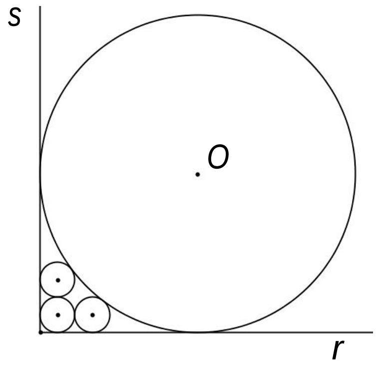
A área de um triângulo ABC será denotada por (ABC).

Questão 1. *(pontuação: 2)*

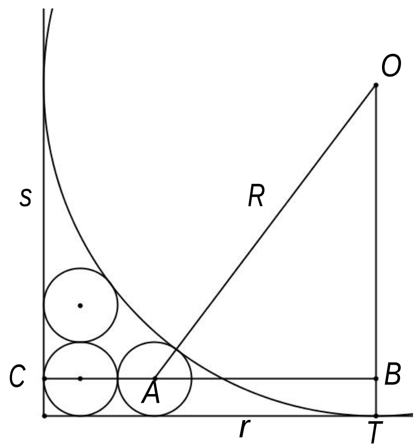
A figura abaixo mostra as semirretas perpendiculares r e s, três circunferências pequenas cada uma com raio igual a 1 e uma circunferência grande de centro O. Uma das circunferências pequenas é tangente a r e a s, cada uma das outras duas é tangente a ela e a uma das semirretas, e a circunferência grande é tangente às semirretas e a duas das circunferências pequenas.



Calcule o raio da circunferência grande.

Uma solução:

Na figura a seguir, A é o centro da circunferência pequena que tangencia r e a circunferência grande, OT é perpendicular a r e a reta BC passa por A e é paralela a r.



Seja R o raio da circunferência grande. No triângulo retângulo ABO temos $OA = R+1$, $OB = R-1$ e $AB = R-3$. O teorema de Pitágoras conduz à equação $R^2 - 10R + 9 = 0$ cujas raízes são 1 e 9.

Devido às características do problema, a menor raiz é o raio da circunferência pequena tangente às duas semirretas e a maior raiz é o raio da circunferência grande.

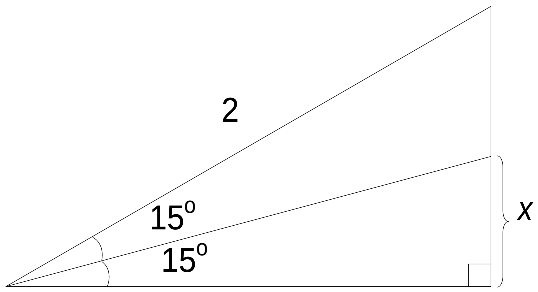
O raio da circunferência grande é igual a 9.

Questão 2. *(pontuação: 2)*

No triângulo ABC a bissetriz do ângulo BAC encontra o lado BC em D.

a) Prove que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (teorema da bissetriz interna).

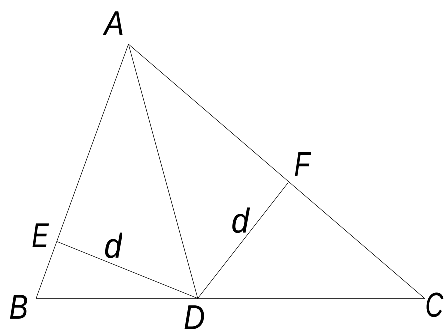
b) Use o teorema acima e a figura abaixo para calcular a tangente de 15^o.



Uma solução:

a) Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim,

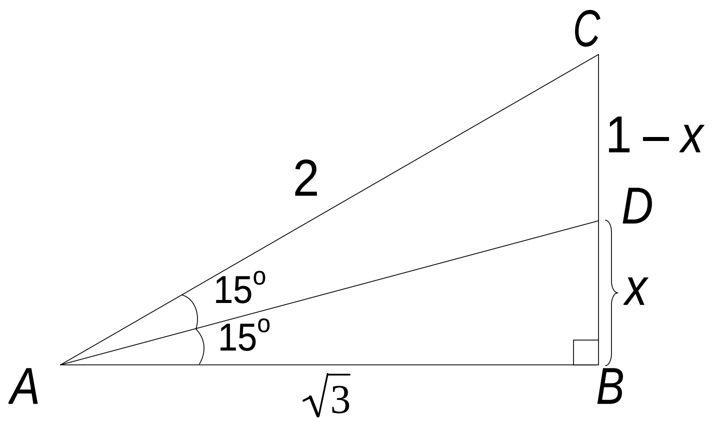
$$\frac{(ADB)}{(ADC)} = \frac{DB}{DC}$$



Sejam DE e DF perpendiculares a AB e AC como na figura anterior. Como todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados desse ângulo, então $DE = DF = d$. Assim,

