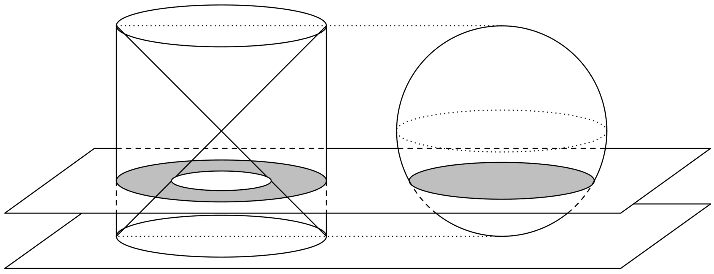
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Avaliação 2 - MA13 - 2015 - Gabarito

Questão 01 [2,00]

Considere um cilindro sólido de altura $2R$, cujas bases são dois círculos de raio R, do qual são retirados dois cones sólidos de altura R e que têm por base as bases do cilindro, formando-se assim um sólido $\mathcal{S}$. Considere ainda uma esfera de raio R, e que, assim como o sólido $\mathcal{S}$, está sobre um plano.

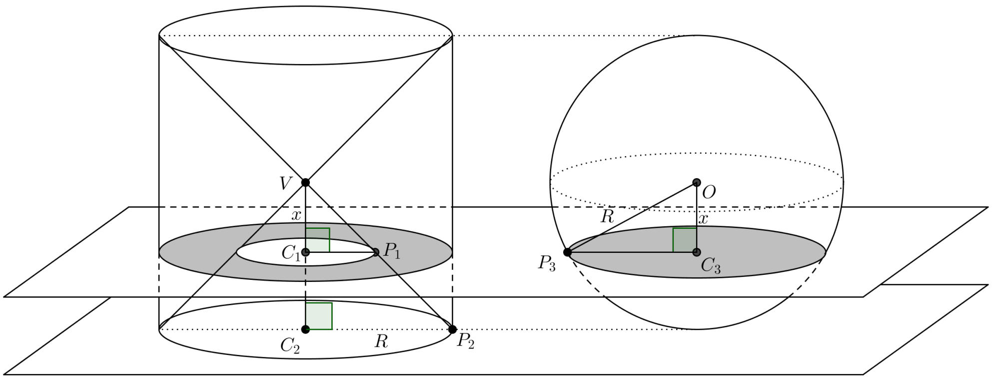


(a) Prove que, intersectando a esfera e o sólido $\mathcal{S}$ por um plano paralelo ao plano que apoia estes sólidos, como na figura, obtém-se seções com mesma área.

(b) Supondo conhecidas as expressões do volume do cone e do cilindro, prove que o volume de uma esfera de raio R é dado por $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Solução

(a) Vamos denotar por x a distância do plano ao vértice V dos cones e ao centro O da esfera. Suponhamos inicialmente o plano abaixo de V e O.



Como na figura, os triângulos VC_1P_1 e VC_2P_2 são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{C_1P_1}}{\overline{C_2P_2}} = \frac{\overline{VC_1}}{\overline{VC_2}}.$$

Como $\overline{VC_1} = x$, $\overline{C_2P_2} = R$ e $\overline{VC_2} = R$, temos

$$\frac{\overline{C_1P_1}}{R} = \frac{x}{R} \therefore \overline{C_1P_1} = x.$$

Com isso, a seção do sólido $\mathcal{S}$ é a coroa circular entre os círculos de raios x e R, logo, sua área é dada por

$$\text{Sessão}_{\mathcal{S}} = \pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

A seção da esfera pelo plano será o círculo de raio $\overline{CP_3}$ da figura. Como o triângulo OC_3P_3 é reto em C_3, temos

$$\overline{OP_3}^2 = \overline{CP_3}^2 + \overline{OC_3}^2,$$

e, como $\overline{OC_3} = x$ e $\overline{OP_3} = R$,

$$R^2 = \overline{CP_3}^2 + x^2,$$

logo

$$\overline{CP_3}^2 = R^2 - x^2.$$

Com isso, a área da seção da esfera pelo plano será dada por

$$\text{Sessão}_{\text{esfera}} = \pi(R^2 - x^2) = \text{Sessão}_{\mathcal{S}},$$

como queríamos provar.

O raciocínio é idêntico para planos acima do vértice e do centro da esfera, bastando alterar a figura.

Para o plano que passa pelo vértice dos cones e pelo centro da esfera, as seções em ambos os sólidos serão círculos de raio R e, assim, terão mesma área.

