Questão 1.

(a) Prove que, para quaisquer $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\,.$$

(b) Excetuando o caso trivial em que $a = b = c = 0$, mostre que vale a igualdade se, e somente se, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $x = ma$, $y = mb$ e $z = mc$.

UMA SOLUÇÃO

(a) Efetuando as operações indicadas, vemos que

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2\,.$$

Como todo quadrado em $\mathbb{R}$ é ≥ 0, segue-se a desigualdade proposta.

(b) Quanto à igualdade, ela é evidente no caso em que $x = ma$, $y = mb$ e $z = mc$, para algum $m \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se ela vale então, supondo, por exemplo, $a \neq 0$, pomos $m = \frac{x}{a}$. Sabendo (pelo visto acima) que $ay - bx = az - cx = bz - cy =$, de $x = ma$ resultam $0 = ay - bx = ay - mab$ e daí (como $a \neq 0$) tiramos $y = mb$. Analogamente, obtemos $z = mc$.

Questão 2.

(a) Usando o gráfico com o qual se define geometricamente o logaritmo natural ln, mostre que $\ln(1+x) < x$ para todo $x > 0$, e daí $\ln x < x$.

(b) Tomando $\sqrt{x}$ em vez de x nesta última desigualdade, prove que para todo x suficientemente grande o quociente $\frac{\ln x}{x}$ pode tornar-se tão pequeno quanto desejemos.

(c) Prove ainda que essa conclusão é válida para logaritmos em qualquer base > 1.

UMA SOLUÇÃO

(a) $\ln(1+x)$ é a área de uma faixa de hipérbole, contida no retângulo de altura 1 e base igual ao intervalo $[1, 1+x]$ do eixo das abscissas. Daí $\ln(1+x) < x$, pois x é a área desse retângulo. Como $\ln x$ é uma função crescente de x, tem-se $\ln x < \ln(1+x) < x$.

(b) Colocando-se $\sqrt{x}$ no lugar de x, tem-se $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$, ou seja, $\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$. Dividindo ambos os membros por x, vem

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}\,.$$

Se desejarmos ter $\frac{\ln x}{x} < \epsilon$, basta tomar $\frac{2}{\sqrt{x}} < \epsilon$, isto é, $x > \frac{4}{\epsilon^2}$.

(c) Finalmente, se $\log x$ significar o logaritmo de x na base a, então tomando $c = \log e$ teremos $\log x = c \ln x$, e daí

$$\frac{\log x}{x} = c\,\frac{\ln x}{x}\,,$$

ou seja, os dois quocientes diferem apenas por uma constante. Então

$$\frac{\log x}{x} \leq \frac{2c}{\sqrt{x}}\,,$$

que é menor do que ϵ se $x > \frac{4c^2}{\epsilon^2}$.

Questão 3.

Uma moeda, com probabilidade $0,6$ de dar cara, é lançada 3 vezes.

(a) Qual é a probabilidade de que sejam observadas duas caras e uma coroa, em qualquer ordem?

(b) Dado que foram observadas duas caras e uma coroa, qual é a probabilidade de que tenha dado coroa no primeiro lançamento?

UMA SOLUÇÃO

(a) Para saírem duas caras e uma coroa, só há as 3 possibilidades: coroa-cara-cara, cara-coroa-cara, e cara-cara-coroa. Cada uma delas tem probabilidade $0,6 \times 0,6 \times (1 - 0,6) = 0,36 \times 0,4 = 0,144$. Logo a probabilidade de saírem duas caras e uma coroa é de $3 \times 0,144 = 0,432$.

(b) Dado que foram observadas duas caras e uma coroa, ocorre apenas uma das 3 possibilidades acima, todas equiprováveis. E só uma delas começa com coroa. Então a probabilidade de ter dado coroa no primeiro lançamento é de $\frac{1}{3}$.

Questão 4.

Considere a sequência a_n definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_2 = 1 + 2 \\ &a_3 = 2 + 3 + 4 \\ &a_4 = 4 + 5 + 6 + 7 \\ &\dots \end{aligned}$$

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e qual é o maior desses inteiros? Calcule a_{10}.

(b) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

UMA SOLUÇÃO

(a) Uma maneira de fazer é ir até a décima linha, seguindo a regra sugerida, em que o último termo de uma linha é o primeiro termo da seguinte.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 + 2 \\ a_3 &= 2 + 3 + 4 \\ a_4 &= 4 + 5 + 6 + 7 \\ a_5 &= 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \\ a_6 &= 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 \\ a_7 &= 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 \\ a_8 &= 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 \\ a_9 &= 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 \\ a_{10} &= 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 \end{aligned}$$

Então a_{10} é a soma de uma P.A. com primeiro termo 37, último termo 46, e razão 1. Portanto

$$a_{10} = \frac{37 + 46}{2} \cdot 10 = 415\,.$$

(b) Primeiro vejamos qual é a lei que rege o primeiro termo de a_n. Chamemos de b_n esse primeiro termo. Temos $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 4$, $b_5 = 7$ etc. Daí $b_2 - b_1 = 0$, $b_3 - b_2 = 1$, $b_4 - b_3 = 2$, $b_5 - b_4 = 3$, isto é, $b_n - b_{n-1} = n - 2$.

