Questão 1 [2,0 pt]

Duas retas r e s são paralelas. Na reta r marcamos 8 pontos e na reta s marcamos 9. Usando os pontos marcados como possíveis vértices:

(a) quantos triângulos podemos formar?

(b) quantos quadriláteros convexos podemos formar?

Questão 2 [2,0 pt]

(a) Mostre que se x é um número real não nulo e k é um inteiro positivo, então vale a igualdade abaixo:

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) .$$

(b) Use o item (a) para provar, por indução em n, que se $x + \frac{1}{x}$ é inteiro, então $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro para todo $n \geq 1$.

Questão 3 [2,0 pt]

Existem dois tipos de anos bissextos: aqueles que são múltiplos de 4, mas não são de 100 e aqueles que são múltiplos de 400. Por exemplo, serão anos bissextos 2024, 2052 e 2400; não serão anos bissextos 2038, 2075 e 2100.

(a) O matemático Martin Gardner nasceu no ano de 1914 e faleceu em 2010. Durante a vida desse grande recreacionista matemático, quantos anos foram bissextos?

(b) Sabendo que 26 de janeiro de 2014 foi domingo, qual o primeiro ano após 2014 em que 26 de janeiro será novamente num domingo?

(c) Baseado na convenção acima, se escolhermos um ano ao acaso, num ciclo de 400 anos, qual a probabilidade dele ser bissexto?

Questão 4 **[2,0 pt]**

Em um programa de televisão, um candidato deve responder 10 perguntas. A primeira pergunta vale 2 pontos, a segunda vale 4 pontos, a terceira vale 8 pontos, e assim sucessivamente, dobrando sempre. O candidato responde a todas as perguntas e ganha os pontos correspondentes às respostas que acertou.

(a) Qual o número de pontos que o candidato fará se acertar todas as perguntas?

(b) Quantas e quais perguntas que o candidato acertou se o número de pontos obtidos foi 1356?

Questão 5 **[2,0 pt]**

Considere a sequência $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$, para $n \geq 1$.

(a) Prove que $a_n^2 > 3$, para todo $n \geq 1$.

(b) Use o item (a) para mostrar que $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \geq 1$.