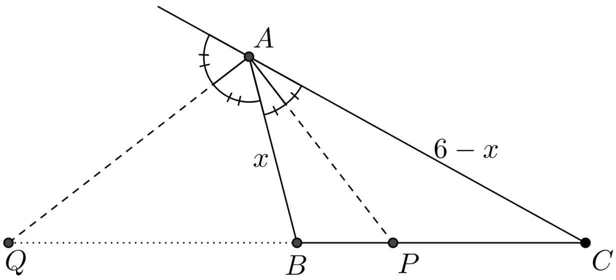
Questão 01 [2,00 pts]

Em um triângulo ABC de perímetro 9, o lado BC mede 3 e a distância entre os pés das bissetrizes interna e externa partindo de A é igual a 4. Calcule as medidas dos lados AB e AC do triângulo.

Solução



Sejam P e Q os pés das bissetrizes interna e externa, respectivamente, partindo de A. Denotando $x = \overline{AB}$, temos $\overline{AC} = 2P - \overline{AB} - \overline{BC} = 9 - x - 3 = 6 - x$. Pelo Teorema das Bissetrizes Internas,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP} + \overline{PC}}{\overline{AB} + \overline{AC}},$$

logo

$$\frac{\overline{BP}}{x} = \frac{\overline{PC}}{6-x} = \frac{3}{6}.$$

Com isso,

$$\overline{BP} = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \overline{PC} = \frac{6-x}{2}.$$

Como $\overline{QP} = 4$, temos

$$\overline{QB} = \overline{QP} - \overline{BP} = 4 - \frac{x}{2}$$

e

$$\overline{QC} = \overline{QP} + \overline{PC} = 4 + \frac{6-x}{2}.$$

Pelo Teorema das Bissetrizes Externas,

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{AC}},$$

logo

$$\frac{4 - \frac{x}{2}}{x} = \frac{4 + \frac{6-x}{2}}{6-x}.$$

Simplificando,

$$\frac{4}{x} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6-x} + \frac{1}{2},$$

e então

$$\frac{6-2x}{x(6-x)} = \frac{1}{4}.$$

Desta forma, temos $x^2 - 14x + 24 = 0$, implicando $x = 2$ ou $x = 12$.

Repare, porém, que $\overline{AB} = x = 12$ não é possível, pois este valor é maior que o perímetro do triângulo. Assim, $\overline{AB} = 2$, o que implica $\overline{AC} = 6 - \overline{AB} = 4$.

Esta solução considerou o vértice B entre os pés das bissetrizes relativas a A. Se C estivesse entre os pés das bissetrizes, teríamos $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AC} = 2$.

Questão 02 **[2,00 pts]**

Considere um triângulo ABC retângulo em A. Por A, trace uma reta r perpendicular a BC, que encontra BC em H. Em r, marque o ponto P, tal que $\overline{AP} = \overline{BC}$, estando A entre P e H. Trace os segmentos PB e PC.

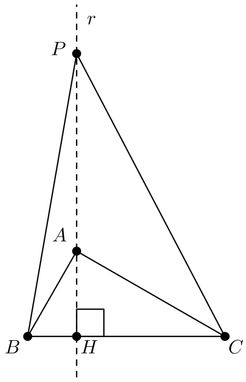
(a) Prove que a área do quadrilátero $PBAC$ é $\dfrac{\overline{BC}^2}{2}$.

(b) Considere o quadrado $ABDE$ tal que A está entre E e C. Prove que o triângulo BCD é congruente ao triângulo APB.

(c) Prove que área do triângulo BCD é $\dfrac{\overline{AB}^2}{2}$.

Solução

(a) Observe que Área$(PBAC)$ = Área(APB) + Área(APC).



Como BH é a altura do triângulo APB relativa ao lado AP, temos

$$\text{Área}(APB) = \frac{\overline{BH}\cdot\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{BH}\cdot\overline{BC}}{2}$$

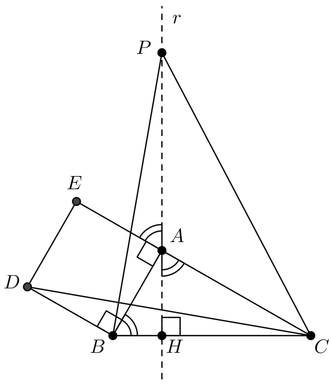
e, como CH é a altura do triângulo APC relativa ao lado AP, temos

$$\text{Área}(APC) = \frac{\overline{CH}\cdot\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{CH}\cdot\overline{BC}}{2}.$$

