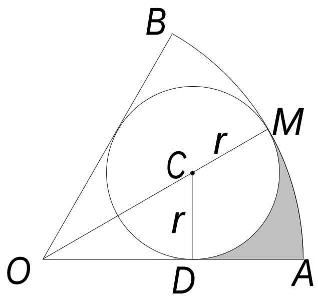
Questão 1. *(pontuação: 2)*

No setor AOB de centro O, raio $OA = 3$ e ângulo $AOB = 60^o$ está inscrita uma circunferência como mostra a figura.

a) Calcule o raio dessa circunferência.

b) Calcule a área da região sombreada.

Uma solução



a) Seja M o ponto médio do arco AB. O raio OM passa pelo centro C da circunferência inscrita no setor. Seja CD perpendicular a OA como mostra a figura acima e seja $r = CD = DM$ o raio da circunferência. Como $AOM = 30^o$ então, no triângulo ODC tem-se $OC = 2r$ e, portanto, $OM = 3r = 3$, ou seja, $r = 1$.

b) A área sombreada (S) é igual à área do setor AOM subtraída da área do triângulo ODC e da área do setor DCM do círculo de centro C.

A área do setor AOM é $\frac{\pi 3^2}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

Como $CD = 1$ e $OC = 2$, então $OD = \sqrt{3}$ e a área do triângulo ODC é $\frac{OD.OC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado, o ângulo DCM mede 120^o e, portanto, o setor DCM do círculo de centro C tem área igual à terça parte da área do círculo de centro C, ou seja, $\frac{\pi}{3}$. Assim, a área sombreada é $S = \frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$, ou seja, $S = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12}$.

Questão 2. *(pontuação: 2)*

O Teorema das Três Perpendiculares tem o seguinte enunciado:

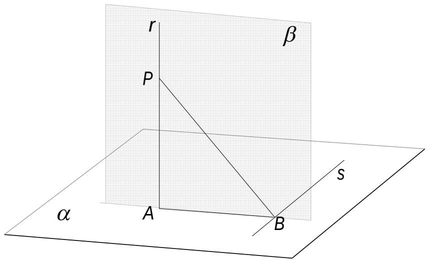
"A reta r é perpendicular ao plano α no ponto A. A reta s está contida em α e não passa por A. O ponto B da reta s é tal que AB é perpendicular a s. Então, se P é qualquer ponto de r, PB é perpendicular a s."

a) Faça uma figura que descreva o enunciado do Teorema.

b) Demonstre o Teorema.

Uma solução

a)



b) Como r é perpendicular a α então r é ortogonal a qualquer reta de α , portanto r é ortogonal a s. Porém, AB é perpendicular a s. Assim, s é ortogonal a duas retas concorrentes: AB e r. Logo s é perpendicular ao plano determinado por AB e r, que chamaremos de plano β. Como P e B são pontos de β então s é perpendicular a PB, como queríamos demonstrar.

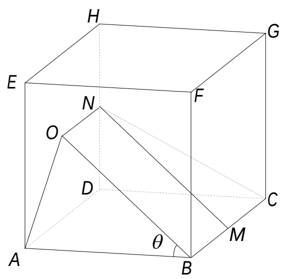
Questão 3. *(pontuação: 2)*

Em um cubo, $ABCD$ e $EFGH$ são faces opostas e AE, BF, CG e DH são arestas paralelas. Sejam M e N os pontos médios das arestas BC e DH, respectivamente.

a) Se a aresta do cubo mede 2, calcule a distância entre os pontos M e N.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas AB e NM.

Uma solução



a) Observe a figura acima. No triângulo CDN, retângulo em D, $CD = 2$ e $DN = 1$. Consequentemente, $NC = \sqrt{5}$. Como a aresta BC é perpendicular à face $DCGH$, o triângulo MCN é retângulo em C. Daí, $MN^2 = NC^2 + MC^2 = 5 + 1 = 6$, ou seja $MN = \sqrt{6}$.

b) Façamos uma translação do segmento MN de forma que o ponto M concida com o ponto B. Nessa translação, o ponto N coincidirá com o ponto O, centro da face $ADHE$. O ângulo entre as retas reversas AB e NM é o ângulo entre as concorrentes AB e OB, ou seja, o ângulo $ABO = \theta$.

No triângulo ABO, temos $AB = 2$, $OB = NM = \sqrt{6}$ e AO é a metade da diagonal do quadrado $ADHE$, ou seja, $AO = \sqrt{2}$.

A lei dos cossenos no triângulo ABO fornece:

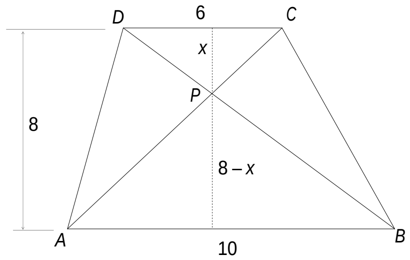
$$(\sqrt{2})^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2.2.\sqrt{6}.\cos\theta$$

Daí, encontramos $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Isto também pode ser obtido notando-se que o triângulo ABO é retângulo em A e usando-se diretamente a definição de cosseno.

Questão 4. *(pontuação: 2)*

O trapézio $ABCD$ tem bases AB e CD. A altura do trapézio mede 8. As bases medem $AB = 10$ e $CD = 6$. As diagonais AC e BD do trapézio dividiram o trapézio em quatro triângulos. Calcule as áreas dos quatro triângulos em que o trapézio ficou dividido.

