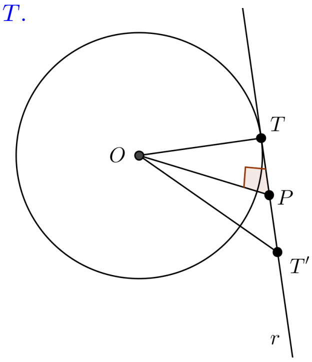
Questão 01 [2,00 pts]

Mostre que se uma reta é tangente a um círculo então ela é perpendicular ao raio que liga o centro do círculo ao ponto de tangência.

Solução

Considere o círculo de centro O e seja T o ponto de tangência da reta r ao círculo. Designemos por P o pé da perpendicular a reta r baixada por O. Observe que basta mostrar que $P = T$.



Suponha, por contradição, que P e T são distintos, assim o triângulo OPT é retângulo. Logo $OT > OP$, pois o maior lado se opõe ao maior ângulo. Como OT é o raio do círculo, P é um ponto interior do círculo.

Seja $T' \in r$ tal que $\overline{PT} = \overline{PT'}$ com $T' \neq T$. Daí, os triângulos OPT e OPT' são congruentes por LAL. Logo $\overline{OT} = \overline{OT'}$ e então T' pertence ao círculo. Contradição, pois a reta r é tangente ao círculo em T.

Portanto $P = T$.

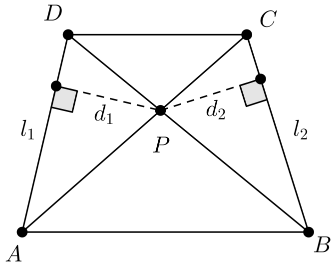
Questão 02 [2,00 pts]

Denotando por l_1 e l_2 as medidas dos lados não paralelos de um trapézio, e por d_1 e d_2 as distâncias do ponto de interseção das diagonais a estes lados, respectivamente, mostre que

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Solução

Sejam $ABCD$ o trapézio, com lados não paralelos AD e BC medindo l_1 e l_2 respectivamente, e P o ponto de interseção das diagonais.



Os triângulos ACD e BCD possuem a mesma base CD e alturas de mesma medida (pois AB e CD são paralelos), logo possuem a mesma área. Com isso,

$$\begin{aligned} \text{Área}(APD) &= \text{Área}(ACD) - \text{Área}(PCD) \\ &= \text{Área}(BCD) - \text{Área}(PCD) = \text{Área}(BPC). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\text{Área}(APD) = \frac{l_1 \cdot d_1}{2}$$

e

$$\text{Área}(BPC) = \frac{l_2 \cdot d_2}{2},$$

portanto

$$\frac{l_1 \cdot d_1}{2} = \frac{l_2 \cdot d_2}{2}.$$

Mas isto implica que

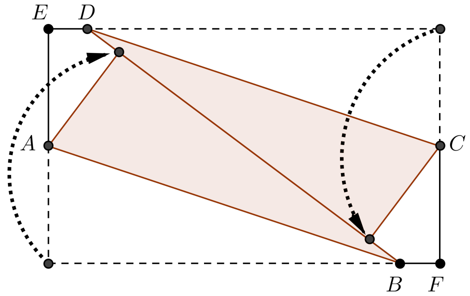
$$l_1 \cdot d_1 = l_2 \cdot d_2$$

e, consequentemente,

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

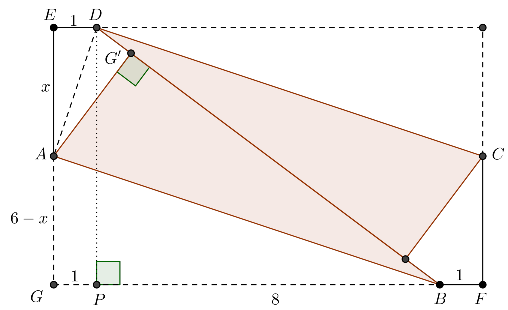
Questão 03 [2,00 pts]

Em uma folha de papel retangular, de medidas 10cm por 6cm, são feitas as dobras paralelas AB e CD, como na figura abaixo. Se DE e BF medem ambos 1 cm, determine a medida de AE.



Solução

Seja G tal que EG é o lado da folha retangular que contém o ponto A e denote por G' o ponto correspondente a G após a dobra, como na figura abaixo. Seja ainda P a projeção ortogonal de D sobre FG.



Denotando $\overline{AE} = x$, teremos então $\overline{AG} = \overline{AG'} = 6 - x$.

Como $\overline{PG} = \overline{DE} = \overline{BF} = 1\text{cm}$, e como $\overline{FG} = 10\text{cm}$ temos $\overline{PB} = 8\text{cm}$. E, como $\overline{DP} = \overline{EG} = 6\text{cm}$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo DPB, temos $\overline{BD} = 10\text{cm}$. Além disso, como $\overline{BG'} = \overline{BG} = 9\text{cm}$, temos então $\overline{DG'} = 1\text{cm}$.

