

Questão 1 [2,0 pt]

Mostre que, para todo $m > 0$, a equação $\sqrt{x} + m = x$ tem exatamente uma raiz.

Questão 2 [2,0 pt]

- (a) Seja p um número primo. Mostre que $\log_{10} p$ é irracional.
- (b) Mais geralmente, dado n um número inteiro positivo, mostre que $\log_{10} n$ é racional se, e somente se, n é uma potência de 10.

Questão 3 [2,0 pt]

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx$. