Avaliação 3 - MA12 - 2015.1

Questão 01 **[2,00 pts]**

Sejam $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ e $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

(a) Prove, por indução em n, que $S_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

(b) Prove, por indução em n, que $C_n = S_n^2$.

Questão 02 **[2,00 pts]**

Um quadrado $ABCD$ tem lado igual a n. Seus lados foram divididos em n partes iguais e, pelos pontos de divisão, traçaram-se paralelas à diagonal AC. Determine a soma dos comprimentos dessas paralelas, incluindo AC.

Questão 03 **[2,00 pts]**

Uma loja vende bombons de 7 sabores: avelã, chocolate branco, chocolate preto, coco, menta, morango e nozes. Eles são vendidos em caixas com 12 unidades.

(a) Supondo que seja possível o cliente escolher o sabor de cada uma das 12 unidades, quantas são as escolhas possíveis para uma caixa?

(b) Se um cliente quiser colocar na caixa pelo menos um bombom de cada sabor, quantas são as escolhas possíveis?

(c) Se um cliente quiser comprar uma caixa com pelo menos três e no máximo cinco bombons de avelã, quantas são as escolhas possíveis? (Não é necessário que haja todos os tipos nas caixas)

Questão 04 **[2,00 pts]**

Considere a sequência (a_n) definida por $a_1 = 9$ e $3a_{n+1} + a_n = 4$, para $n \geq 1$.
Sejam S_n a soma dos n primeiros termos dessa sequência e $b_n = a_n - 1$.

(a) Mostre que (b_n) é uma progressão geométrica, deixando claro quem é o primeiro termo e a razão.

(b) Determine o menor inteiro positivo n_0 tal que $|S_n - n - 6| < \dfrac{1}{125}$, para todo $n \geq n_0$.

Questão 05 **[2,00 pts]**

Dispõe-se de n moedas "viciadas" $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Sabe-se que, em um lançamento, a probabilidade de se obter cara na moeda $M_i, i = 1, 2, \ldots, n$, é $p_i = \dfrac{1}{(2i+1)}$. Seja P_i a probabilidade de se obter um número ímpar de caras quando são lançadas i moedas simultaneamente.

(a) Determine P_1, P_2 e P_3.

(b) Conjecture uma expressão para P_n e, em seguida, demonstre-a por indução.

(c) Determine P_{2015}.