Avaliação 1 - MA13 - 2015 - Gabarito

Questão 01 [2,00 pts]

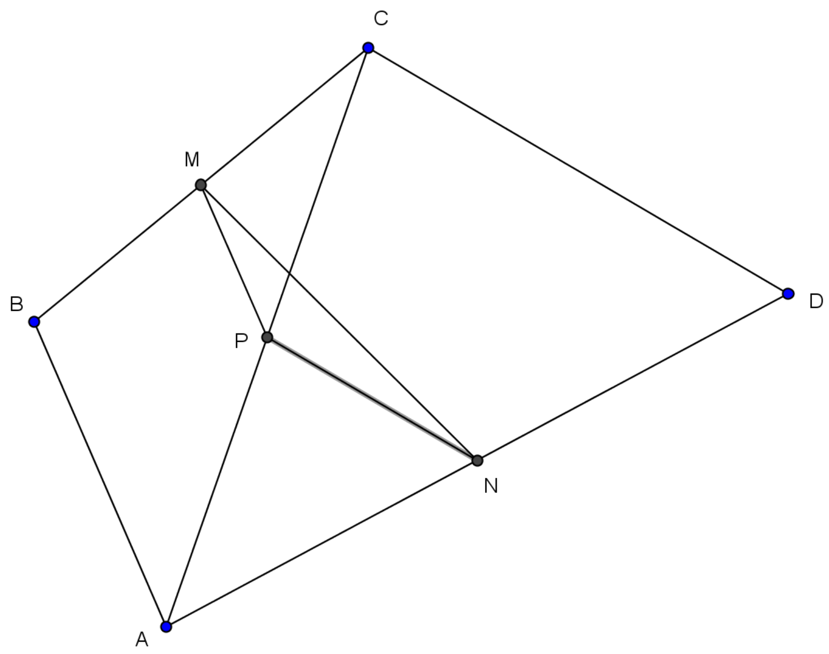
Em um quadrilátero convexo $ABCD$, prove que

$$\overline{MN} \leqslant \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2},$$

onde M e N são os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente.

Sugestão: Utilize o ponto médio da diagonal AC.

Solução



Tomando P como ponto médio de AC, temos que $\overline{MP} = \frac{\overline{AB}}{2}$ e $\overline{PN} = \frac{\overline{CD}}{2}$. Para o ponto P há duas situações possíveis :

(I) M, N e P não estão alinhados. Da existência do triângulo MNP, teremos:

$$\overline{MN} < \overline{MP} + \overline{PN}.$$

(II) M, N e P estão alinhados, ou seja,

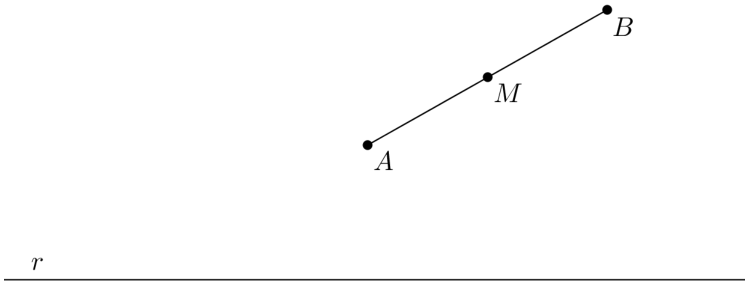
$$\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN}.$$

De (I) e (II) :

$$\overline{MN} \leqslant \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}.$$

Questão 02 [2,00 pts]

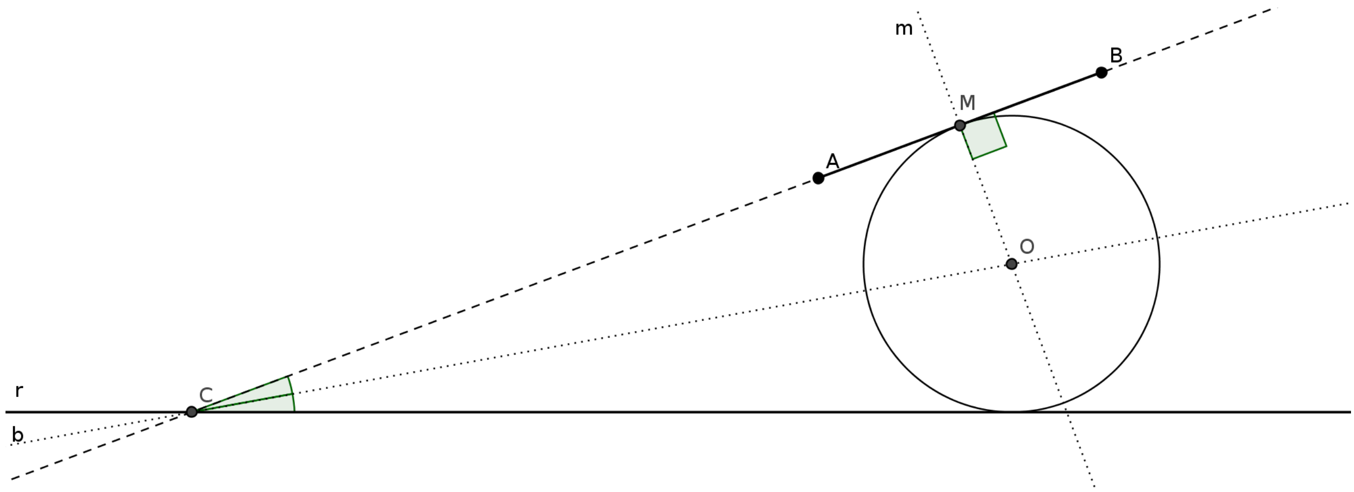
Na figura, M é ponto médio de AB.



