta mostrar que $\mathcal{F}$ é sequencialmente compacto. Para isso, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em $\mathcal{F}$. Mostraremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência convergente.

Fixando $\delta > 0$, a família de intervalos

$$\{(x-\delta, x+\delta); x \in [0,1]\}$$

é uma cobertura aberta do intervalo $[0,1]$. Pelo Teorema de Heine-Borel, existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ tais que

$$[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j - \delta, x_j + \delta).$$

Definamos $X_\delta = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tomando, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta = \frac{1}{k}$, podemos considerar $X_\delta = X_{\frac{1}{k}}$ e definir

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_{\frac{1}{k}}.$$

Como cada $X_{\frac{1}{k}}$ é finito, X é enumerável. Seja $X = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ uma enumeração de X.

Consideremos a sequência de números reais $(f_n(y_1))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Como $\mathcal{F}$ é limitado, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in \mathcal{F}$ e para todo $x \in [0,1]$ (Exercício 3.4). Em particular, $(f_n(y_1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência em $[-M, M]$, que é compacto. Logo, essa sequência possui uma subsequência convergente. Denotemos tal subsequência convergente por $(f_n^1(y_1))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Consideremos agora a sequência $(f_n^1(y_2))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Essa sequência, pelo mesmo raciocínio anterior, possui uma subsequência convergente. Denotemos essa segunda subsequência convergente por $(f_n^2(y_2))_{n\in\mathbb{N}^*}$. De modo análogo, a sequência $(f_n^2(y_3))_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência convergente $(f_n^3(y_3))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Prosseguindo indutivamente, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, a sequência

$$(f_n^k(y_k))_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge. Além disso, por construção, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(f_n^k(y_m))_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge se $m \leq k$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, definamos $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g_n(x) = f_n^n(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. Assim, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $(g_n(y_m))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Ou seja, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para cada $x \in X$. Mostraremos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformemente em $[0,1]$.

Com efeito, como $[0,1]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, segue da Proposição 3.4 que $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínuo. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $i \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|f(z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para quaisquer $x, z \in [0,1]$, com $|z - x| < \frac{1}{i}$, e para todo $f \in \mathcal{F}$. Em particular,

$$|g_n(z) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.1}$$

para quaisquer $x, z \in [0,1]$, com $|z - x| < \frac{1}{i}$, e para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Como $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge em cada elemento de

$$X_{\frac{1}{i}} = \{x_1, \dots, x_n\},$$

então cada sequência

$$(g_k(x_1))_{k\in\mathbb{N}^*}, (g_k(x_2))_{k\in\mathbb{N}^*}, \dots, (g_k(x_n))_{k\in\mathbb{N}^*}$$

converge, sendo assim sequências de Cauchy. Dessa forma, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, existe $N_j \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|g_k(x_j) - g_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.2}$$

se $k, m > N_j$. Seja $N = \max\{N_j; j = 1, \ldots, n\}$e tomemos $x \in [0,1]$ arbitrariamente. Como

$$[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left(x_j - \frac{1}{i}, x_j + \frac{1}{i} \right),$$

existe $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|x_\ell - x| < \frac{1}{i}$. Daí, por (3.1) e (3.2),

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_m(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_\ell)| + |g_k(x_\ell) - g_m(x_\ell)| \\ &\quad + |g_m(x_\ell) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.3}$$

sempre que $k, m > N$. Assim, $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy de números reais e, portanto, converge.

Para cada $x \in [0,1]$, ponhamos

$$g(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x).$$

Por (3.3), segue que

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

sempre que $k > N$ e $x \in [0,1]$, o que mostra $g_n \xrightarrow{u} g$ em $[0,1]$. Pela Proposição 3.1, $d(g_n, g) \to 0$, isto é, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma subsequência convergente de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos agora que $\mathcal{F}$ seja compacto. Pela Proposição 2.1, $\mathcal{F}$ é fechado e limitado. Mostraremos que $\mathcal{F}$ é equicontínuo. Tomemos $\varepsilon > 0$ e sejam $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tais que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(f_i; \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Tomemos $a \in [0,1]$. Como as funções $f_1, \ldots, f_n$ são contínuas em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(y) - f_i(a)| < \varepsilon$$

para todo $y \in [0,1]$, com $|y - a| < \delta$, e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seja $f \in \mathcal{F}$ e fixemos $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $f \in B(f_j; \frac{\varepsilon}{3})$. Daí,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(a)| &\leq |f(a) - f_j(a)| + |f_j(a) - f_j(y)| \\ &\quad + |f_j(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $y \in [0,1]$, com $|y - a| < \delta$. Isso mostra que $\mathcal{F}$ é equicontínuo em a. Como $a \in [0,1]$ e $f \in \mathcal{F}$ foram tomados arbitrariamente, segue que $\mathcal{F}$ é equicontínuo. ■

O teorema acima é claramente válido para o espaço métrico $(C([a,b]),d)$, onde $C([a,b])$ é o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ e d é a métrica dada por

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

$(f,g \in C([a,b]))$. Observamos também que a demonstração do Teorema 3.1 pode ser facilmente adaptada de modo a permitir a obtenção do próximo resultado, muito útil em algumas situações.

Corolário 3.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função. Suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ seja uma sequência equicontínua e que, para cada $x \in [0,1]$, exista $M_x > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_x$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.

Demonstração. Exercício 3.4. ■

Agora, aplicaremos o teorema de Arzelà-Ascoli na demonstração do teorema de Peano, que é um importante resultado da teoria das equações diferenciais ordinárias.

Teorema 3.2. (Peano). *Sejam $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e $a,b>0$. Se $f\colon K\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, onde $K = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, então existe $c \in (0,a]$ tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x))) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma solução $y\colon [x_0 - c, x_0 + c] \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Como f é contínua e K é compacto, existe $M > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq M$ para todo $(x,y) \in K$. Definamos

$$c = \min\left\{\frac{b}{M}, a\right\}$$

e consideremos $I_0 = [x_0, x_0 + c]$. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$ e ponhamos

$$I_r = \left[x_0 + \frac{(r-1)c}{n}, x_0 + \frac{rc}{n}\right]$$

para cada $r \in \{1,\ldots,n\}$. Cabe observar que

$$I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

é uma decomposição de I_0 como uma união de intervalos justapostos. A partir disso, definimos $y_n \colon I_0 \to \mathbb{R}$ recursivamente da seguinte forma:

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0, & \text{se } x \in I_1; \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt, & \text{se } x \in I_2 \cup \cdots \cup I_n. \end{cases}$$

Mais precisamente, o processo de construção da função y_n é o seguinte: definimos

$$y_n(x) = y_0 \quad \text{se} \quad x \in I_1;$$

supondo que y_n já tenha sido definida continuamente em $I_2 \cup \cdots \cup I_r$, onde $r \in \{2, \ldots, n-1\}$, seja

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt,$$

para cada $x \in I_{r+1}$. A construção da função y_n em I_{r+1} leva em conta a inclusão

$$\left[x_0, x - \frac{c}{n}\right] \subset I_1 \cup \cdots \cup I_r$$

$(x \in I_{r+1})$.

Afirmação 1: Existe $C > 0$ tal que $|y_n(x)| \leq C$ para todo $x \in I_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

De fato, dados $x \in I_0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x-\frac{c}{n}} |f(t, y_n(t))|dt \\ &\leq M\left(x - \frac{c}{n} - x_0\right) \leq Mc \leq b, \end{aligned}$$

ou seja, $y_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Consequentemente, fica estabelecida a Afirmação 1.

Afirmação 2: A sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uniformemente equicontínua.

De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_n(z)| &= \left| \int_{x_0}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt - \int_{x_0}^{z-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \\ &= \left| \int_{z-\frac{c}{n}}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \\ &\leq \int_{z-\frac{c}{n}}^{x-\frac{c}{n}} |f(t, y_n(t))|dt \\ &\leq M|x - z| \end{aligned}$$

para quaisquer $x, z \in I_0$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Em vista das Afirmações 1 e 2, o Corolário 3.1 garante a existência de $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito de modo que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ seja uniformemente convergente. Seja $y \in C(I_0)$ tal que

$$y = \lim_{n\in\mathbb{N}'} y_n \quad \text{em} \quad C(I_0).$$

Afirmação 3: A função $y\colon I_0 \to \mathbb{R}$ é derivável e satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Realmente, para cada $n \in \mathbb{N}'$, ponhamos

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt$$

$(x \in I_0)$ e tomemos $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t,s) - f(u,v)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

sempre que $(t,s), (u,v) \in K$, $|t-u| < \delta$ e $|s-v| < \delta$. Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\sup_{x\in I_0} |y_n(x) - y(x)| < \delta$$

sempre que $n \in \mathbb{N}'$ e $n > n_0$. Logo,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))dt - f(t, y(t))|\, dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{c}|x - x_0| \\ &\le \varepsilon \end{aligned}$$

sempre que $n \in \mathbb{N}'$, $n > n_0$ e $x \in I_0$. Daí,

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

para cada $x \in I_0$.

Além disso,

$$\lim_{n\in\mathbb{N}'} \int_{x}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt = 0,$$

pois

$$\left| \int_{x}^{x-\frac{c}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \le M \left| \left(x - \frac{c}{n} \right) - x \right| = \frac{Mc}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

para todo $x \in I_0$. Assim, pelo teorema fundamental do Cálculo, $y\colon I_0 \to \mathbb{R}$ é derivável e satisfaz a equação diferencial ordinária $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$, com condição inicial $y(x_0) = y_0$, seguindo a Afirmação 3.

De modo análogo, podemos construir y no intervalo $[x_0 - c, x_0]$. Isso completa a demonstração. ■

3.4 Exercícios

(3.1): Mostre que se $a > 0$, então a convergência da sequência de funções (f_n), onde para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \in [0, +\infty) \to \frac{x}{x+n} \in \mathbb{R},$$

é uniforme no intervalo $[0, a]$, mas não é uniforme no intervalo $[0, +\infty)$.

(3.2): Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $g_n\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ \\ \frac{1}{nx}, & \text{se } \frac{1}{n} < x\ . \end{cases}$$

a) Mostre que $g_n \to 0$ pontualmente em $[0, +\infty)$.

b) Mostre que $g_n \overset{u}{\not\to} 0$ em $[0, +\infty)$, mas $g_n \overset{u}{\to} 0$ em $[c, +\infty)$ para todo $c > 0$.

(3.3): Seja $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dada por $f_n(x) = f(x+n)$, converge uniformemente para a função constante $g(x) = a$ em $[0, +\infty)$.

(3.4): Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ seja uma sequência equicontínua e que para cada $x \in [0, 1]$, exista $M_x > 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M_x$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Prove que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.

(3.5): Considere $\mathcal{F} \subset C([0, 1])$. Prove que $\mathcal{F}$ é limitado se, e somente se, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in \mathcal{F}$ e para todo $x \in [0, 1]$.

(3.6): Exiba uma sequência de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que convirja uniformemente em $(0,1)$ mas não em $[0,1]$.

(3.7): Prove que um conjunto de polinômios de grau $\leq k$, uniformemente limitado num intervalo compacto, é equicontínuo nesse intervalo.

(3.8): Seja $K\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o espaço $C([a,b])$ munido da norma

$$||f|| = \sup\{|f(t)|; t \in [a,b]\}$$

para cada $f \in C([a,b])$. Considere também o operador $T\colon C([a,b]) \to C([a,b])$ que, a cada $f \in C([a,b])$, associa $Tf\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definido por

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

$(x \in [a,b])$. Prove que $\overline{T(B)}$ é compacto, onde

$$B = \{f \in C([a,b]); ||f|| \leq 1\}.$$

Capítulo 4

Topologia Fraca e Topologia Fraca Estrela

Como vimos no Capítulo 2, a noção de compacidade em espaços normados é rígida demais para permitir um princípio para obtenção de subsequências convergentes. De fato, para que toda sequência limitada em um espaço normado E tenha uma subsequência convergente (segundo a norma de E), é necessário e suficiente que E seja um espaço de dimensão finita. Este fato nos leva a perguntar se podemos considerar uma outra estrutura em E, que esteja relacionada com as operações vetoriais de E e que permita obter princípios de obtenção de subsequências convergentes. Como veremos, essa estrutura será uma *topologia* em E mais fraca do que a topologia que provém da norma de E.

As duas topologias mais fracas que a topologia da norma, de grande importância em Análise, são a topologia fraca e a topologia fraca estrela. A primeira está presente em todo espaço normado e, a fim de obtermos resultados sobre a existência de subsequências convergentes de sequências limitadas nessa topologia, devemos assumir uma propriedade adicional em E. Isso será dado pelo Teorema de Kakutani. A segunda topologia está presente apenas em espaços duais. Em contrapartida, a bola unitária do dual de E é sempre fraca-estrela compacta. Esse resultado é dado pelo Teorema de Alaoglu-Bourbaki. Observamos que ser fraca-estela compacto não garante bons resultados para obtenção de subsequências convergentes, mas é útil, por exemplo, quando E é separável.

Nosso tratamento será bastante introdutório, uma vez que este livro é destinado a alunos em nível de iniciação científica. Para os leitores interessados em ler mais sobre o assunto, indicamos [5].

4.1 Noções básicas sobre espaços topológicos

Nesta seção, apresentamos alguns rudimentos da teoria dos espaços topológicos, com o intuito de esclarecer os conceitos e os resultados que serão utilizados nas próximas seções. Para os leitores interessados nesse tema, indicamos [2] e [7].

Definição 4.1. *Seja X um conjunto. Uma topologia em X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(a) *$\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;*

(b) *uniões arbitrárias de membros de $\mathcal{T}$ também pertencem a $\mathcal{T}$;*

(c) *interseções finitas de membros de $\mathcal{T}$ também pertencem a $\mathcal{T}$.*

Os membros de $\mathcal{T}$ são chamados de abertos (ou $\mathcal{T}$-abertos). O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de espaço topológico. Não havendo o risco de ambiguidade, denotaremos o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ escrevendo apenas X.

Exemplo 4.1. (a) Seja (M, d) um espaço métrico. Então

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset M; \text{ para cada } a \in U, \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(a; r) \subset U\}$$

é uma topologia em M (Proposição 1.9). Assim, todo espaço métrico é um espaço topológico. A topologia $\mathcal{T}_d$ é chamada de *topologia proveniente da métrica* d.

(b) Seja X um conjunto arbitrário, e consideremos $\mathcal{T}_1$ como sendo a família de todos os subconjuntos de X. É fácil ver que $\mathcal{T}_1$ é uma topologia em X, chamada de *topologia discreta* (Exercício 4.1)

(c) Seja X um conjunto arbitrário, e consideremos $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X\}$. Então $\mathcal{T}_2$ é uma topologia em X, chamada de *topologia trivial* (Exercício 4.1).

Definição 4.2. *Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias em um conjunto X. Dizemos que $\mathcal{T}_1$ é menos fina do que $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Nesse caso, escrevemos $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.*

Observação 4.1. (a) A topologia trivial é menos fina do que qualquer outra topologia em um conjunto X;

(b) Qualquer topologia em um conjunto X é menos fina do que a sua topologia discreta.

Definição 4.3. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que B é um subconjunto fechado (ou $\mathcal{T}$-fechado) de X se $X \setminus B$ é um conjunto $\mathcal{T}$-aberto.*

Uma aplicação imediata das Definições 4.1 e 4.3 fornece o próximo resultado (veja o Exercício 4.2).

Proposição 4.1. *Seja X um espaço topológico. São válidas as seguintes condições:*

(a) *X e $\emptyset$ são fechados de X;*

(b) *interseções arbitrárias de fechados de X também são fechados de X;*

(c) *uniões finitas de fechados de X também são fechados de X.*

Definição 4.4. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Consideremos*

$$\mathfrak{X} = \{B \subset X; B \text{ é fechado e } B \supset A\}.$$

O fecho (ou aderência) de A é o conjunto

$$\overline{A}^{\mathcal{T}} = \bigcap_{B \in \mathfrak{X}} B.$$

Quando a topologia $\mathcal{T}$ em X estiver subentendida, escreveremos apenas $\overline{A}$, em vez de $\overline{A}^{\mathcal{T}}$.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração do próximo resultado (veja o Exercício 4.3).

Proposição 4.2. *Sejam A_1 e A_2 dois subconjuntos de um espaço topológico X. São válidas as seguintes condições:*

(a) $A_1 \subset \overline{A}_1$;

(b) $\overline{\overline{A}}_1 = \overline{A}_1$;

(c) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$;

(d) *A_1 é fechado se, e somente se, $\overline{A}_1 = A_1$. Em particular, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.*

Definição 4.5. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. O interior de A, indicado por $int(A)$, é a união de todos os subconjuntos abertos U de X tais que $U \subset A$.*

Proposição 4.3. *Sejam A_1 e A_2 dois subconjuntos de um espaço topológico X. São válidas as seguintes condições:*

(a) $\text{int}(A_1) \subset A_1$;

(b) $\text{int}(\text{int } A_1) = \text{int } A_1$;

(c) $\text{int}(A_1 \cap A_2) = \text{int}(A_1) \cap \text{int } A_2$;

(d) *A_1 é aberto se, e somente se, $\text{int}(A_1) = A_1$. Em particular, $\text{int}(X) = X$.*

Demonstração. Veja o Exercício 4.5. ■

Definição 4.6. *Seja X um espaço topológico não vazio e consideremos $x \in X$. Um subconjunto U de X é dito uma vizinhança de x se $x \in \text{int } U$. Denotamos por $\mathcal{U}_x$ o conjunto de todas as vizinhanças de x.*

Definição 4.7. *Sejam X um espaço topológico não vazio e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ é uma base de vizinhanças de x se, para cada $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$ tal que $\mathcal{V} \subset U$.*

Exemplo 4.2. (a) Seja X um espaço topológico não vazio e, para cada $x \in X$, ponhamos

$$\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{U}_x; U \text{ é aberto}\}.$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x.