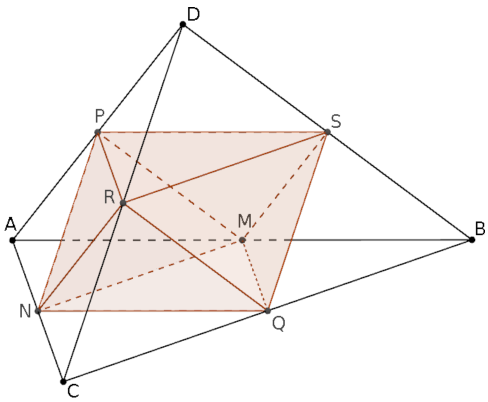
Os triângulos DEA e $DG'A$ serão ambos retângulos, com mesma hipotenusa DA e tais que $\overline{DE} = 1 = \overline{DG'}$. Estes triângulos serão, portanto, congruentes. Com isso, $x = \overline{AE} = \overline{AG'} = 6 - x$, o que implica $2x = 6$, logo $\overline{AE} = x = 3\text{cm}$.

Questão 04 [2,00 pts]

Considere um tetraedro $ABCD$ e sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AB, AC, AD, BC, CD e BD, respectivamente. Prove que o volume do octaedro $MNPQRS$ é metade do volume do tetraedro $ABCD$.

Solução

O volume do octaedro $MNPQRS$ é obtido retirando-se, do volume do tetraedro $ABCD$, os volumes dos tetraedros $APMN$, $BMQS$, $CNRQ$ e $DPRS$.



Considere o tetraedro $APMN$. Como M, N e P são pontos médios de AB, AC e AD, respectivamente, $APMN$ é semelhante ao tetraedro $ABCD$, com razão $\frac{1}{2}$. Com isso,

$$\frac{\mathcal{V}(APMN)}{\mathcal{V}(ABCD)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Pelo mesmo raciocínio, os tetraedros $BMQS$, $CNRQ$ e $DPRS$ serão também semelhantes a $ABCD$ com razão $\frac{1}{2}$, logo

$$\frac{\mathcal{V}(BMQS)}{\mathcal{V}(ABCD)} = \frac{\mathcal{V}(CNRQ)}{\mathcal{V}(ABCD)} = \frac{\mathcal{V}(DPRS)}{\mathcal{V}(ABCD)} = \frac{1}{8}.$$

Com isso,

$$\mathcal{V}(APMN) = \mathcal{V}(BMQS) = \mathcal{V}(CNRQ) = \mathcal{V}(DPRS) = \frac{1}{8}\mathcal{V}(ABCD),$$

e então

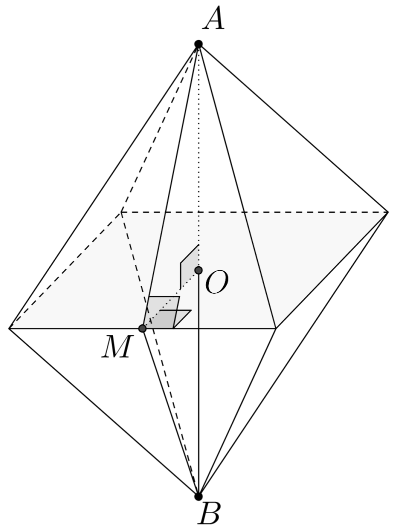
$$\begin{aligned} \mathcal{V}(MNPQRS) &= \mathcal{V}(ABCD) - \mathcal{V}(APMN) - \mathcal{V}(BMQS) - \mathcal{V}(CNRQ) - \mathcal{V}(DPRS) \\ &= \mathcal{V}(ABCD) - 4 \cdot \frac{1}{8}\mathcal{V}(ABCD) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}(ABCD). \end{aligned}$$

Questão 05 **[2,00 pts]**

Determine o cosseno do ângulo entre duas faces de um octaedro regular que possuam uma aresta em comum.

Solução

Sejam A e B dois vértices opostos do octaedro, e M o ponto médio de uma das arestas do octaedro que não tenha A ou B como extremo, como na figura abaixo.



A medida do ângulo entre as faces será dado por $A\hat{M}B$.

Denote por a a medida da aresta do octaedro. Sendo O o centro do octaedro, O será o centro da seção o octaedro destacada na figura, que é um quadrado. Assim, $\overline{MO} = \frac{a}{2}$.

O segmento MA será a altura da face que o contém, ou seja, a altura de um triângulo equilátero de lado a. Assim, $\overline{MA} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Da mesma forma, $\overline{MB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

O triângulo AOM é retângulo em O. Por Pitágoras, temos então

$$\overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{MA}^2,$$

que implica

$$\overline{OA}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

e então

$$\overline{OA}^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

Com isso,

$$\overline{OA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Como $OB \equiv OA$, temos

$$\overline{AB} = \overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OA} = a\sqrt{2}.$$

O triângulo AMB terá então lados de medidas $\overline{AB} = a\sqrt{2}$ e $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Pela Lei dos Cossenos, temos então

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\,\overline{AM}\;\overline{BM}\;\cos\left(A\hat{M}B\right),$$

logo

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos\left(A\hat{M}B\right),$$

e então

$$2a^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\cos\left(A\hat{M}B\right).$$

Cancelando o a^2 e simplificando a igualdade acima, temos

$$\cos\left(A\hat{M}B\right) = -\frac{1}{3}.$$