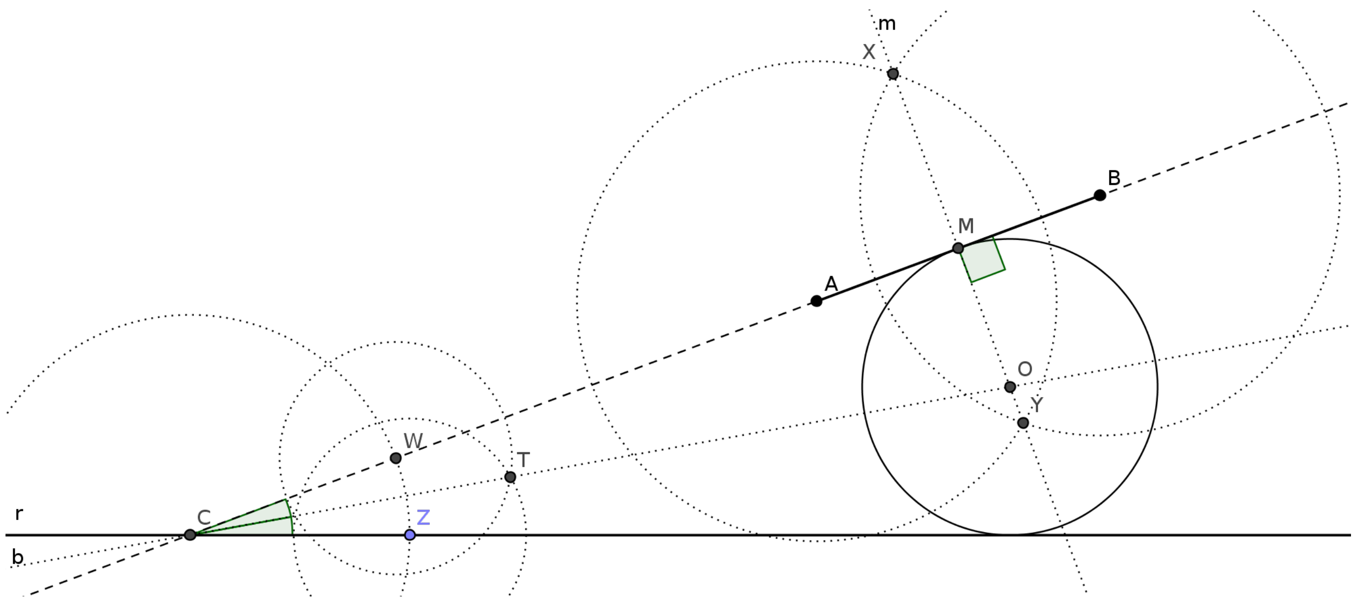
Descreva a construção com régua e compasso da circunferência $\mathcal{C}$, tangente à reta r e ao segmento AB, e tal que M seja o ponto de tangência de $\mathcal{C}$ com AB.

Solução

Vamos imaginar a circunferência construída, para buscar um ponto chave da construção.



Como a circunferência é tangente ao segmento AB em seu ponto médio M, o centro O estará sobre a mediatriz m de AB. E, como a circunferência é tangente tanto a $\overleftrightarrow{AB}$ quanto à reta r, seu centro estará sobre a bissetriz b entre r e $\overleftrightarrow{AB}$.
Assim, basta construir m e b.
Para construir m, tomamos o compasso e, com uma mesma abertura maior que $\frac{1}{2}\overline{AB}$, traçamos duas circunferências, uma de centro A e outra de centro B. Estas duas circunferências irão se intersectar em dois pontos, X e Y. Construímos então $m = \overleftrightarrow{XY}$.



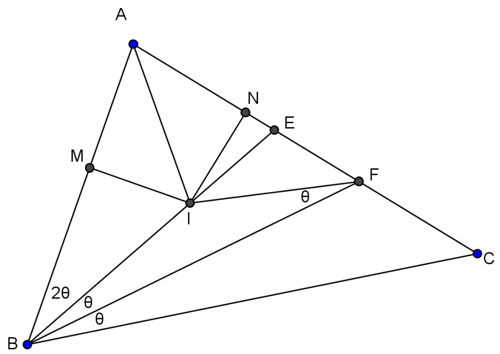
Para construir m, prolongamos AB até $C \in \overleftrightarrow{AB} \cap r$. Com um raio qualquer, construímos um círculo de centro C, que intersectará $\overrightarrow{CA}$ em um ponto W. Esta circunferência intersectará r dois pontos, escolhemos um deles, Z, de forma que $\overrightarrow{CZ}$ determine o menor ângulo $Z\hat{C}A$, como na figura. Com abertura maior que $\frac{1}{2}\overline{WZ}$, construímos duas circunferências, de centros W e Z respectivamente, que se intersectam em dois pontos. Sendo T um destes pontos, $b = \overleftrightarrow{CT}$.