(b) Seja M um espaço métrico e consideremos $x \in M$. Então

$$\mathcal{B}_x = \{B(x;r); r > 0\}$$

é uma base de vizinhanças de x. Da mesma forma,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_x = \{B[x;r]; r > 0\}$$

também é uma base de vizinhanças de x.

Em vista da Definição 4.7, temos a

Definição 4.8. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ é uma base para $\mathcal{T}$ se, para cada $x \in X$ e cada $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{V} \subset U$.*

Exemplo 4.3. (a) A família de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$;

(b) Seja (M, d) um espaço métrico. Então

$$\mathcal{B} = \{B(a;r); a \in M \text{ e } r > 0\}$$

é uma base para $\mathcal{T}_d$.

(c) Seja $\mathcal{T}$ a topologia discreta em um conjunto $X \neq \emptyset$. Então

$$\mathcal{B} = \{\{x\}; x \in X\}$$

é uma base para $\mathcal{T}$.

A seguir, apresentamos a noção de continuidade para funções definidas entre espaços topológicos.

Definição 4.9. *Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ dois espaços topológicos. Uma função $f\colon X \to Y$ é dita contínua em $a \in X$ se, para cada $\mathcal{T}_2$-aberto $\mathcal{V}$ contendo $f(a) \in Y$, existe um $\mathcal{T}_1$-aberto U contendo $a \in X$ tal que*

$$f(U) \subset \mathcal{V}.$$

Quando f é contínua em cada elemento de X, dizemos apenas que f é contínua.

Observação 4.2. A Definição 4.9 é a extensão natural da definição de continuidade vista no contexto dos espaços métricos (Exemplo 4.3(b)).

Proposição 4.4. *Sejam $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ e $(\mathcal{Z}, \mathcal{T}_3)$ três espaços topológicos. Suponhamos que $f\colon X \to Y$ seja uma função contínua em $a \in X$ e que $g\colon Y \to \mathcal{Z}$ seja uma função contínua em $b = f(a) \in Y$. Então $(g \circ f)\colon X \to \mathcal{Z}$ contínua em a.*

Demonstração. Seja W um subconjunto $\mathcal{T}_3$-aberto, com $(g \circ f)(a) = g(b) \in W$. Como g é contínua em b, existe um subconjunto $\mathcal{T}_2$-aberto $\mathcal{V}$ de Y, com $b \in \mathcal{V}$, tal que

$$g(\mathcal{V}) \subset W.$$

Da mesma forma, como f é contínua em a, existe um subconjunto $\mathcal{T}_1$-aberto U de X, com $a \in U$, tal que

$$f(U) \subset \mathcal{V}.$$

Portanto,

$$(g \circ f)(U) \subset g(\mathcal{V}) \subset W,$$

o que garante que $(g \circ f)$ é contínua em a. ■

No decorrer deste texto, utilizaremos o conceito de densidade no contexto dos espaços topológicos.

Definição 4.10. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $D \subset X$ é denso em X se*

$$\overline{D} = X.$$

Proposição 4.5. *Sejam X um espaço topológico, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e D um subconjunto denso de X. Suponhamos que*

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in D.$$

Então $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista $a \in X$ tal que $f(a) \neq 0$. Digamos que $f(a) > 0$.

Afirmação: Existe um aberto U de X, com $a \in U$, tal que

$$f(x) > 0$$

para todo $x \in U$.

De fato, como

$$f(a) \in I = \left(\frac{f(a)}{2}, \frac{3f(a)}{2}\right)$$

e f é contínua, existe um subconjunto aberto U de X, com $a \in U$, tal que

$$f(U) \subset I.$$

Portanto, $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ para todo $x \in U$, o que estabelece a presente afirmação.

Agora, seja U o aberto em X obtido na afirmação. Como $X = \overline{D}$, temos $U \cap D \neq \emptyset$. Lembrando que $f(x) = 0$ para todo $x \in D$, que f é positiva em U e que é nula em D, chegamos a uma contradição. Logo, f é a função nula em X.
■

Conforme dissemos no início deste capítulo, estamos interessados em munir os espaços normados com outras topologias vetoriais a fim de estudarmos a noção de compacidade com relação às mesmas. Nesta direção, o enunciado da próxima proposição traz os principais ingredientes de que necessitamos.

Proposição 4.6. *Sejam X um conjunto não vazio,*

$$\{(X_i, \mathcal{T}_i); i \in I\}$$

uma família de espaços topológicos e

$$\{f_i \colon X \to X_i; i \in I\}$$

uma família de aplicações. Consideremos

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{j \in J} f^{-1}(U_j);\ J \text{ é finito e } U_j \text{ é um subconjunto } \mathcal{T}_j\text{-aberto de } X_j \text{ para cada } j \in J \Big\}.$$

São válidas as seguintes condições:

(a) *$\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia $\mathcal{T}_\omega$ em X;*

(b) *$\mathcal{T}_\omega$ é a topologia menos fina em X tal que $f_i \colon (X, \mathcal{T}_\omega) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua para todo $i \in I$;*

(c) *Dado um espaço topológico $(Y, \mathcal{T})$, uma aplicação $g \colon (Y, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_\omega)$ é contínua se, e somente se, $(f_i \circ g) \colon (Y, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua para cada $i \in I$.*

A topologia $\mathcal{T}_\omega$ é conhecida como a topologia inicial em X definida pela família de aplicações $\{f_i; i \in I\}$.

Demonstração. Veja o Capítulo I, §2, nº 3 de [2]. ■

Exemplo 4.4. (a) Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. A topologia inicial em A, definida pela inclusão

$$i \colon x \in A \longmapsto x \in X,$$

é dita a *topologia induzida por $\mathcal{T}$ em A*. É simples constatar que

$$\{U \cap A; U \text{ é } \mathcal{T} - \text{aberto}\}$$

é a família de todos os abertos de A. Com essa topologia induzida, A é dito um *subespaço topológico* de X.

(b) Seja $\{(X_i, \mathcal{T}_i); i \in I\}$ uma família de espaços topológicos não vazios e consideremos

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I}; x_i \in X_i \text{ para cada } i \in I\}.$$

A *topologia produto em X* é a topologia inicial em tal conjunto, definida pelas projeções

$$\begin{aligned} \pi_j \colon X &\longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i \in I} &\longmapsto x_j, \end{aligned}$$

onde $j \in I$.

Em Topologia, uma classe importante é a formada pelos espaços de Hausdorff, que mencionaremos abaixo.

Definição 4.11. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço de Hausdorff se dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, existem $U \in \mathcal{U}_a$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{U}_b$ tais que $U \cap \mathcal{V} = \emptyset$.*

Exemplo 4.5. (a) Seja $\mathcal{T}$ a topologia discreta em um conjunto X. Então $(X, \mathcal{T})$ é um espaço de Hausdorff.

(b) Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.

Proposição 4.7. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico de Hausdorff e $A \subset X$. Então A é um espaço de Hausdorff com a topologia induzida por $\mathcal{T}$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in A \subset X$, com $a \neq b$. Como X é um espaço de Hausdorff, existem dois $\mathcal{T}$-abertos $U \in \mathcal{U}_a$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{U}_b$ tais que $U \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Assim, pelo Exemplo 4.4(a), $U_1 = U \cap A$ e $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cap A$ são dois abertos em A tais que $a \in U_1$, $b \in \mathcal{V}_1$ e $U_1 \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset$. Isso mostra que A é um espaço de Hausdorff. ■

Observação 4.3. Antes de apresentarmos o próximo resultado, lembramos que dois espaços topológicos X e Y são ditos homeomorfos quando existe uma bijeção contínua $f \colon X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} \colon Y \to X$ também é contínua. Seja $\{X_i; i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e ponhamos $X = \prod_{i \in I} X_i$. Fica a cargo do leitor a verificação de que cada X_i, com $i \in I$, é homeomorfo a um subespaço topológico de X.

