Questão 1 **[2,0 pt]**

Prove, por indução em n, que:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Questão 2 **[2,0 pt]**

(a) Defina progressão aritmética de primeiro termo a e razão r.

(b) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e r. Em seguida, prove-a por indução em n.

(c) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de a, n e r. Em seguida, prove-a por indução em n.

(d) A partir dos itens (b) e (c), obtenha uma fórmula para S_n em função de a, a_n e r.

Questão 3 **[2,0 pt]**

(a) Prove a *Convolução de Vandermonde*:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{r}.$$

***Sugestão**: Considere um grupo com n homens e m mulheres. Calcule, de duas maneiras diferentes, a quantidade de comissões de tamanho r que podem ser formadas com pessoas desse grupo.*

(b) Usando o item (a), deduza a *Identidade de Lagrange*:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Questão 4 **[2,0 pt]**

(a) Imagine que um prédio de quatro andares deva ser pintado usando-se uma cor para cada andar. Sabendo que as cores utilizadas podem ser verde e amarelo e que andares consecutivos não poderão ser pintados de amarelo, de quantas maneiras é possível fazer a pintura deste prédio?

(b) Resolva o mesmo problema para um prédio de 10 andares.

Questão 5 **[2,0 pt]**

Dados a e b dois números reais positivos, use a desigualdade das médias para encontrar o valor mínimo e o ponto em que esse valor mínimo ocorre, para cada uma das funções abaixo:

(a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x^2}$.

(b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$.

Sugestão: *Inspire-se no seguinte exemplo. Considere* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 5}$. *Pela desigualdade das médias, temos que*

$$x^2 + 5 = x^2 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}} = 4\sqrt[4]{\frac{125}{27}}\sqrt{x}.$$

Logo $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 5} \leq \dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ *e a igualdade ocorre se e só se* $x^2 = \dfrac{5}{3}$. *Portanto o valor máximo de* f *é* $\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ *e ocorre para* $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.