Assim,

$$\text{Área}(PBAC) = \text{Área}(APB) + \text{Área}(APC) = \frac{\overline{BH}\cdot\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CH}\cdot\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{BC}\left(\overline{BH}+\overline{CH}\right)}{2} = \frac{\overline{BC}^2}{2}\ .$$

(b) Temos $C\hat{A}H = A\hat{B}C$, pois ambos são complementares ao ângulo $A\hat{C}B$, e $P\hat{A}E = C\hat{A}H$, pois os ângulos são opostos pelo vértice. Com isso, $P\hat{A}E = A\hat{B}C$. Assim, $P\hat{A}B = C\hat{B}D$, pois ambos os ângulos são a soma de $A\hat{B}C$ com um ângulo reto.



Sabemos também que $\overline{BC} = \overline{AP}$ (dado do problema) e $\overline{BD} = \overline{AB}$ (pois $ABDE$ é um quadrado), logo, pelo caso LAL, os triângulos BCD e APB são congruentes.

(c) Como, pelo item (b), BCD e APB são congruentes, temos

$$\text{Área}(BCD) = \text{Área}(APB) = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{BC}}{2},$$

como calculado no item (a). Por outro lado, uma das relações métricas do triângulo retângulo nos diz que $\overline{BH} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2$, logo

$$\text{Área}(BCD) = \frac{\overline{AB}^2}{2}.$$

Questão 03 [**2,00 pts**]

$OABC$ é um tetraedro tal que $A\hat{O}B = A\hat{O}C = B\hat{O}C = 90°$, onde $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ e $\overline{OC} = z$. Sabe-se que $\overline{AB} = \sqrt{41}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{13}$ e $\overline{BC} = \sqrt{61}$.

(a) Determine x, y e z.

(b) Determine o volume do tetraedro $ABCO$.

Solução

(a) Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABO, ACO e BCO, todos eles retângulos em O, temos:

$$x^2 + y^2 = \overline{AB}^2 = 41. \tag{I}$$

$$x^2 + z^2 = \overline{AC}^2 = 52. \tag{II}$$

$$y^2 + z^2 = \overline{BC}^2 = 41. \tag{III}$$

Somando membro a membro as três equações anteriores, temos:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 154$$

e então

$$x^2 + y^2 + z^2 = 77 \tag{IV}$$

Das subtrações abaixo, obtemos os valores desejados:

$$\text{(IV)} - \text{(III)} \Rightarrow x^2 = 16 \therefore x = 4\text{cm}.$$

$$\text{(IV)} - \text{(II)} \Rightarrow y^2 = 25 \therefore y = 5\text{cm}.$$

$$\text{(IV)} - \text{(I)} \Rightarrow z^2 = 36 \therefore z = 6\text{cm}.$$

(b) Tomando o triângulo ABO como base do tetraedro, OC será sua altura. Daí, seu volume é:

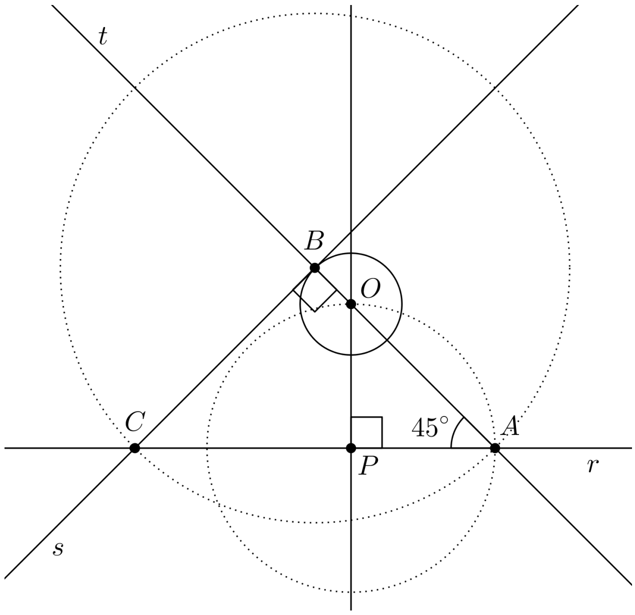
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x \cdot y}{2} \cdot z = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 6 \therefore V = 20\text{cm}^3.$$

Questão 04 [**2,00 pts**]

Sejam L um círculo de raio 1 de centro O e r uma reta (no mesmo plano que L) exterior a L. Diga como construir, com régua e compasso, uma reta s tangente ao círculo e que determina, com r, um ângulo de $45°$.

