Avaliação Final - MA11 - 2015

Questão 01 [2,00 pts]

Mostre que a equação $m + \sqrt{x} = x$ tem solução única quando $m > 0$ ou $m = -\dfrac{1}{4}$, tem duas soluções quando $-\dfrac{1}{4} < m \leqslant 0$ e nenhuma solução quando $m < -\dfrac{1}{4}$. Interprete graficamente este resultado.

Questão 02 [2,00 pts]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e suponha que f satisfaz

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que $f(0) = 1$ e $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que $f(nx) = f(x)^n$, para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

(c) Estendendo o que foi provado no item (b), prove que, para todo $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos $f(rx) = f(x)^r$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Questão 03 [2,00 pts]

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, então uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é dita:

(i) **estritamente convexa** se, para quaisquer $x, y \in I$, com $x \neq y$, temos que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) < \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

(ii) **estritamente côncava** se, para quaisquer $x, y \in I$, com $x \neq y$, temos que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) > \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Assumindo que as funções abaixo são contínuas,

(a) prove que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é estritamente convexa.

(b) prove que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ é estritamente côncava.

Questão 04 [2,00 pts]

Sejam x e y números reais quaisquer.

(a) Mostre que $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(b) Mostre que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Questão 05 [2,00 pts]

Se a é irracional, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(ax) + \cos x$ não é periódica.