Assim, construídas as retas m e b, obtemos $O \in m \cap b$. Para construir a circunferência pedida, basta fazer O como centro e tomar $\overline{OM}$ como abertura do compasso.

Questão 03 [**2,00 pts**]

Em um triângulo ABC de incentro I, sejam E e F pontos sobre AC tais que $\overrightarrow{BE}$ é bissetriz de $\angle ABC$ e $\overrightarrow{BF}$ é bissetriz de $\angle EBC$. Se $\angle BAC$ mede $60°$ e FI é paralelo a BC, determine as medidas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$.
Dica: Procure uma relação entre os triângulos ABI e AFI.

Solução

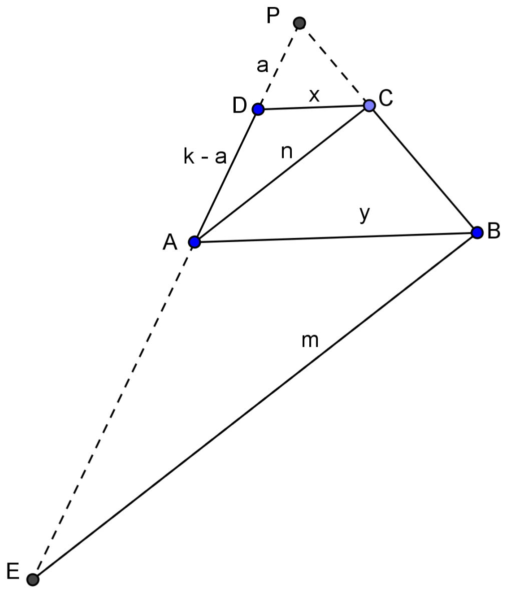


Seja $\angle BAC = 4\theta$, teremos então que $\angle ABE = \angle EIF = 2\theta$ e que o triângulo BIF é isósceles.
Sejam M e N os pés das perpendiculares traçadas de I sobre AB e AC, respectivamente.
Da congruência dos triângulos BIM e NIF, temos que $\angle EFI = 2\theta$ e consequentemente no triângulo ABC obtemos $4\theta + 2\theta + 60° = 180°$, ou seja, $\theta = 20°$.
Logo os ângulos pedidos são $80°$ e $40°$.

Questão 04 [2,00 pts]

Em um trapézio de bases AB e CD, com $\overline{AB} > \overline{CD}$, traça-se por B uma reta paralela à diagonal AC que encontra o prolongamento de AD em E. Sendo P o ponto de encontro dos prolongamentos dos lados AD e BC, determine $\overline{PA}$ em função apenas de $\overline{PD}$ e $\overline{PE}$.

Solução



Sejam $\overline{DP} = a$, $\overline{PE} = b$, $\overline{DC} = x$, $\overline{AB} = y$, $\overline{AC} = n$ e $\overline{EB} = m$. Queremos determinar $\overline{AP} = k$ como função de a e b.
Das semelhanças dos triângulos APC e PEB, ADC e ABE, ABP e PDC, temos que
$\dfrac{b}{k} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{k}{a}$.

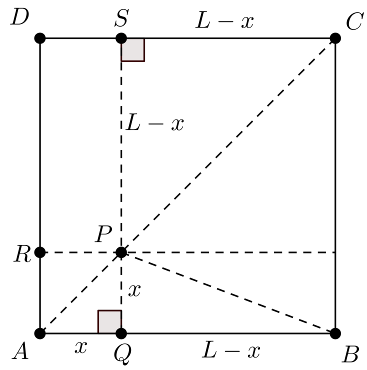
Das igualdades acima encontramos

$\dfrac{b}{k} = \dfrac{k}{a}$, donde $k = \sqrt{ab}$.

Questão 05 [2,00 pts]

Seja P um ponto sobre a diagonal AC do quadrado $ABCD$. Prove que $\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$, $\overline{PC}^2$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética.

Solução



Sejam Q, R e S os pés das perpendiculares traçadas de P sobre os lados AB, AD e CD, respectivamente. Como P está sobre a diagonal AC, temos que $\overline{PQ} = \overline{AQ} = x$ e $\overline{PS} = \overline{SC} = \overline{QB} = L - x$, onde L é a medida do lado do quadrado.

Dos triângulos retângulos PQA, PQB e PSC teremos:

$$\overline{PA}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2,$$

$$\overline{PB}^2 = x^2 + (L-x)^2,$$

$$\overline{PC}^2 = 2(L-x)^2.$$

Como

$$\overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 = 2(L-x)^2 - \left(x^2 + (L-x)^2\right) = (L-x)^2 - x^2,$$

temos

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = x^2 + (L-x)^2 - 2x^2 = (L-x)^2 - x^2 = \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2.$$

Com isso, $\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$ e $\overline{PC}^2$ estão em uma PA.