Ou seja, $b_n - b_{n-1}$, $n \geq 2$, é uma P.A. de razão 1 e primeiro termo igual a zero. Então b_n é igual a 1 mais a soma dessa P.A. até o termo $n-2$:

$$b_n = 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \, .$$

O último termo de a_n é igual a $b_n + n - 1$. Então, sendo a_n a soma de uma P.A. de n termos com o primeiro igual a b_n e o último igual a $b_n + n - 1$, resulta que

$$a_n = n \cdot \frac{b_n + (b_n + n - 1)}{2} \, .$$

Colocando essa expressão explicitamente em função de n, temos

$$\begin{aligned} a_n &= n \cdot \left[b_n + \frac{n-1}{2} \right] \\ &= n \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2+1) \right] \\ &= n \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(n-1)^2 \right] \, , \end{aligned}$$

que é um polinômio cúbico em n.

(Nessas horas, vale a pena conferir se a fórmula bate com o que esperamos, examinando os primeiros casos. Confira!)

Questão 5.

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 6 e AD um segmento perpendicular ao plano desse triângulo de comprimento 8.

(a) Localize o ponto P do espaço que é equidistante dos quatro pontos A, B, C e D e calcule a distância comum $R = PA = PB = PC = PD$.

(b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas AC e BD.

UMA SOLUÇÃO

(a) O ponto P deve estar no plano paralelo a ABC a 4 unidades de distância de A, pois esse é o plano dos pontos equidistantes de A e D. Ao mesmo tempo, ele deve estar na reta perpendicular ao plano determinado por ABC que passa pelo centro H de ABC, pois essa reta é o conjunto de pontos que equidistam de A, B e C.

A distância de H a qualquer um dos vértices do triângulo é igual a $2\sqrt{3}$ (o que pode ser obtido de vários modos). Como AHP é triângulo-retângulo, de catetos $AH = 2\sqrt{3}$ e $HP = 4$, e hipotenusa $AP = R$, então $R^2 = 12 + 16 = 28$, logo $R = 2\sqrt{7}$.

(b) Chame de Q o ponto do plano de ABC tal que $AQBC$ é paralelogramo. O ângulo procurado é o ângulo $\alpha = Q\widehat{B}D$. Todos os lados do triângulo QBD são conhecidos: (i) $BD = 10$, porque BAD é retângulo com catetos iguais a 6 (o lado do triângulo ABC) e 8 (a altura do ponto D); (ii) $BQ = AC = 6$; (iii) $QD = 10$ (pela mesma razão de (i)). Então, pela Lei dos Cossenos,

$$10^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos\alpha\,,$$

de onde sai $\cos\alpha = 0,3$.

Questão 6.

No triângulo ABC assinale o ponto P do lado AC e o ponto Q do lado BC de forma que $AP = \frac{1}{3}AC$ e $BQ = \frac{2}{3}BC$. Seja J o ponto de interseção de AQ e BP.

(a) Mostre que $\frac{JA}{JQ} = \frac{3}{4}$. *Sugestão:* Trace QL paralelo a BP e use semelhança de triângulos.

(b) Calcule a razão $\frac{JB}{JP}$.

(c) Decida se a área do triângulo BPQ é maior do que, menor do que ou igual à metade da área do triângulo ABC.

UMA SOLUÇÃO

(a) Para facilitar, sejam $BC = 3a$ e $AC = 3b$. Traçamos QL paralela a BP. Temos $AP = b$ e $PC = 2b$.

Da semelhança dos triângulos BPC e QLC vem

$$\frac{LC}{PC} = \frac{QC}{BC} = \frac{1}{3}\,.$$

Logo,

$$LC = \frac{2b}{3}$$

e

$$PL = \frac{4b}{3}\,.$$

Assim,

$$\frac{JA}{JQ} = \frac{PA}{PL} = \frac{b}{4b/3} = \frac{3}{4}\,.$$

(b) Seja $JP = x$. Da semelhança entre AJP e AQL vem

$$\frac{JP}{QL} = \frac{AJ}{AQ} = \frac{3}{7}\,.$$

Daí,

$$QL = \frac{7x}{3}\,.$$

Da semelhança dos triângulos BPC e QLC temos

$$\frac{BP}{QL} = \frac{BC}{QC} = \frac{3}{1}\,.$$

Daí, $BP = 7x$ e $BJ = 6x$. Assim,

$$\frac{JB}{JP} = 6\,.$$

(c) Seja $3h$ a distância de A à reta BC. A área do triângulo ABC é

$$S = \frac{3a \cdot 3h}{2} = \frac{9ah}{2}\,.$$

O triângulo BPQ tem base $BQ = 2a$ e altura igual à distância de P à reta BC, que é igual a $2h$. A área do triângulo BPQ é

$$S_1 = \frac{2a \cdot 2h}{2} = \frac{4ah}{2}\,.$$

Assim, $S_1 = \frac{4}{9}S < \frac{1}{2}S$. Em palavras, a área do triângulo BPQ é menor do que a metade da área do triângulo ABC.

