AVF - MA12 - 2015 - Gabarito

Questão 01 [2,00 pts]

Seja (a_n) uma progressão aritmética com termos não nulos. Prove, por indução em n, que:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Solução

Seja $P(n)$ a proposição:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Para $n = 1$ temos que o resultado vale trivialmente.

Suponha agora que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{k}{a_1 \cdot a_{k+1}}\ .$$

Resta provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$.

De fato, pela hipótese de indução, temos que

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{k}{a_1 \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{k \cdot a_{k+2} + a_1}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} =_*$$

Como a_n é uma progressão aritmética (PA), podemos trocar a_{k+2} por $a_1 + (k+1)r$ e depois $a_1 + kr$ por a_{k+1}, onde r é a razão da PA. Assim, segue que

$$_* = \frac{k[a_1 + (k+1)r] + a_1}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{(k+1)(a_1 + kr)}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{(k+1) \cdot a_{k+1}}{a_1 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{k+1}{a_1 \cdot a_{k+2}}\ .$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.

Questão 02 [2,00 pts]

Seja S_n a soma dos n primeiros termos da sequência definida por $a_1 = 0, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-2} + 1$, para $n \geqslant 3$.

(a) Liste os 7 primeiros termos da sequência a_n.

(b) Conjecture uma expressão em função de n para S_n.

(c) Use a conjectura encontrada no item (b), para provar que $S_{k+l} - S_{k-l} = kl$, onde k e l são inteiros positivos e $k > l$.

Sugestão: No item (c) pense sobre as paridades de $k + l$ e $k - l$.

Solução

(a) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2$, $a_6 = 3$ e $a_7 = 3$.

(b) Observe que

$$S_1 = 0 = 0 \cdot 1,\ S_2 = 1 = 1^2,\ S_3 = 2 = 1 \cdot 2,\ S_4 = 4 = 2^2,\ S_5 = 6 = 2 \cdot 3,\ S_6 = 9 = 3^2,\ S_7 = 12 = 3 \cdot 4,\ \cdots$$

Logo podemos conjecturar que:

- Se n for par, então $n = 2a$, para algum $a \in \mathbb{N}^*$ e, desta forma, $S_n = S_{2a} = a^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$.

- Se n for ímpar, então $n = 2a+1$, para algum $a \in \mathbb{N}$ e, assim, $S_n = S_{2a+1} = a(a+1) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \frac{n^2-1}{4}$.

(c) Se $k+l$ for par, temos que $k+l = 2a$, para algum $a \in \mathbb{N}^*$, o que implica que $k-l = 2a-2l = 2(a-l)$. Portanto,

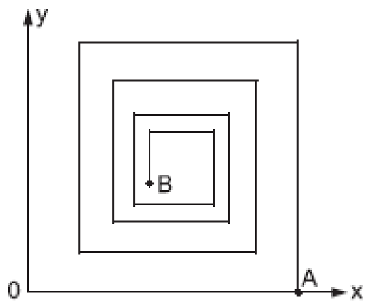
$$S_{k+l} - S_{k-l} = a^2 - (a-l)^2 = a^2 - (a^2 - 2al + l^2) = 2al - l^2 = (2a-l)l = kl.$$

Se $k+l$ for ímpar, temos que $k+l = 2a+1$, para algum $a \in \mathbb{N}$, o que implica que $k-l = 2a+1-2l = 2(a-l)+1$. Logo,

$$S_{k+l} - S_{k-l} = a(a+1) - (a-l)(a-l+1) = a^2 + a - (a^2 - 2al + a + l^2 - l) = 2al - l^2 + l = (2a-l+1)l = kl.$$

Questão 03 [2,00 pts]

No plano cartesiano, os comprimentos de 16 segmentos consecutivos da poligonal que começa na origem O e termina em B, conforme a figura, formam uma progressão geométrica de razão p, com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Se $OA = 1$, determine a abscissa x do ponto B.



Solução

Sejam a_n, $n \geqslant 1$, os termos desta PG. Temos, então, que a abscissa x_B do ponto B é dada por:

$$\begin{aligned} x_B &= (a_1 - a_3) + (a_5 - a_7) + (a_9 - a_{11}) + (a_{13} - a_{15}) \\ &= a_1 - a_1p^2 + a_1p^4 - a_1p^6 + a_1p^8 - a_1p^{10} + a_1p^{12} - a_1p^{14} \\ &= \frac{a_1(1-p^{16})}{1+p^2}. \end{aligned}$$

Como $a_1 = 1$, encontramos

$$x_B = \frac{1-p^{16}}{1+p^2}.$$

Questão 04 [**2,00 pts**]

Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se sucessivamente bolas dessa urna de acordo com o seguinte processo: cada vez que uma bola é sacada, ela é devolvida à urna e são acrescentadas mais duas bolas da mesma cor que ela. Determine a probabilidade de:

(a) a segunda bola sacada ser branca.

(b) a primeira bola sacada ter sido branca na certeza de que a segunda bola foi preta.

Solução

(a) Seja $A = \{\text{a segunda bola é branca}\}$. Temos, então, que

$$P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{12} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{12} = \frac{2}{5}.$$

(b) Sejam $A = \{\text{a primeira bola é branca}\}$ e $B = \{\text{a segunda bola é preta}\}$.

Desta forma, temos que $P(B|A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ e $P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{12} + \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{3}{5}$.

Assim,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

Questão 05 [**2,00 pts**]

Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 100\} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. De quantas maneiras distintas podemos selecionar dois elementos também distintos de A, de modo que:

(a) a diferença entre eles é exatamente 7?

(b) a diferença entre eles, em módulo, é menor do que ou igual a 7?

Solução

(a) Observe que cada número de 1 a 93, iniciando do número 1, possui um correspondente cuja diferença entre eles é 7, perfazendo um total de 93 maneiras. Do número 94 até o 100 existem apenas os menores que estes, que já foram incluídos na contagem anterior. Portanto existem 93 maneiras distintas de selecionar 2 inteiros tais que a diferença entre eles é exatamente 7.

(b) Observe que cada número de 1 a 93, iniciando do número 1, possui sete possibilidades cuja diferença entre eles, em módulo, é menor do que ou igual a 7. Por exemplo, escolhido o 1 podemos escolher qualquer um dentre os números $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ para formar um par cuja diferença seja menor do que ou igual a 7. O mesmo ocorre com o número 2, com o número 3, e assim por diante, até o número 93, que possui como possibilidades de escolha os números $\{94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$. Observe que os números $\{86, 87, 88, 89, 90, 91, 92\}$, que também seriam possibilidades de escolha para o número 93 já foram incluídos na sequência de contagem de 1 a 93. Desta forma, de 1 a 93 existem $93 \times 7 = 651$ maneiras distintas de selecionar 2 inteiros distintos, sendo que a diferença, em módulo, é menor ou igual a 7. Porém, ainda resta incluir as possibilidades para os números de 94 a 100, que são, respectivamente, 6,5,4,3,2,1 e 0. Portanto existem 651+6+5+4+3+2+1=672 maneiras distintas de selecionar 2 inteiros distintos sendo que a diferença, em módulo, é menor ou igual a 7.