Avaliação 3 - MA11 - 2015.1 - Gabarito

Questão 01 [**2,00 pts**]

Sejam $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ e $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

(a) Prove, por indução em n, que $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

(b) Prove, por indução em n, que $C_n = S_n^2$.

Solução

(a) Seja $P(n)$ a proposição $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, uma vez que $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

Suponha agora que $P(n)$ seja verdadeira. Provaremos que $P(n)$ implica $P(n+1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Temos que mostrar que $C_n = S_n^2$, ou seja, que $C_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$. Seja então $P(n)$ a proposição $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$.

Suponha agora que $P(n)$ seja verdadeira. Provaremos que $P(n)$ implica $P(n+1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\
&= \frac{n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1) + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Questão 02 [**2,00 pts**]

Um quadrado $ABCD$ tem lado igual a n. Seus lados foram divididos em n partes iguais e, pelos pontos de divisão, traçaram-se paralelas à diagonal AC. Determine a soma dos comprimentos dessas paralelas, incluindo AC.

Solução

Sejam A_i os pontos pertencentes ao segmento AB, com $i = 1, 2, \ldots, n-1$, tais que $\overline{AA_1} = \overline{A_iA_{i+1}} = \overline{A_{n-1}B}$ e $A_n = B$. Considere também B_i os pontos pertencentes ao segmento BC, tais que $\overline{BB_1} = \overline{B_iB_{i+1}} = \overline{B_{n-1}C}$ e $B_n = C$, C_i os pontos pertencentes ao segmento CD, tais que $\overline{CC_1} = \overline{C_iC_{i+1}} = \overline{C_{n-1}D}$ e $C_n = D$, e D_i os pontos pertencentes ao segmento DA, tais que $\overline{DD_1} = \overline{D_iD_{i+1}} = \overline{D_{n-1}A}$ e $D_n = A$.

Observe que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$, A_iB_{n-i} e $D_{n-i}C_i$ são paralelos a AC, logo A_iB_{n-i} e $D_{n-i}C_i$ são diagonais de quadrados de lado i, portanto $\overline{A_iB_{n-i}} = \overline{D_{n-i}C_i}$. Desta maneira, temos que os segmentos $\overline{A_iB_{n-i}}$ formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt{2}$ e primeiro termo $\sqrt{2}$.

Portanto a soma S dos comprimentos destas diagonais somadas a diagonal AC é

$$\begin{aligned}
S &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \overline{A_iB_{n-i}} + \overline{AC} \\
&= 2 \cdot (1\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \ldots + (n-1)\sqrt{2}) + n\sqrt{2} \\
&= 2 \cdot (1\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2}) \cdot \frac{(n-1)}{2} + n\sqrt{2} \\
&= n\sqrt{2} \cdot (n-1) + n\sqrt{2} \\
&= n^2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Questão 03 [**2,00 pts**]

Uma loja vende bombons de 7 sabores: avelã, chocolate branco, chocolate preto, coco, menta, morango e nozes. Eles são vendidos em caixas com 12 unidades.

(a) Supondo que seja possível o cliente escolher o sabor de cada uma das 12 unidades, quantas são as escolhas possíveis para uma caixa?

(b) Se um cliente quiser colocar na caixa pelo menos um bombom de cada sabor, quantas são as escolhas possíveis?

(c) Se um cliente quiser comprar uma caixa com pelo menos três e no máximo cinco bombons de avelã, quantas são as escolhas possíveis?

(Não é necessário que haja todos os tipos nas caixas)

Solução

(a) Seja x_k o número de bombons do k-ésimo sabor que o cliente escolheu. Devemos, então, determinar valores inteiros e não-negativos para x_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12$. Isto pode ser feito de $CR_7^{12} = C_{18}^{12} = 7956$ modos.

(b) Se o cliente quiser colocar pelo menos um bombom de cada sabor na caixa, devemos considerar que 7 sabores já estão escolhidos e fixados. Portanto resta determinar a quantidade de escolhas para preencher os 5 lugares remanescentes, ou seja, devemos determinar valores inteiros e não-negativos para x_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, tais que $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 5$. Isto pode ser feito de $CR_7^5 = C_{11}^5 = 462$ modos.

(c) Nesta situação, o cliente poderá comprar exatamente 3, ou exatamente 4, ou exatamente 5 bombons de avelã. Devemos, então, determinar valores inteiros e não-negativos para x_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, tais que:
- No primeiro caso, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$, que pode ser feito de $CR_6^9 = C_{14}^9 = 2002$ modos;
- No segundo caso, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$, que pode ser feito de $CR_6^8 = C_{13}^8 = 1287$ modos;
- No terceiro caso, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$, que pode ser feito de $CR_6^7 = C_{12}^7 = 792$ modos.