Questão 7.

(a) Mostre que nenhum número natural da forma $4n+3$ pode ser escrito como o quadrado ou a soma de dois quadrados de números naturais.

(b) Mostre que nenhum número a da forma $11\ldots1$ (n dígitos iguais a 1, $n>1$) é o quadrado ou a soma de dois quadrados de números naturais.

UMA SOLUÇÃO

(a) Suponhamos por absurdo que existam $x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $z^2 = 4n+3$ ou que $x^2+y^2 = 4n+3$. Teríamos então que $z^2 \equiv 3 \bmod 4$ ou que $x^2+y^2 \equiv 3 \bmod 4$.

Sendo, para todo $a \in \mathbb{N}$, $a \equiv 0 \bmod 4$, $a \equiv 1 \bmod 4$, $a \equiv 2 \bmod 4$, ou $a \equiv 3 \bmod 4$, segue que

$$a^2 \equiv 0 \bmod 4 \quad \text{ou} \quad a^2 \equiv 1 \bmod 4.$$

Portanto, $z^2 \not\equiv 3 \bmod 4$ e $x^2+y^2 \not\equiv 3 \bmod 4$, o que é uma contradição.

(b) Para $a = 11$, por inspeção, o resultado é óbvio. Agora suponhamos $n \geq 2$ e ponhamos $a = 100b+11$, onde $b \geq 0$. Portanto, temos

$$a = 25 \times 4b + 4 \times 2 + 3 = 4(25b+2)+3\,,$$

o que nos diz que a é da forma $4n+3$, logo não é nem um quadrado nem uma soma de dois quadrados de números naturais.

Questão 8.

Considere o sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \bmod n_1 \\ x \equiv c_2 \bmod n_2 \end{cases}$$

Denotamos como de costume o mdc e o mmc de n_1 e n_2 por (n_1, n_2) e $[n_1, n_2]$, respectivamente.

(a) Mostre que a e a' são soluções do sistema se, e somente se, $a \equiv a' \bmod [n_1, n_2]$. *O enunciado, da forma como está, é incorreto. O certo seria:* Mostre que, se a é solução, então a' é solução se, e somente se, $a \equiv a' \bmod [n_1, n_2]$.

(b) Mostre que o sistema admite solução se, e somente se, $c_2 \equiv c_1 \bmod (n_1, n_2)$.

(c) Dadas as progressões aritméticas (a_n) de primeiro termo 5 e razão 14 e (b_n) de primeiro termo 12 e razão 21, mostre que elas possuem termos comuns (isto é, existem r e s tais que $a_r = b_s$). Mostre que esses termos comuns formam uma PA e determine seu primeiro termo e sua razão.

UMA SOLUÇÃO

(a) *Obs.* Se o sistema admite uma solução a, então todo número da forma $a + kn_1n_2$ é também uma solução. Em outras palavras, se $a' \equiv a \bmod n_1n_2$, então a' é uma solução. Mas isso não dá todas as soluções, como o próprio enunciado deixa evidente, a menos que n_1 e n_2 sejam primos entre si.

Suponha que a seja uma solução. Se a' é outra solução do sistema, subtraindo uma da outra obtemos que $a' \equiv a \bmod n_1$ e $a' \equiv a \bmod n_2$. Por outro lado, essas duas condições juntas implicam que a' é solução do sistema. Ou seja: a' é solução do sistema se, e somente se, $a' \equiv a \bmod n_1$ e $a' \equiv a \bmod n_2$. Mas dizer que $a' \equiv a \bmod n_1$ e $a' \equiv a \bmod n_2$ equivale a afirmar que $a' \equiv a \bmod [n_1, n_2]$.

(b) Pelo que acabamos de mostrar, o sistema admite uma solução se, e somente se, ele admite uma solução $a > \max\{c_1, c_2\}$. Portanto, o sistema admite solução se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $a - c_1 = xn_1$ e $a - c_2 = yn_2$. Sem perda de generalidade, podemos supor $c_2 \geq c_1$. Assim, a existência de soluções do sistema é equivalente à existência de soluções da equação diofantina $xn_1 - yn_2 = c_2 - c_1$. Por sua vez, essa equação diofantina possui solução se, e somente se, (n_1, n_2) divide $c_2 - c_1$, o que equivale a $c_2 \equiv c_1 \bmod (n_1, n_2)$.

(c) Os termos comuns a ambas as PAs são soluções do sistema

$$\begin{cases} x \equiv 5 \bmod 14 \\ x \equiv 12 \bmod 21, \end{cases}$$

o qual possui soluções dado que $12 \equiv 5 \bmod (14, 21)$, por (b).

Listemos os primeiros termos de ambas as PAs:

$a_n :\ 5,\ 19,\ 33, \ldots$

$b_n :\ 12,\ 33,\ 54, \ldots$

Assim, 33 é o menor termo comum a ambas as PAs e pela parte (a) temos que os termos comuns a ambas PAs são dados por $c_n = 33 + n[14, 21] = 33 + 42n$, os quais formam uma PA de primeiro termo 33 e razão 42.