Atenção: em cada questão, é sempre permitido usar a resposta de um item anterior, mesmo que esse item anterior não tenha sido resolvido.

Questão 1.

(a) Prove que, para quaisquer $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\,.$$

(b) Excetuando o caso trivial em que $a = b = c = 0$, mostre que vale a igualdade se, e somente se, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $x = ma$, $y = mb$ e $z = mc$.

Questão 2.

(a) Usando o gráfico com o qual se define geometricamente o logaritmo natural ln, mostre que $\ln(1 + x) < x$ para todo $x > 0$, e daí $\ln x < x$.

(b) Tomando $\sqrt{x}$ em vez de x nesta última desigualdade, prove que para todo x suficientemente grande o quociente $\frac{\ln x}{x}$ pode tornar-se tão pequeno quanto desejemos.

(c) Prove ainda que essa conclusão é válida para logaritmos em qualquer base > 1.

Questão 3.

Uma moeda, com probabilidade $0,6$ de dar cara, é lançada 3 vezes.

(a) Qual é a probabilidade de que sejam observadas duas caras e uma coroa, em qualquer ordem?

(b) Dado que foram observadas duas caras e uma coroa, qual é a probabilidade de que tenha dado coroa no primeiro lançamento?

Questão 4.

Considere a sequência a_n definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 + 2 \\ a_3 &= 2 + 3 + 4 \\ a_4 &= 4 + 5 + 6 + 7 \\ &\ldots \end{aligned}$$

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e qual é o maior desses inteiros? Calcule a_{10}.

(b) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Questão 5.

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 6 e AD um segmento perpendicular ao plano desse triângulo de comprimento 8.

(a) Localize o ponto P do espaço que é equidistante dos quatro pontos A, B, C e D e calcule a distância comum $R = PA = PB = PC = PD$.

(b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas AC e BD.

Questão 6.

No triângulo ABC assinale o ponto P do lado AC e o ponto Q do lado BC de forma que $AP = \frac{1}{3}AC$ e $BQ = \frac{2}{3}BC$. Seja J o ponto de interseção de AQ e BP.

(a) Mostre que $\frac{JA}{JQ} = \frac{3}{4}$. *Sugestão:* Trace QL paralelo a BP e use semelhança de triângulos.

(b) Calcule a razão $\frac{JB}{JP}$.

(c) Decida se a área do triângulo BPQ é maior do que, menor do que ou igual à metade da área do triângulo ABC.

Questão 7.

(a) Mostre que nenhum número natural da forma $4n + 3$ pode ser escrito como o quadrado ou a soma de dois quadrados de números naturais.

(b) Mostre que nenhum número a da forma $11\ldots1$ (n dígitos iguais a 1, $n > 1$) é o quadrado ou a soma de dois quadrados de números naturais.

Questão 8.

Considere o sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \bmod n_1 \\ x \equiv c_2 \bmod n_2 \end{cases}$$

Denotamos como de costume o mdc e o mmc de n_1 e n_2 por (n_1, n_2) e $[n_1, n_2]$, respectivamente.

(a) Mostre que a e a' são soluções do sistema se, e somente se, $a \equiv a' \bmod [n_1, n_2]$.[1]

(b) Mostre que o sistema admite solução se, e somente se, $c_2 \equiv c_1 \bmod (n_1, n_2)$.

(c) Dadas as progressões aritméticas (a_n) de primeiro termo 5 e razão 14 e (b_n) de primeiro termo 12 e razão 21, mostre que elas possuem termos comuns (isto é, existem r e s tais que $a_r = b_s$). Mostre que esses termos comuns formam uma PA e determine seu primeiro termo e sua razão.

[1] O enunciado está, infelizmente incorreto: a intenção era pedir: se a é solução então a' é solução se, e somente se, $a \equiv a' \bmod [n_1, n_2]$.