$$\frac{(ADB)}{(ADC)} = \frac{(1/2).AB.d}{(1/2).AC.d} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{portanto} \quad \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{c.q.d.}$$

b) Como o triângulo ABC da figura é retângulo em B e tem ângulo $B\hat{A}C = 30^o$ e hipotenusa $AC = 2$, então $BC = 1$ e $AB = \sqrt{3}$.



O teorema da bissetriz interna aplicado a esse triângulo fornece: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, ou seja, $\frac{x}{1-x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Aplicando propriedades das proporções podemos escrever:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1-x}{2} = \frac{x + (1-x)}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Porém, observando o triângulo ABD, vemos que $\frac{x}{\sqrt{3}}$ é a tangente do ângulo de 15^o. Assim,

$$\tan 15^o = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Questão 3. *(pontuação: 3)*

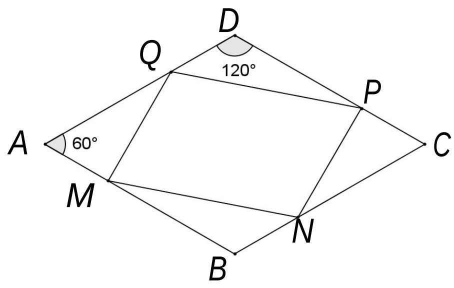
O losango $ABCD$ tem lado 3 e ângulo $\hat{A} = 60^o$. Os pontos M, N, P e Q pertencem aos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente e são tais que $AM = BN = CP = DQ = 1$.

a) Justifique, de forma breve, porque o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

b) Calcule a área do quadrilátero $MNPQ$.

c) Calcule a distância entre os pontos M e P.

Uma solução:



a) Os triângulos AMQ e CPN são congruentes (caso LAL). Daí, $MQ = NP$. Os triângulos BNM e DQP são congruentes (caso LAL); daí, $MN = QP$. Assim, o quadrilátero $MNPQ$ possui dois pares de lados opostos congruentes. Logo, é um paralelogramo.

b) $(AMQ) = \frac{1}{2}.AM.AQ.\text{sen}\,60^o = \frac{1}{2}.1.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

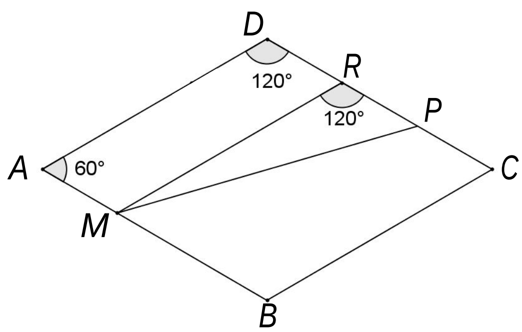
Como os ângulos de 60^o e 120^o possuem mesmo seno, concluímos que os triângulos AMQ, BNM, CPN e DQP possuem todos a mesma área, igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A área do losango é igual a $AB.AD.\text{sen}\,60^o = 3.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

A área do paralelogramo é

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

c) Seja R o ponto médio de PD. Como AM é paralelo a DR e ambos têm comprimento 1 então $AMRD$ é um paralelogramo e $MR = AD = 3$. Além disso, $RP = 1$ e $M\hat{R}P = 120^o$.



No triângulo MRP a lei dos cossenos fornece:

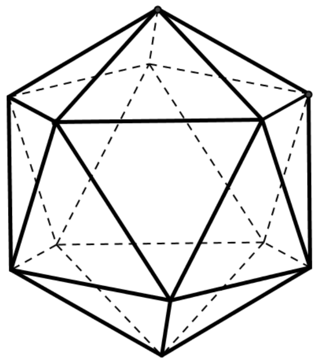
$$MP^2 = MR^2 + RP^2 - 2.MR.RP.\cos 120^o = 3^2 + 1^2 - 2.3.1.(-\frac{1}{2}) = 13 \implies MP = \sqrt{13}.$$

Questão 4. *(pontuação: 1)*

O icosaedro regular é o poliedro formado por 20 faces triangulares equiláteras. Determine quantas diagonais do icosaedro **não** passam pelo seu centro.