Proposição 4.8. *Seja $\{X_i; i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $X = \prod_{i \in I} X_i$ *é um espaço de Hausdorff;*

(b) X_i *é um espaço de Hausdorff para todo $i \in I$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Esta implicação segue diretamente da Proposição 4.7 e da Observação 4.3.

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos que X_i seja um espaço de Hausdorff para todo $i \in I$. Consideremos $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ e $b = (b_i)_{i \in I} \in X$, com $a \neq b$. Nesse caso, existe $j \in I$ tal que $a_j \neq b_j$. Como X_j é um espaço de Hausdorff, existem abertos U_j e $\mathcal{V}_j$ em X_j, com $a_j \in U_j$, $b_j \in \mathcal{V}_j$, tais que $U_j \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$. Ponhamos $U = \pi_j^{-1}(U_j)$ e $\mathcal{V} = \pi_j^{-1}(\mathcal{V}_j)$
(π_j é a projeção definida no Exemplo 4.4(b)). Logo, $U \in \mathcal{U}_a$, $\mathcal{V} \in \mathcal{U}_b$ e $U \cap \mathcal{V} = \emptyset$, seguindo o desejado. ■

Terminamos esta seção com o conceito de compacidade no contexto dos espaços topológicos.

Definição 4.12. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $K \subset X$. Dizemos que:*

(a) *X é compacto se cada cobertura aberta de X possuir uma subcobertura finita;*

(b) *K é um subconjunto compacto de X se K for um espaço topológico compacto com a topologia induzida por $\mathcal{T}$.*

A Definição 4.12 estende a Definição 2.2 para o contexto mais amplo dos espaços topológicos. No decorrer deste capítulo, aparecerão exemplos de espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ não provém de uma métrica.

Proposição 4.9. (a) *Cada subespaço fechado de um espaço compacto também é compacto;*

(b) *Cada subespaço compacto de um espaço de Hausforff é fechado.*

Demonstração. (a) Seja X um espaço compacto e consideremos um subespaço fechado B de X. Suponhamos que $\{\mathcal{V}_i; i \in I\}$ seja uma família de abertos de B tal que

$$B = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i.$$

Para cada $i \in I$, seja U_i um aberto em X de modo que $\mathcal{V}_i = U_i \cap B$. Logo,

$$X = (X \setminus B) \cup \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right).$$

Como X é compacto, existem $i_1, \ldots, i_k$, com $k \in \mathbb{N}^*$, de forma que

$$X = (X \setminus B) \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

Portanto,

$$B = \mathcal{V}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{V}_{i_k},$$

donde concluímos que B é um espaço compacto. Daí, resulta a condição (a) do enunciado.

(b) Sejam X um espaço de Hausdorff e K um subespaço compacto de X. Vejamos que $U = X \setminus K$ é um subconjunto aberto de X, resultando assim que K é fechado. Com efeito, seja $a \in U$. Logo, para cada $x \in K$, existem abertos $\mathcal{V}_x$ e W_x de X, com $a \in \mathcal{V}_x$ e $x \in W_x$, tais que $\mathcal{V}_x \cap W_x = \emptyset$ (X é um espaço de Hausdorff). Assim, $\{W_x \cap K; x \in K\}$ é uma cobertura aberta do espaço compacto K, donde existem $\ell \in \mathbb{N}^*$ e $x_1, \ldots, x_\ell \in K$ tais que

$$K = (W_{x_1} \cap K) \cup \cdots \cup (W_{x_\ell} \cap K).$$

Ponhamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{x_1} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{x_\ell}$. Portanto, $\mathcal{V}$ é um subconjunto aberto de X, tal que

$$a \in \mathcal{V} \subset X \setminus K = U.$$

Isso prova que U é aberto e, consequentemente, K é fechado. ■

Finalizamos esta seção enunciando o importante

Teorema 4.1. (Tychonoff). *Seja $\{X_i; i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $X = \prod_{i \in I} X_i$ *é compacto;*

(b) X_i *é compacto para todo* $i \in I$.

Demonstração. Veja [2]. ■

4.2 Topologia fraca e topologia fraca estrela

Nesta seção, E e F denotarão dois espaços normados reais. Em tais espaços, as topologias definidas por suas normas serão denotadas por $\mathcal{T}_E$ e $\mathcal{T}_F$, respectivamente.

O nosso objetivo aqui é apresentar duas importantes topologias iniciais: a topologia fraca em E e a topologia fraca estrela em E'. Isto constitui uma preparação para estudarmos o teorema de Kakutani e o teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que são dois resultados clássicos acerca da compacidade de

$$B_E = \{x \in E; ||x||_E \leq 1\}$$

e de

$$B_{E'} = \{\varphi \in E'; ||\varphi||_{E'} \leq 1\}$$

segundo as topologias iniciais mencionadas.

Definição 4.13. *A topologia fraca em E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia inicial em E definida pela família de todos os funcionais lineares $\varphi \in E'$.*

Na próxima proposição, traduzimos as propriedades gerais mencionadas na Proposição 4.6 para a topologia fraca em E.

Proposição 4.10. *A topologia fraca $\sigma(E, E')$ possui as seguintes propriedades:*

(a) *$U \subset E$ é $\sigma(E, E')$-aberto se, e somente se, para cada $a \in U$, existem $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ e $r > 0$, tais que*

$$U(a; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; r) := \{x \in E; |\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| < r \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset U.$$

(b) *Para cada $\varphi \in E'$, a função $\varphi\colon (E, \sigma(E, E')) \to \mathbb{R}$ é contínua. Além disso, $\sigma(E, E')$ é a topologia menos fina em E para a qual isto se verifica;*

(c) *Dado um espaço topológico $(Y, \mathcal{T})$, uma aplicação $f\colon (Y, \mathcal{T}) \to (E, \sigma(E, E'))$ é contínua se, e somente se, $(\varphi \circ f)\colon (Y, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $\varphi \in E'$.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 4.6. ■

A partir de agora, obteremos algumas propriedades básicas da topologia fraca em E.

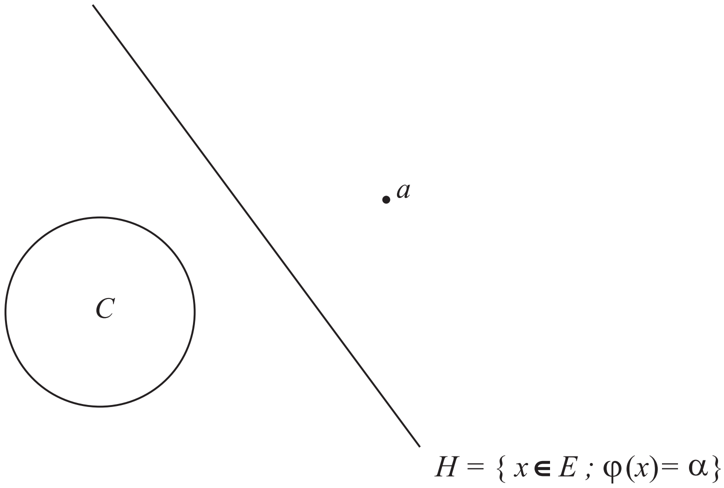
Definição 4.14. *Um subconjunto C de E é dito convexo se, para quaisquer $x, y \in C$, temos*

$$\{(1 - \lambda)x + \lambda y; \lambda \in [0, 1]\} \subset C.$$

Uma vez que este texto destina-se a uma primeira leitura sobre a topologia fraca, enunciaremos o próximo *resultado* sem apresentarmos uma demonstração. No entanto, uma excelente exposição do mesmo pode ser encontrada na pag. 83 de [8].

Teorema 4.2. (Hahn-Banach). *Seja C um subconjunto fechado, convexo e não vazio de E, e suponhamos que $a \in E \setminus C$. Então existem $\varphi \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi(a) > \alpha$ e*

$$C \subset \{x \in E; \varphi(x) \leq \alpha\}.$$



Proposição 4.11. $(E, \sigma(E, E'))$ *é um espaço topológico de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $a, b \in E$. Aplicando o Teorema 4.2, com $C = \{b\}$, obtemos $\varphi \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\varphi(b) \leq \alpha < \varphi(a).$$

Seja $\beta \in (\alpha, \varphi(a))$. Então

$$\mathcal{V}_1 = \{x \in E; \varphi(x) > \beta\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_2 = \{x \in E; \varphi(x) < \beta\}$$

são $\sigma(E, E')$-vizinhanças abertas de a e b em E, respectivamente. Como $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$, obtemos o resultado. ■

Proposição 4.12. *Seja C um subconjunto convexo de E. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *C é $\mathcal{T}_E$-fechado;*

(b) *C é $\sigma(E, E')$-fechado.*

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a): Seja C um subconjunto $\sigma(E, E')$-fechado de E, ou seja, $E \setminus C$ é $\sigma(E, E')$-aberto. Como $\sigma(E, E')$ é menos fina do que $\mathcal{T}_E$, segue que $E \setminus C$ é $\mathcal{T}_E$-aberto e, portanto, C é $\mathcal{T}_E$-fechado.