(b) Pelo Princípio de Cavalieri, a esfera terá o mesmo volume do sólido $\mathcal{S}$. Mas este sólido tem volume dado pelo volume do cilindro de base de raio R e altura $2R$, subtraído de dois cones sólidos de base de raio R e altura R. Assim,

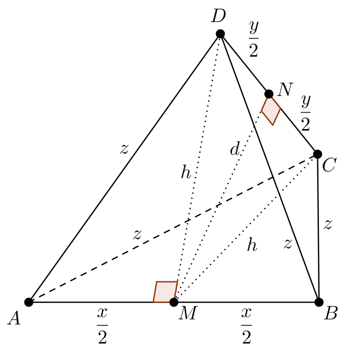
$$\text{Vol}_{\text{esfera}} = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2\left(\frac{\pi \cdot R^2 \cdot R}{3}\right) = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Questão 02 [2,00]

Em um tetraedro $ABCD$, $\overline{AB} = x$, $\overline{CD} = y$ e as demais arestas medem z. Determine a distância entre as arestas AB e CD em função de x, y e z.

Solução

Sejam M e N pontos médios de AB e CD, respectivamente.



Os triângulos ACB e ADB são congruentes (LLL) e isósceles, logo, as alturas CM e DM são congruentes. Assim, o triângulo DMC é isósceles, e, como N é ponto médio de CD, MN será altura de DMC. Da mesma forma, MN é altura do triângulo isósceles ABN. Com isso, MN é o segmento da perpendicular comum às arestas AB e CD, logo a distância entre estes segmentos é $\overline{MN}$. Vamos então calcular este comprimento.

O triângulo AMD é retângulo em M, logo, denotando $h = \overline{DM}$,

$$z^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2,$$

portanto

$$h^2 = z^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Denotando $d = \overline{MN}$, como DNM é um triângulo retângulo em N, temos

$$h^2 = d^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

logo

$$d^2 = h^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = h^2 - \frac{y^2}{4},$$

e então

$$d^2 = z^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}.$$

Com isso,

$$d = \sqrt{z^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}.$$

Questão 03 **[2,00]**

Sobre o lado BC de um quadrado $ABCD$ marcam-se os pontos E e F tais que $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{CF}{BC} = \dfrac{1}{4}$. Os segmentos AF e ED intersectam-se em P. Determine a que fração da área do quadrado $ABCD$ corresponde a área do triângulo BPE.

Solução

Seja a a medida da aresta do quadrado. Assim,

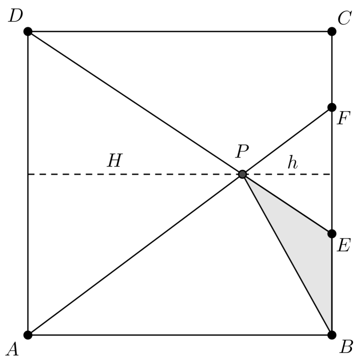
$$\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{a}{3}$$

e

$$\overline{CF} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{a}{4}.$$

Como $E\hat{F}P = D\hat{A}P$, $F\hat{E}P = A\hat{D}P$ (alternos internos nos dois casos) e $E\hat{P}F = D\hat{P}A$ (opostos pelo vértice), os triângulos APD e FPE são semelhantes. Denotando por h e H as alturas desses triângulos, relativas as lados EF e DA, respectivamente, temos

$$\frac{h}{H} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DA}}.$$



Como $\overline{DA} = a$ e

$$\overline{EF} = \overline{BC} - \overline{BE} - \overline{CF} = a - \frac{a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{5a}{12},$$

temos então

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{5a}{12}}{a} = \frac{5}{12},$$

e, portanto,

$$h = \frac{5}{12}H.$$

Mas $h + H = a$, logo $H = a - h$ e então
$$h = \frac{5}{12}(a-h),$$
logo
$$h + \frac{5}{12}h = a,$$
que implica
$$\frac{17}{12}h = \frac{5}{12}a$$
ou ainda
$$h = \frac{5}{17}a.$$
Assim, a área de BPE é
$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{5}{17}a = \frac{5}{102}a^2.$$
Como a área de $ABCD$ é a^2, a área do triângulo BPE é $\frac{5}{102}$ da área de $ABCD$.

Questão 04 **[2,00]**

Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. Determine o número de arestas e faces deste poliedro.

Solução

Vamos denotar por F o número de faces e A o número de arestas. Como este poliedro tem apenas faces triangulares, temos
$$2A = 3F$$
(isto é, cada face contabiliza 3 arestas, sendo que, cada aresta é contada duas vezes, uma para cada face em que está contida). Com isso,
$$A = \frac{3}{2}F.$$
Pelo Teorema de Euler, temos
$$32 - A + F = 2,$$
logo
$$32 - \frac{3}{2}F + F = 2$$
e, então,
$$-\frac{F}{2} = -30,$$
implicando $F = 60$.
Com isso, temos
$$A = \frac{3}{2} \cdot 60 = 90.$$

Questão 05 **[2,00]**

(a) Usando apenas a identidade fundamental da trigonometria e as fórmulas de arcos duplos prove que: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, para todo x real.

(b) Sabendo que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$, calcule $\cos(x)$.

Solução

(a) Usando a relação fundamental da trigonometria e as fórmulas de arcos duplos temos que:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$$

e

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).$$

Somando as equações anteriores segue que:

$$\cos(2x) + 1 = 2\cos^2(x).$$

Logo, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

(b) Usando o item (a) temos que:

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2x}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{7}{9}.$$