Uma solução:

O icosaedro possui 20 faces triangulares. Como cada aresta é lado de exatamente duas faces, o número de arestas do icosaedro é $A = \frac{20.3}{2} = 30$.



O número de vértices pode ser calculado pela relação de Euler $V - A + F = 2$, de onde $V = 12$.

Cada segmento que une dois vértices do icosaedro ou é aresta ou é diagonal. Assim, denotando por C_V^2 o número de escolhas de subconjuntos com dois elementos do conjunto de todos os vértices do icosaedro, o número de diagonais do icosaedro é

$$D = C_V^2 - A = C_{12}^2 - A = \frac{12!}{10!2!} - 30 = 66 - 30 = 36$$

O icosaedro possui 6 pares de vértices diametralmente opostos e cada diagonal que une dois vértices diametralmente opostos passa pelo centro do icosaedro. Essas são as únicas diagonais que passam pelo centro. Então, o número de diagonais que não passam pelo centro é $36 - 6 = 30$.

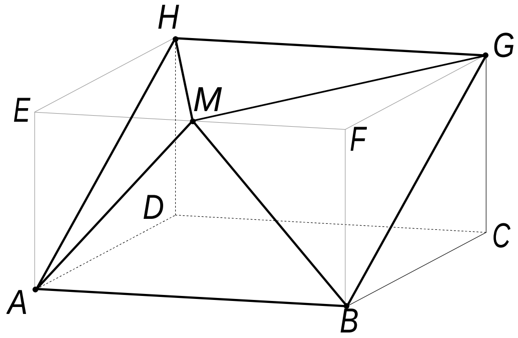
Questão 5. *(pontuação: 2)*

Considere o paralelepípedo retângulo de bases $ABCD$ e $EFGH$ e com arestas laterais AE, BF, CG e DH. As medidas são $AB = 6$, $AD = AE = 4$ e M é o ponto médio da aresta EF. São feitas as seções pelos planos MHA e MBG. Retirando-se os tetraedros $EMHA$ e $FMBG$ resulta o poliedro **P**.

a) Faça um desenho do poliedro **P** e calcule seu volume.

b) Determine o cosseno do ângulo entre as retas AH e MG.

Uma solução:



O desenho de **P** está acima.

Se pensarmos o tetraedro $EMHA$ com base EMH e altura EA, podemos calcular seu volume do seguinte modo:

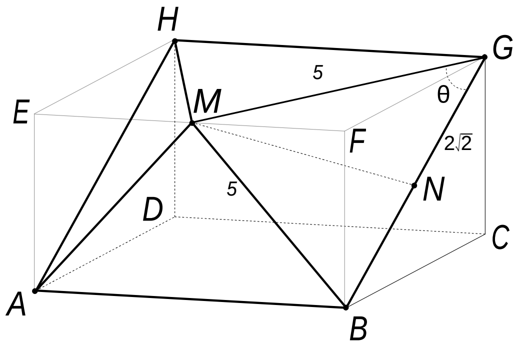
$$v = \frac{1}{3}.\frac{EM.EH}{2}.EA = \frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}.4 = 8$$

O tetraedro $FMBG$ tem também volume $v = 8$ porque é congruente com $EMHA$.

O volume de **P** é o volume do paralelepípedo subtraído dos volumes dos tetraedros, ou seja,

$$V = 6.4.4 - 2.8 = 96 - 16 = 80$$

b) O ângulo entre as retas AH e MG é o ângulo entre BG e MG, ou seja, o ângulo $\theta = B\hat{G}M$. Como $FM = 3$ e $FB = FG = 4$ temos, pelo teorema de Pitágoras, $BG = 4\sqrt{2}$ e $MB = MG = 5$.



O triângulo MBG é isósceles. Então, assinalando o ponto N médio do lado BG, temos que MN é perpendicular a BG. Assim, no triângulo MNG,

$$\cos\theta = \frac{NG}{MG} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$