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que C seja $\mathcal{T}_E$-fechado. Se $C = E$, o resultado é claro. Caso contrário, tomemos $a \in E \setminus C$ arbitrariamente. Lembrando que C é convexo, o Teorema 4.2 garante a existência de $\varphi \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi(a) > \alpha$ e

$$C \subset \{x \in E; \varphi(x) \leq \alpha\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{V} = \{x \in E; \varphi(x) > \alpha\}$$

é uma $\sigma(E, E')$-vizinhança aberta de a em E, tal que $\mathcal{V} \subset E \setminus C$. Como $a \in E$ foi fixado arbitrariamente, concluímos que $E \setminus C$ é $\sigma(E, E')$-aberto, ou seja, C é $\sigma(E, E')$-fechado. ■

Na Proposição 4.10(b), vimos que $\sigma(E, E')$ é menos fina do que $\mathcal{T}_E$. O próximo resultado traz uma condição necessária e suficiente para que $\sigma(E, E') = \mathcal{T}_E$.

Proposição 4.13. *As topologias $\mathcal{T}_E$ e $\sigma(E, E')$ coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. ($\Leftarrow$): Já sabemos que $\sigma(E, E') \leq \mathcal{T}_E$, o que sempre é válido.

Agora, supondo que E tenha dimensão finita e que U seja um subconjunto $\mathcal{T}_E$-aberto de E, mostremos que U é $\sigma(E, E')$-aberto. Com efeito, seja $a \in U$ e tomemos $s > 0$ tal que

$$B(a; s) \subset U.$$

Como E tem dimensão finita, seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E, onde $n \in \mathbb{N}^*$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $||v_i|| = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definamos o funcional linear contínuo

$$\begin{aligned} \pi_i \colon E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

Tomemos $r = \frac{s}{n}$. Afirmamos que

$$\begin{aligned} U(a; \pi_1, \ldots, \pi_n; r) = &\{x \in E; |\pi_i(x) - \pi_i(a)| < r \\ &\text{para todo } i = 1, \ldots, n\} \subset U. \end{aligned}$$

De fato, dado $x \in U(a; \pi_1, \ldots, \pi_n; r)$, temos

$$\begin{aligned} ||x - a|| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_j - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) v_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| ||v_j|| = \sum_{j=1}^{n} |\pi_j(x) - \pi_j(a)| < r \cdot n = s, \end{aligned}$$

onde $a = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j v_j$. Daí, resulta que

$$x \in B(a; s) \subset U$$

e assim $U(a; \pi_1, \ldots, \pi_n; r) \subset U$. Como $a \in U$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que U é $\sigma(E, E')$-aberto, ou seja $\mathcal{T}_E \leq \sigma(E, E')$. Logo, $\sigma(E, E') = \mathcal{T}_E$.

($\Rightarrow$): Suponhamos que E tenha dimensão infinita e vejamos que $\sigma(E, E') \neq \mathcal{T}_E$.

Ponhamos
$$S_E = \{x \in E, ||x|| = 1\}$$
e
$$B_E = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}.$$

Afirmação: $\overline{S}_E^{\sigma(E,E')} = B_E$.

Fixemos $b \in E$ tal que $||b|| < 1$. Seja U uma $\sigma(E, E')$-vizinhança arbitrária de b em E. Então existem $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ e $r > 0$ tais que

$$U(b; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; r) = \{x \in E; |\varphi_i(x) - \varphi_i(b)| < r\} \subset U$$

(Proposição 4.10(a)). Como E tem dimensão infinita, a aplicação linear

$$T\colon x \in E \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

não é injetora. Seja $c \in E \setminus \{0\}$ tal que

$$T(c) = (\varphi_1(c), \ldots, \varphi_n(c)) = (0, \ldots, 0).$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$|\varphi_i(b + \lambda c) - \varphi_i(b)| = |\lambda| \, |\varphi_i(c)| = 0 < r,$$

ou seja,
$$\{b + \lambda c; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset U.$$

Definamos
$$g\colon \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto ||b + \lambda c|| \in \mathbb{R}.$$

Claramente, g é contínua e $g(0) = ||b|| < 1$. Por outro lado, as relações

$$||b + \lambda c|| \geq ||\lambda c|| - ||b|| = |\lambda| \, ||c|| - ||b||,$$

válidas para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, implicam

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = +\infty.$$

Portanto, pelo teorema do valor intermediário, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(\lambda_0) = 1$, o que significa que
$$(b + \lambda_0 c) \in U \cap S_E.$$

Uma vez que b foi tomado arbitrariamente em $B(0, 1)$, acabamos de demonstrar que $B(0; 1) \subset \overline{S}_E^{\sigma(E,E')}$ e, consequentemente,

$$B_E = B(0; 1) \cup S_E \subset \overline{S}_E^{\sigma(E,E')}.$$

Por outro lado, como $S_E \subset B_E$, também temos

$$\overline{S_E}^{\sigma(E,E')} \subset \overline{B_E}^{\sigma(E,E')} = B_E,$$

onde esta última igualdade vem do fato de B_E ser convexo e $\mathcal{T}_E$-fechado (Proposição 4.12. Daí, a afirmação está devidamente verificada.

O fato que demonstramos acima assegura que S_E não é um subconjunto $\sigma(E, E')$-fechado de E, apesar de ser $\mathcal{T}_E$-fechado. Logo, $E \setminus S_E$ é $\mathcal{T}_E$-aberto, mas não é $\sigma(E, E')$-aberto. Em resumo, $\mathcal{T}_E \neq \sigma(E, E')$.

Nesse caso, se $\sigma(E, E') = \mathcal{T}_E$, então E tem dimensão finita, o que conclui essa demonstração. ∎

Proposição 4.14. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então*

$$T\colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$$

também é contínua.

Demonstração. Fixemos $\psi \in F'$ arbitrariamente. Como $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então $(\psi \circ T) \in E'$. Portanto, pela Proposição 4.10(b).

$$(\psi \circ T) : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínua. Da arbitrariedade de $\psi \in F'$, segue que $T\colon (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ é contínua. (Proposição 4.10(c)). ∎

Observação 4.4. A recíproca da Proposição 4.14 também é válida, mas isso não será utilizado aqui. A validade desse fato decorre do importante Princípio da limitação uniforme, que pode ser encontrado no Capítulo 6 de [8].

O restante desta seção é dedicado ao estudo da topologia fraca estrela em E', que será definida a seguir. Antes disso, estabelecemos a

Definição 4.15. *O mergulho canônico de E em $E'' = (E')'$ é a aplicação*

$$\begin{aligned} J\colon E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J(x) : E' \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad \varphi \mapsto \langle J(x), \varphi\rangle = \varphi(x). \end{aligned}$$

Observação 4.5. Seja J o mergulho canônico de E em E''. Temos que:

(a) <u>*J é contínua*</u>: de fato, para cada $x \in E$, valem as relações

$$|\langle J(x), \varphi\rangle| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||_{E'} ||x||_E \leq ||x||_E,$$

onde $\varphi \in E''$ e $||\varphi||_{E'} \leq 1$, ou seja,

$$||J(x)||_{E''} = \sup\{|\langle J(x), \varphi\rangle|; \varphi \in E' \text{ e } ||\varphi||_{E'} \leq 1\} \leq ||x||_E.$$

(b) *J é uma isometria*, ou seja,

$$||J(x)||_{E''} = ||x||_E$$

para todo $x \in E$ (veja a Observação 8.1 na página 77 de [8]). Em particular, J é uma aplicação injetora.

Definição 4.16. *Dizemos que E é um espaço reflexivo se o mergulho canônico $J\colon E \to E''$ for uma aplicação sobrejetora.*

Exemplo 4.6. (a) Da Álgebra Linear, sabemos que todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo;

(b) Para cada $p \in [1, +\infty)$, é possível demonstrar que o espaço ℓ_p, introduzido no Exemplo 1.12, é reflexivo (veja o Exemplo 11.3 na página 107 de [8].

A topologia fraca estrela em E' será definida com o auxílio do mergulho canônico de E em E''.

Definição 4.17. *A topologia fraca estrela em E', denotada por $\sigma(E', E)$, é a topologia inicial em E' definida pela família de funcionais lineares*

$$\{J(x)\colon E' \to \mathbb{R}; x \in E\} \subset E'',$$

onde J é o mergulho canônico de E em E''.