Uma solução



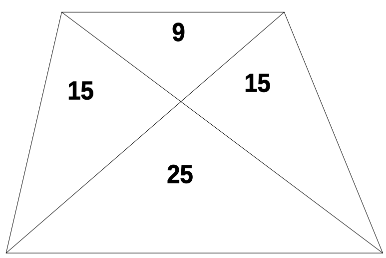
Notação: (XYZ) representa a área do triângulo de vértices X, Y e Z.

Seja P o ponto de interseção das diagonais e seja x a distância de P à base menor do trapézio. Como os triângulos PAB e PCD são semelhantes temos $\frac{6}{10} = \frac{x}{8-x}$, o que dá $x = 3$. Assim, $(PCD) = \frac{6.3}{2} = 9$ e $(ABC) = \frac{10.5}{2} = 25$.

$$(DAP) = (DAB) - (PAB) = \frac{10.8}{2} - 25 = 40 - 25 = 15$$

$$(CPB) = (CAB) - (PAB) = 40 - 25 = 15$$

As áreas dos quatro triângulos estão na figura abaixo:



Questão 5. *(pontuação: 2)*

No cubo $ABCDA'B'C'D'$ de aresta a, os pontos M, N, P e Q são médios das arestas $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ e $A'D'$, respectivamente. Foram feitas as seções pelos planos AMQ, BNM, CPN e DPQ. Retirando-se os quatro tetraedros formados, resultou o poliedro P ilustrado na Figura 1. O poliedro P possui duas bases paralelas e faces laterais triangulares. Ele é um *prismatóide*.

a) Calcule o volume do poliedro P.

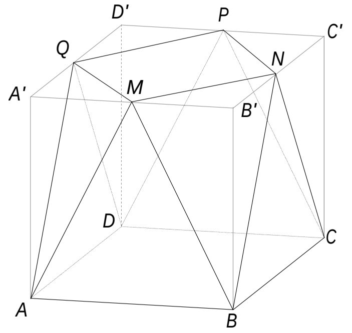


Figura 1

Observe agora a Figura 2; pelo ponto médio X da aresta AA' foi traçado um plano paralelo à face $ABCD$ que determinou em P uma seção octogonal. A forma dessa seção equidistante das bases do poliedro P, que é chamada se seção média, está ilustrada na Figura 3.

No poliedro P, representaremos a área da base $ABCD$ por S, a área da base $MNPQ$ por s, a área da seção média por S_m e a distância entre as bases por h.

b) Calcule a área da seção média e calcule o volume de P usando a fórmula do volume dos prismatóides: $V = \frac{h}{6}(S + s + 4S_m)$.

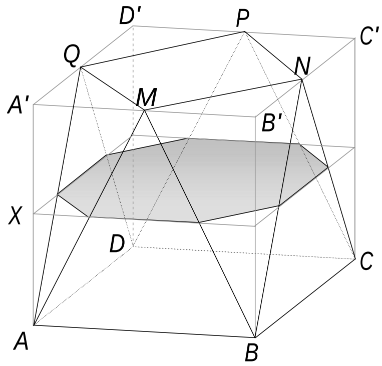


Figura 2

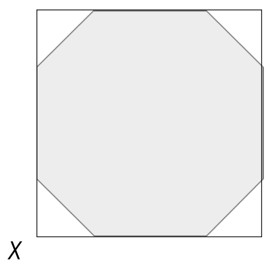
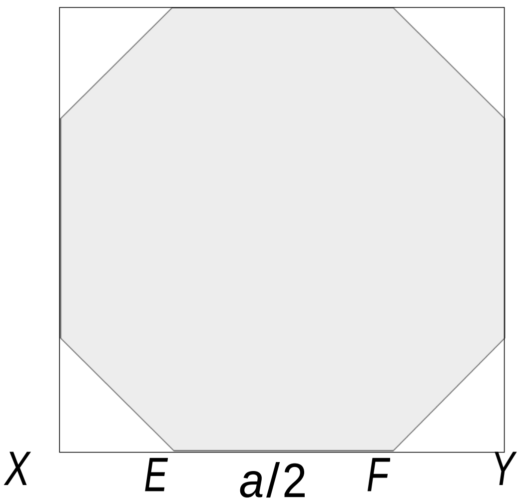


Figura 3

Uma solução

a) Um dos tetraedros retirados é $AA'MQ$. Sua base é o triângulo retângulo $A'MQ$ de catetos $A'M = A'Q = \frac{a}{2}$ e altura $AA' = a$. O volume desse tetraedro é $\frac{1}{3}.\frac{(a/2)(a/2)}{2}.a = \frac{a^3}{24}$. Como quatro desses tetraedros foram retirados, o volume do poliedro **P** é $V = a^3 - 4.\frac{a^3}{24} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$.

b) A seção média é obtida de um quadrado $XYZW$, congruente com $ABCD$ retirando-se quatro triângulos retângulos isósceles congruentes. O plano da seção média corta a aresta BB' do cubo em Y e corta as arestas MA e MB do poliedro **P** em E e F, respectivamente.



Temos $EF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ (já que a reta XY une pontos médios de lados do triângulo AMB) e, consequentemente, $XE = FY = \frac{a}{4}$. Assim, cada um dos pequenos triângulos retângulos tem área $\frac{1}{2}.\frac{a}{4}.\frac{a}{4} = \frac{a^2}{32}$ e a área da seção média é $S_m = a^2 - 4.\frac{a^2}{32} = \frac{7a^2}{8}$.

Aplicando a fórmula do volume do prismatóide temos:

$$V = \frac{a}{6}(a^2 + \frac{a^2}{2} + 4.\frac{7a^2}{8}) = \frac{a}{6}(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{7a^2}{2}) = \frac{a}{6}.\frac{10a^2}{2} = \frac{5a^3}{6}$$

o que coincide com o resultado do item a).