Portanto, a quantidade de escolhas possíveis é dada por $2002 + 1287 + 792 = 4081$.

Questão 04 **[2,00 pts]**

Considere a sequência (a_n) definida por $a_1 = 9$ e $3a_{n+1} + a_n = 4$, para $n \geq 1$.
Sejam S_n a soma dos n primeiros termos dessa sequência e $b_n = a_n - 1$.

(a) Mostre que (b_n) é uma progressão geométrica, deixando claro quem é o primeiro termo e a razão.

(b) Determine o menor inteiro positivo n_0 tal que $|S_n - n - 6| < \dfrac{1}{125}$, para todo $n \geq n_0$.

Solução

(a) Como $b_n = a_n - 1$ e $a_1 = 9$, então $b_1 = a_1 - 1 = 9 - 1 = 8$
Por outro lado, $3a_{n+1} + a_n = 4 \Leftrightarrow 3(b_{n+1} + 1) + (b_n + 1) = 4 \Leftrightarrow b_{n+1} = -\dfrac{1}{3}b_n$.
Portanto (b_n) é uma PG de razão $-\dfrac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 8.

(b) Como S_n é a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) e $a_n = b_n + 1$, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &= (b_1 + 1) + (b_2 + 1) + \ldots + (b_n + 1) \\ &= (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + n. \end{aligned}$$

Mas (b_n) é uma PG, logo

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} + n, \text{ com } q = -\frac{1}{3} \text{ e } b_1 = 8.$$

Assim,
$S_n = 6 - 6\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + n$ e, portanto, $|S_n - n - 6| = 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
Visto que

$$6\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{2}{243} > \frac{1}{125} > \frac{2}{729} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^7,$$

teremos $n_0 = 7$.

Questão 05 **[2,00 pts]**

Dispõe-se de n moedas "viciadas" $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Sabe-se que, em um lançamento, a probabilidade de se obter cara na moeda $M_i, i = 1, 2, \ldots, n$, é $p_i = \dfrac{1}{(2i+1)}$. Seja P_i a probabilidade de se obter um número ímpar de caras quando são lançadas i moedas simultaneamente.

(a) Determine P_1, P_2 e P_3.

(b) Conjecture uma expressão para P_n e, em seguida, demonstre-a por indução.

(c) Determine P_{2015}.

Solução

Sejam $M_i, i = 1, 2, \ldots, n$, cada uma das moedas, $p_i = \dfrac{1}{2i+1}, i = 1, 2, \ldots, n$, a probabilidade de se obter cara jogando a moeda M_i e P_i a probabilidade de haver um número ímpar de caras jogando-se as moedas $M_1, M_2, \ldots, M_i$.

(a) Para $i = 1$, temos que $P_1 = p_1 \cdot \dfrac{1}{3}$, pois é a probabilidade de haver 1 cara no lançamento de M_1.

Para $i = 2$, temos que P_2 é a probabilidade de M_1 ser cara e M_2 ser coroa ou M_1 ser coroa e M_2 ser cara:

$$P_2 = P_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_1) \cdot p_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Para $i = 3$, temos que P_3 é a probabilidade de M_1, M_2 e M_3 serem caras ou M_1 ser cara e M_2 e M_3 serem coroas ou M_1 ser coroa e M_2 ser cara e M_3 ser coroa ou M_1 e M_2 serem coroas e M_3 ser cara:

$$P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot +p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}.$$

(b) Sendo $P_1 = \dfrac{1}{3}$, $P_2 = \dfrac{2}{5}$ e $P_3 = \dfrac{3}{7}$, podemos conjecturar que $P_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

Vamos provar essa igualdade pelo princípio da indução finita.

Tese: $P_n = \dfrac{n}{2n+1}$. **Hipótese:** $P_{n-1} = \dfrac{n-1}{2(n-1)+1}$.

Temos $P_{n-1} = \dfrac{n-1}{2(n-1)+1} = \dfrac{n-1}{2n-1}$. Porém, P_n é a probabilidade de haver um número ímpar de caras em $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ e M_n ser coroa ou haver um número par de caras em $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ e M_n ser cara. Portanto, $P_n = P_{n-1} \cdot (1 - p_n) + (1 - P_{n-1}) \cdot p_n \Rightarrow$
$P_n = \dfrac{n-1}{2n-1}(1 - \dfrac{1}{2n+1}) + (1 - \dfrac{n-1}{2n-1})\dfrac{1}{2n+1} \Rightarrow P_n = P_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

(c) Portanto, $P_{2015} = \dfrac{2015}{2(2015)+1} = \dfrac{2015}{4031}$.