No próximo resultado, veremos o conteúdo geral da Proposição 4.6 traduzido para a topologia fraca estrela.

Proposição 4.15. *A topologia fraca estrela $\sigma(E', E)$ possui as seguintes propriedades:*

(a) *$\mathcal{F} \subset E'$ é $\sigma(E', E)$-aberto se, e somente se, para cada $\varphi_0 \in \mathcal{F}$, existem $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $r > 0$, tais que*

$$\mathcal{V}(\varphi_0; x_1, \ldots, x_n; r) := \{\varphi \in E'; |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < r \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \mathcal{F}.$$

(b) *Para cada $x \in E$, $J(x) : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Além disso, $\sigma(E', E)$ é a topologia menos fina em E' para a qual esse fato pode ser verificado.*

(c) *Dado um espaço topológico $(Y, \mathcal{T})$, uma aplicação $f\colon (Y, \mathcal{T}) \to (E', \sigma(E', E))$ é contínua se, e somente se, $(J(x)) \circ f : (Y, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in E$.*

Observação 4.6. (a) Neste ponto da nossa discussão, há três topologias em E': a topologia $\mathcal{T}_{E'}$, a topologia fraca $\sigma(E', E'')$ e a topologia fraca estrela $\sigma(E', E)$. Pelas Proposições 4.10 e 4.15, sempre ocorre

$$\sigma(E', E) \leq \sigma(E', E'') \leq \mathcal{T}_{E'}.$$

(b) Se E é reflexivo, então $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$.

De fato, basta observar nesse caso que $\{J(x)\colon E' \to \mathbb{R}; x \in E\}$ é o conjunto formado por todos os funcionais lineares de E''.

(c) Se E tem dimensão finita, então

$$\sigma(E', E) = \sigma(E', E'') = \mathcal{T}_{E'}.$$

Realmente, como E tem dimensão finita, segue o mesmo para E'. Portanto, a primeira igualdade acima vem do item (b) desse exemplo, enquanto a segunda segue da Proposição 4.13.

Terminamos esta seção apresentando o último ingrediente necessário à compreensão dos dois resultados centrais deste capítulo.

Proposição 4.16. *$(E', \sigma(E', E))$ é um espaço topológico de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$, com $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Consideremos $a \in E$ de modo que $\varphi_1(a) < \varphi_2(a)$. Assim, tomando $\alpha \in (\varphi_1(a), \varphi_2(a))$, vem que

$$\mathcal{V}_1 = (J(a))^{-1}((-\infty, \alpha)) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_2 = (J(a))^{-1}((\alpha, +\infty))$$

são $\sigma(E', E)$-vizinhanças abertas de φ_1 e φ_2, respectivamente, com $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$. Isso mostra o desejado. ∎

4.3 O teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Na Seção 3 do Capítulo 2, estudamos o teorema de Riesz, que garante que a bola

$$B_E = \{x \in E; ||x||_E \leq 1\}$$

de um espaço normado E é $\mathcal{T}_E$-compacta se, e somente se, E tem dimensão finita. Na presente seção, o objetivo é demonstrar que

$$B_{E'} = \{\varphi \in E'; ||\varphi||_{E'} \leq 1\}$$

é $\sigma(E', E)$-compacta mesmo que E (e portanto E') seja um espaço normado de dimensão infinita. Esse é, precisamente, o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 4.3. (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Seja E um espaço normado. Então*

$$B_{E'} = \{\varphi \in E'; ||\varphi||_{E'} \leq 1\}$$

é um subconjunto compacto de E' com respeito à sua topologia fraca estrela.

Demonstração. Para cada $x \in E$, seja $I_x = [-||x||, ||x||]$ e consideremos o espaço topológico

$$\mathbb{R}^E = \{(t_x)_{x \in E}; t_x \in \mathbb{R} \text{ para todo } x \in E\}$$

munido da sua topologia produto. Sendo cada I_x um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, o Teorema 4.1 garante que

$$I = \prod_{x \in E} I_x$$

é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^E$.

Consideremos a aplicação linear injetora

$$\begin{aligned} \Phi \colon E' &\longrightarrow \mathbb{R}^E \\ \psi &\longmapsto (\psi(x))_{x \in E}. \end{aligned}$$

Nesse caso, $\Phi(B_{E'}) \subset I$, pois

$$|\psi(x)| \leq ||\psi|| \cdot ||x|| \leq ||x||,$$

sempre que $x \in E$ e $\psi \in B_{E'}$.

Afirmação 1: A aplicação $\Phi \colon (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{R}^E$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem.

Em primeiro lugar, mostraremos que $\Phi \colon (E', \sigma(E, E')) \to \mathbb{R}^E$ é contínua. Para tanto, é necessário e suficiente que, para cada $x \in E$, a aplicação,

$$(\pi_x \circ \Phi) \colon (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

seja contínua, onde π_x é a projeção

$$(t_y)_{y \in E} \in \mathbb{R}^E \longmapsto t_x \in \mathbb{R}.$$

(Proposição 4.6(c)). Com efeito, dado $x \in E$ e $\psi \in E'$, temos

$$(\pi_x \circ \Phi)(\psi) = \pi_x(\Phi(\psi)) = \pi_x((\psi(y))_{y \in E}) = \psi(x) = \langle J_E(x), \psi \rangle$$

onde J_E é o mergulho canônico de E em E''. Logo, $\pi_x \circ \Phi = J(x)$. Sendo $\sigma(E', E)$ a topologia inicial em E', definida pela família de aplicações

$$\{J(x) \colon E' \to \mathbb{R}; x \in E\},$$

segue que $(\pi_x \circ \Phi)\colon (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in E$, o que estabelece a continuidade de $\Phi\colon (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}^E$.

A fim de concluirmos a demonstração dessa afirmação, devemos constatar que

$$\Phi^{-1}\colon Im\Phi \subset \mathbb{R}^E \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$$

também é contínua. Pela Proposição 4.15, esse fato equivale à continuidade de cada aplicação

$$(J(x)) \circ \Phi^{-1}\colon Im\Phi \subset \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $x \in E$. Realmente, dados $x \in E$ e $\psi \in E'$, temos

$$\begin{aligned}((J(x)) \circ \Phi^{-1})((\psi(y))_{y\in E}) &= \langle J(x), \Phi^{-1}((\psi(y))_{y\in E})\rangle \\ &= \langle J(x), \psi\rangle = \psi(x) = \pi_x((\psi(y))_{y\in E}),\end{aligned}$$

ou seja, $(J(x)) \circ \Phi^{-1}$ é a restrição da projeção π_x à imagem de Φ. Recordando que a topologia produto em $\mathbb{R}^E$ é a topologia inicial definida pelas projeções $(\pi_x)_{x\in E}$, segue a continuidade de cada aplicação $(J(x)) \circ \Phi^{-1}$, onde $x \in E$. Assim, $\Phi^{-1}\colon Im\Phi \subset \mathbb{R}^E \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$ é contínua, donde concluímos que $\Phi\colon (E', E) \longrightarrow \mathbb{R}^E$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem.

Afirmação 2: $\Phi(B_{E'}) = \{\Phi(\psi); \psi \in E' \text{ e } ||\psi||_{E'} \le 1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^E$.

Tomemos $F = (F_x)_{x\in E} \in \overline{\Phi(B_{E'})}$ (fecho com respeito à topologia produto de $\mathbb{R}^E$) e vejamos que $F \in \Phi(B_{E'})$. Inicialmente, consideremos a função

$$\begin{aligned} f\colon E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = F_x. \end{aligned}$$

Vejamos que f é linear. Para tanto, fixemos $x_1, x_2 \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ e observemos que

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \pi_{x_1}^{-1}((F_{x_1} - \varepsilon, F_{x_1} + \varepsilon)) \cap \pi_{x_2}^{-1}((F_{x_2} - \varepsilon, F_{x_2} + \varepsilon)) \\ &\quad \cap \pi_{\alpha x_1 + \beta x_2}^{-1}((F_{\alpha x_1 + \beta x_2} - \varepsilon, F_{\alpha x_1 + \beta x_2} + \varepsilon)) \\ &= \{(t_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E; |t_{x_1} - F_{x_1}| < \varepsilon, |t_{x_2} - F_{x_2}| < \varepsilon \\ &\qquad \text{e } |t_{\alpha x_1 + \beta x_2} - F_{\alpha x_1 + \beta x_2}| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

é uma vizinhança aberta de F em $\mathbb{R}^E$. Assim,

$$\Phi(B_{E'}) \cap U_\varepsilon \neq \emptyset,$$

ou seja, existe $g \in B_{E'}$ tal que $(g(x))_{x\in E} \in U_\varepsilon$. Consequentemente,

$$|g(x_1) - F_{x_1}| < \varepsilon,$$

$$|g(x_2) - F_{x_2}| < \varepsilon,$$

e

$$|g(\alpha x_1 + \beta x_2) - F_{\alpha x_1 + \beta x_2}| < \varepsilon,$$

donde obtemos

$$\begin{aligned}
|f(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2)| &= |F_{\alpha x_1 + \beta x_2} - \alpha F_{x_1} - \beta F_{x_2}| \\
&= |[F_{\alpha x_1 + \beta x_2} - g(\alpha x_1 + \beta x_2)] - \alpha [F_{x_1} - g(x_1)] - \beta [F_{x_2} - g(x_2)]| \\
&\leq |F_{\alpha x_1 + \beta x_2} - g(\alpha x_1 + \beta x_2)| + |\alpha||F_{x_1} - g(x_1)| + |\beta||F_{x_2} - g(x_2)| \\
&< (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2) = 0,$$

isto é, f é linear.