Solução

A solução abaixo não depende das medidas dadas.



Uma possível construção está representada acima e descrita abaixo:

1. Trace a reta perpendicular a r passando por O e seja P sua interseção com r.
2. Construa o círculo de centro P e raio PO e seja A uma das interseções deste círculo com r. Repare que, por construção, o triângulo APO é retângulo em P e isósceles, com $OP \equiv AP$. Com isso, $P\hat{A}O = 45°$.
3. Trace a reta t determinada por A e O e seja B a interseção de t com o círculo dado, de forma que O esteja entre A e B.
4. Construa o círculo de centro B e raio BA, e seja C seu ponto interseção com r diferente de A. Note que $CB \equiv AB$, logo ABC é isósceles, com $A\hat{C}B = C\hat{A}B = 45°$. Teremos ainda que $A\hat{B}C = 90°$.
5. A reta s procurada é a determinada por B e C.

Questão 05 **[2,00 pts]**

Considere três retas r, s e t do espaço tais que qualquer plano seja concorrente a pelo menos uma destas retas. Considere ainda um poliedro tal que

- todas as suas faces são quadriláteros;
- cada uma de suas arestas é paralela a alguma das retas r, s ou t; e
- se um plano contém uma das faces, nenhum vértice do poliedro pode estar neste plano, além dos vértices da própria face.

Prove que

(a) todas as faces deste poliedro são paralelogramos, e

(b) este poliedro é um prisma.

Solução

(a) Considere uma das faces do poliedro, a qual chamaremos de $ABCD$. Sem perda de generalidade, digamos que $AB \parallel r$. Não poderemos ter $BC \parallel r$, pois, neste caso, teremos AB e BC consecutivos e colineares. Digamos então, sem perda de generalidade, que $BC \parallel s$.

Observe que já concluímos que cada uma das retas r e s é paralela ou está contida no plano da face $ABCD$. Assim, pela informação dada sobre as retas, t deve ser concorrente a tal plano, logo não pode ser paralela a este plano nem pode estar contida nele. Portanto, nenhuma das arestas CD e AD desta face pode ser paralela à reta t.

Não poderemos ter $CD \parallel s$ (senão BC e CD seriam colineares) nem, como já vimos, $CD \parallel t$. Portanto, $CD \parallel r$. Da mesma forma, AD não pode ser paralela a r, logo $AD \parallel s$.

Até aqui, já vimos que $ABCD$ é um paralelogramo. Mas a mesma argumentação vale para qualquer uma das faces do poliedro, portanto todas as suas faces são paralelogramos.

(b) Seja $ABCD$ uma das faces. Pelo item (a), podemos supor, sem perda de generalidade, AB e CD paralelas a r e BC e AD paralelas a s.

Considere uma aresta que tenha A, B, C ou D como vértice, e que não esteja na face $ABCD$. Chamemos esta aresta de EA. Como E não pertence ao plano de $ABCD$, EA não é paralela a r ou s, logo $EA \parallel t$.

Mas isto vale para todas as arestas que têm um vértice na face $ABCD$, portanto todas estas arestas são paralelas a t, e de cada vértice A, B, C e D sai apenas uma aresta que não está na face $ABCD$.

A face que tem A, B e E como três de seus vértices deverá ser um paralelogramo (item (a)), portando, seu quarto vértice F é tal que $EF \parallel AB$ e $BF \parallel AE$.

A face adjacente a $ABFE$, compartilhando a aresta BF, deverá ser então um paralelogramo $BCGF$, com $FG \parallel BC$. A face adjacente a $BCGF$, compartilhando a aresta CF, deverá ser então um paralelogramo $CDHG$, com $GH \parallel CD \parallel AB$. Por fim, teremos a face $ADHE$, com $HE \parallel AD \parallel BC$.

Repare que $EFGH$ é, então, um paralelogramo, pois EF e GH são paralelos a AB, e FG e EH são paralelos a BC.

Temos ainda que $EFGH$ deverá ser uma face. De fato, se não fosse assim, haveria uma aresta EI, FI, GI ou HI que não estaria no plano de $EFGH$, portanto não seria paralela a r e s, e nem poderia ser paralela a t, pois, neste caso, teríamos duas arestas colineares.

Assim, temos o prisma $ABCDEFGH$, tal que $ABCD$ e $EFGH$ são bases paralelas, com $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$.