MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Avaliação Final - MA12 - 2015

Questão 01 [2,00 pts]

Seja (a_n) uma progressão aritmética com termos não nulos. Prove, por indução em n, que:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}, \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Questão 02 [2,00 pts]

Seja S_n a soma dos n primeiros termos da sequência definida por $a_1 = 0, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-2} + 1$, para $n \geqslant 3$.

(a) Liste os 7 primeiros termos da sequência a_n.

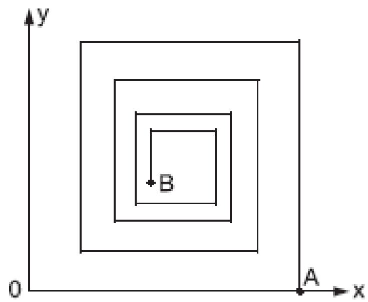
(b) Conjecture uma expressão em função de n para S_n.

(c) Use a conjectura encontrada no item (b), para provar que $S_{k+l} - S_{k-l} = kl$, onde k e l são inteiros positivos e $k > l$.

Sugestão: No item (c) pense sobre as paridades de $k + l$ e $k - l$.

Questão 03 [2,00 pts]

No plano cartesiano, os comprimentos de 16 segmentos consecutivos da poligonal que começa na origem O e termina em B, conforme a figura, formam uma progressão geométrica de razão p, com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Se $OA = 1$, determine a abscissa x do ponto B.



Questão 04 **[2,00 pts]**

Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se sucessivamente bolas dessa urna de acordo com o seguinte processo: cada vez que uma bola é sacada, ela é devolvida à urna e são acrescentadas mais duas bolas da mesma cor que ela. Determine a probabilidade de:

(a) a segunda bola sacada ser branca.

(b) a primeira bola sacada ter sido branca na certeza de que a segunda bola foi preta.

Questão 05 **[2,00 pts]**

Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 100\} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. De quantas maneiras distintas podemos selecionar dois elementos também distintos de A, de modo que:

(a) a diferença entre eles é exatamente 7?

(b) a diferença entre eles, em módulo, é menor do que ou igual a 7?