A constatação de que f é contínua segue do fato de $I \subset \mathbb{R}^E$ ser compacto, de $\mathbb{R}^E$ ser um espaço topológico de Hausdorff e da inclusão $\Phi(B_{E'}) \subset I$. Realmente,

$$(f(x))_{x \in E} = (F_x)_{x \in F} = F \in \overline{\Phi(B_{E'})} \subset \overline{I} = I,$$

ou seja, $f(x) \in I_x = [-||x||, ||x||]$ para cada $x \in E$. Daí, f é contínua e $||f||_{E'} \leq 1$. Das informações obtidas até aqui, vem que

$$F = (f(x))_{x \in E} = \Phi(f),$$

com $f \in B_{E'}$, o que significa que $F \in \Phi(B_{E'})$. Logo, $\Phi(B_{E'})$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^E$ e a Afirmação 2 está provada.

Finalmente, como $\Phi(B_{E'})$ é fechado (Afirmação 2), $\Phi(B_{E'}) \subset I$ e I é compacto, segue que $\Phi(B_{E'})$ é compacto. Portanto, a Afirmação 1 assegura que $B_{E'}$ é um conjunto $\sigma(E', E)$-compacto. ■

4.4 O Teorema de Kakutani

Quando E é um espaço normado de dimensão infinita, sabemos que

$$B_E = \{x \in E; ||x||_E \leq 1\}$$

não é um conjunto $\mathcal{T}_E$-compacto. Lembrando que $\mathcal{T}_E$ e $\sigma(E, E')$ são topologias em E segundo as quais cada $\varphi \in E'$ é contínuo, e também que $\sigma(E, E')$ é menos fina do que $\mathcal{T}_E$, podemos nos perguntar se existem subconjunto de E, não compactos com respeito a $\mathcal{T}_E$, que sejam $\sigma(E, E')$-compactos. Em particular, sob quais condições, podemos garantir que B_E é $\sigma(E, E')$-compacto? Uma resposta precisa para essa questão é dada pelo teorema de Kakutani, que caracteriza a compacidade fraca de B_E em termos da reflexividade de E. Tal resultado será obtido através do teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, e com o auxílio de dois resultados técnicos, um demonstrado por Helly e outro por Goldstine.

Lema 4.1. (Helly). *Seja E um espaço normado (real). Consideremos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E'$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, onde $m \in \mathbb{N}^*$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *Para cada $r > 0$, existe $x_r \in B_E$ tal que $|\varphi_i(x_r) - \alpha_i| < r$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$;*

(b) $\left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi_i\right\|_{E'}$ *para todo $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Fixemos $r > 0$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ arbitrariamente. Por hipótese, existe $x_r \in \overline{B}_E$ tal que

$$|\varphi_i(x_r) - \alpha_i| < r \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i (\alpha_i - \varphi_i(x_r)) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi_i(x_r)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |\beta_i||\varphi_i(x_r) - \alpha_i| + \left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi_i(x_r)\right| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m} |\beta_i|\right) r + \left\|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi_i\right\|_{E'},
\end{aligned}$$

e a arbitrariedade de $r > 0$ assegura que

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi_i\right\|_{E'}.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos que a condição (b) seja válida e consideremos a aplicação linear

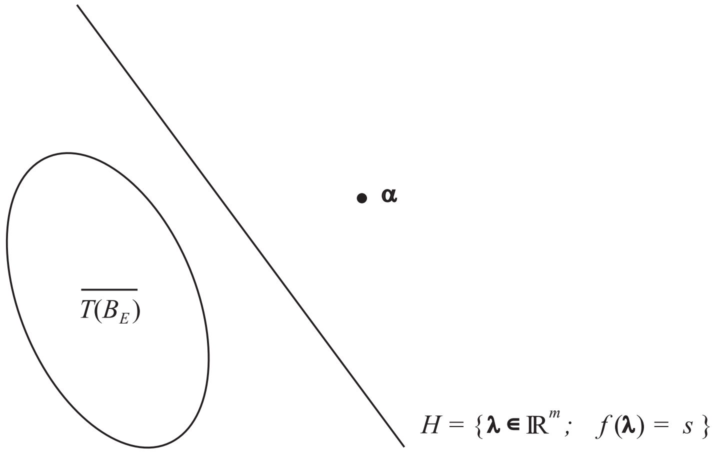
$$T \colon x \in E \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in \mathbb{R}^m.$$

Afirmação: $\alpha \in \overline{T(B_E)}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$.

Suponhamos, por absurdo, que essa afirmação seja falsa. Como $\overline{T(B_E)}$ é um subconjunto fechado, convexo e não vazio de $\mathbb{R}^m$, o Teorema 4.2 garante a existência de $f \in (\mathbb{R}^m)'$ e $s > 0$ tais que

$$\overline{T(B_E)} \subset \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m; f(\lambda) \leq s\}$$

e $f(\alpha) > s$.



Da Álgebra Linear, existe um único $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(\lambda) = \beta_1\lambda_1 + \cdots + \beta_m\lambda_m$$

para todo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ (veja o Teorema 7.19 na pag. 211 de [6]). Assim, dado $x \in B_E$, temos $-x \in B_E$,

$$\sum_{i=1}^m \beta_i\alpha_i = f(\alpha) > s \geq f(T(x)) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) = \sum_{i=1}^m \beta_i\varphi_i(x)$$

e

$$\sum_{i=1}^m \beta_i\alpha_i > s \geq \sum_{i=1}^m \beta_i\varphi_i(-x) = -\sum_{i=1}^m \beta_i\varphi_i(x),$$

donde concluímos que

$$\left\|\sum_{i=1}^m \beta_i\varphi_i\right\|_{E'} \leq s < \sum_{i=1}^m \beta_i\alpha_i.$$

No entanto, isso contradiz a condição (b). Logo, $\alpha \in \overline{T(B_E)}$.

Finalmente, vejamos que a condição (b) implica a condição (a). De fato, tomando $r > 0$, a afirmação que acabamos de demonstrar garante a existência de $x_r \in B_E$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^m |\varphi_i(x_r) - \alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||T(x_r) - \alpha|| < r.$$

Portanto, $|\varphi_i(x_r) - \alpha_i| < r$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, o que fornece o desejado.
$\blacksquare$

Lema 4.2. (Goldstine). *Seja E um espaço normado. Então*

$$J(B_E) = \{J(x); x \in E \text{ e } ||x||_E \leq 1\}$$

é denso em

$$B_{E''} = \{\xi \in E''; ||\xi||_{E''} \leq 1\}$$

com respeito à topologia fraca estrela $\sigma(E'', E')$, onde $J\colon E \to E''$ denota o mergulho canônico.

Demonstração. Sendo J uma isometria (Observação 4.5(b)) segue que

$$||J(x)||_{E''} = ||x||_{E''} \leq 1 \quad \text{para todo } x \in B_E,$$

ou seja, $J(B_E) \subset B_{E''}$.

Vejamos que $J(B_E)$ é denso em $B_{E''}$ segundo a topologia $\sigma(E'', E')$. Com efeito, fixemos $\xi_0 \in B_{E''}$ e seja V uma $\sigma(E'', E')$-vizinhança de ξ_0 em E''. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$V = \Big\{\xi \in E'', |\xi(\varphi_i) - \xi_0(\varphi_i)| < r \quad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, m\}\Big\},$$

onde $m \in \mathbb{N}^*$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E'$ e $r > 0$.

Afirmação: $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$, ou seja, existe $x \in B_E$ tal que

$$|\langle J(x), \varphi_i\rangle - \xi_0(\varphi_i)| < r$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, ponhamos $\alpha_i = \xi_0(\varphi_i)$ e seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$. Nesse caso, dado $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_i\right| = \left|\xi_0\left(\sum_{i=1}^m \beta_i \varphi_i\right)\right| &\leq ||\xi_0||_{E''} \left\|\sum_{i=1}^m \beta_i \varphi_i\right\|_{E'} \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^m \beta_i \varphi_i\right\|_{E'}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema de Helly, a presente afirmação está provada.

Finalmente, $\xi_0 \in \overline{J(B_E)}$, ou seja, $\overline{J(B_E)} = B_{E''}$. ∎

A partir de agora, estamos em condições de apresentar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.4. (Kakutani). *Seja E um espaço normado. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E é reflexivo;*

(b) $B_E = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$ *é* $\sigma(E, E')$*-compacto.*

Demonstração. A demonstração de que as condições (a) e (b) são equivalentes está organizada ao longo de quatro afirmações.

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que E seja reflexivo, e denotemos por J_E o mergulho canônico de E em E''.

Afirmação 1: $J_E^{-1}\colon (E'', \sigma(E'', E')) \longrightarrow (E, \sigma(E, E'))$ é uma aplicação contínua.

Denotemos por $J_{E'}$ o mergulho canônico de E' em E''' e lembremos que, dado $\varphi \in E'$, temos

$$\langle J_{E'}(\varphi), \xi\rangle = \xi(\varphi)$$

para todo $\xi \in E''$. Fixemos $\xi_0 \in E''$. Como J_E é bijetora, existe um único $x_0 \in E$ tal que $J_E(x_0) = \xi_0$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}(\varphi \circ J_E^{-1})(\xi_0) &= (\varphi \circ J_E^{-1})(J_E(x_0)) = \varphi(x_0) \\ &= \langle J_E(x_0), \varphi\rangle = \xi_0(\varphi) = \langle J_{E'}(\varphi), \xi_0\rangle,\end{aligned}$$

ou seja, $\varphi \circ J_E^{-1} = J_{E'}(\varphi)$. Como $\sigma(E'', E')$ é a topologia inicial em E'', definida pela família de aplicações

$$\{J_{E'}(\varphi)\colon E'' \longrightarrow \mathbb{R}; \varphi \in E'\},$$

concluímos que

$$(\varphi \circ J_E^{-1})\colon (E'', \sigma(E'', E')) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínua. Como $\varphi \in E'$ foi tomado arbitrariamente, a Proposição 4.10(c) garante que

$$J_E^{-1}\colon (E'', \sigma(E'', E')) \longrightarrow (E, \sigma(E, E'))$$

é contínua, seguindo a Afirmação 1.

Afirmação 2: B_E é $\sigma(E, E')$-compacto.

Como E é reflexivo e J_E é uma isometria (Observação 4.5(b)), é fácil ver que $J_E(B_E) = B_{E''}$. Assim, pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, concluímos que $J_E(B_E)$ é $\sigma(E'', E')$-compacto. Portanto, pela Afirmação 1,

$$J_E^{-1}(J_E(B_E)) = B_E$$

é $\sigma(E, E')$-compacto, seguindo o desejado.

(b) $\Rightarrow$ (a): Admitamos que B_E seja $\sigma(E, E')$-compacta.

Afirmação 3: $J_E(B_E) = B_{E''}$.

Como $J_E\colon (E,\mathcal{T}_E) \longrightarrow (E'',\mathcal{T}_{E''})$ é contínua, a Proposição 4.14 garante que

$$J_E\colon (E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (E'',\sigma(E'',E'''))$$

também é. Dessa forma, como $\sigma(E'',E')$ é menos fina do que $\sigma(E'',E''')$, sabemos que

$$J_E\colon (E,\sigma(E,E')) \longrightarrow (E'',\sigma(E'',E'))$$

é contínua. Por hipótese, B_E é $\sigma(E,E')$-compacta, donde deduzimos que

$$J_E(B_E) \quad \text{é} \quad \sigma(E'',E')\text{-compacto.}$$

Sendo $(E'',\sigma(E'',E'))$ um espaço topológico de Hausdorff (Proposição 4.16), segue que $J(B_E)$ é $\sigma(E'',E')$-fechado (Proposição 4.9(b)). Portanto,

$$J(B_E) = \overline{J(B_E)}^{\sigma(E'',E')} = B''_E,$$

onde a segunda igualdade decorre do Lema de Goldstine. Isso conclui a demonstração da Afirmação 3.

Afirmação 4: A aplicação $J_E\colon E \to E''$ é sobrejetora e, portanto, E é reflexivo.

De fato, seja $\xi \in E''$ tal que $\xi \neq 0$. Como $\frac{\xi}{||\xi||_{E''}} \in B_{E''}$, utilizamos a Afirmação 3 para obter $x_0 \in E$ tal que $J_E(x_0) = \frac{\xi}{||\xi||_{E''}}$, o que fornece

$$J_E(||\xi||_{E''}x_0) = ||\xi||_{E''}J_E(x_0) = ||\xi||_{E''}\frac{\xi}{||\xi||_{E''}} = \xi.$$

Assim, J_E é sobrejetora, seguindo o desejado. ■

4.5 Exercícios

(4.1): Prove as afirmações do Exemplo 4.2.

(4.2): Prove a Proposição 4.6.

(4.3): Prove a Proposição 4.8.

(4.4): Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Mostre que

(a) $X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A)$;
(b) $X \setminus \text{int}\, A = \overline{(X \setminus A)}$.

(4.5): Prove a Proposição 4.10.

(4.6): Sejam X um espaço topológico não vazio e A um subconjunto de X. Para cada $x \in X$, suponha que $\mathcal{B}_x$ seja uma base de vizinhanças de x. Mostre que:

(a) A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$ tal que $\mathcal{V} \subset A$;

(b) A é fechado se, e somente se, para cada $x \in A$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$ tal que $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$.

(c) $\overline{A} = \{x \in X; \mathcal{V} \cap A \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{B}_x\}$;

(d) int $A = \{x \in X;$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}_x$ de modo que $\mathcal{V} \subset A\}$.

(4.7): Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e considere $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{T}$;

(b) Cada subconjunto $\mathcal{T}$-aberto U de X se exprime como uma união de membros de $\mathcal{B}$.

(4.8): Sejam X e Y dois espaços topológicos, com X compacto. Suponha que $f\colon X \to Y$ seja uma função contínua. Mostre que a imagem de f é um subconjunto compacto de Y.

(4.9): Sejam X um espaço topológico compacto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existem $a, b \in X$ tais que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

para todo $x \in X$.

(4.10): Seja $\{X_i; i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e seja $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. Mostre que, para cada $i \in I$, X_i é homeomorfo a um subespaço topológico de X.

(4.11): Seja E um espaço normado. Mostre que E tem dimensão infinita se, e somente se, E' tem dimensão infinita.

(4.12): Seja E um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge fracamente para $x \in E$ se, para cada $\sigma(E, E')$-vizinhança $\mathcal{V}$ de x em E, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$x_n \in \mathcal{V}$$

para todo $n > n_0$. Nesse caso, escrevemos $x_n \stackrel{\omega}{\longrightarrow} x$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $x_n \stackrel{\omega}{\longrightarrow} x$;

(b) $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{R}$ para todo $\varphi \in E'$.

(4.13): Seja E um espaço normado.

(a) Defina a noção de convergência de sequências em E' segundo a topologia $\sigma(E', E)$.

(b) Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em E'. Mostre que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para $\varphi \in E'$ com relação à topologia $\sigma(E', E)$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ em $\mathbb{R}$ para todo $x \in E$.

(4.14): Seja E um espaço normado separável, isto é, existe um subconjunto enumerável e denso em E. Mostre que toda sequência limitada em E' possui uma subsequência $\sigma(E', E)$-convergente.

(Sugestão: veja a demonstração do Teorema 3.1).

Referências Bibliográficas

[1] BERNARDES, N. e FERNANDEZ C., *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, 3ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[2] BOURBAKI, N., *Topologia Générale*, Chapitres I et II, Quatrième Édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1142. Hermann, 1965.

[3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, 1ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[4] CONWAY, J., *A Course in Functional Analysis*, 2^{nd} edition. Springer-Verlag, 1990.

[5] DIESTEL, J., Sequences and Series in banach Spaces, Graduate texts in Mathematics; 92. Springer Verlag. New York, Inc. 1984.

[6] HEFEZ, A. e FERNANDEZ, C., *Introdução à Álgebra Linear*, 1ª edição. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] MUNKRES, J., *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., 1975.

[8] POMBO, D., *Introdução à Análise Funcional*, Niterói, EdUFF, 1999.

[9] ZEIDLER, E., *Applied Functional analysis: Main principles and their applications*, v. 109, Springer-Verlag, 1995.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-85-8337-165-6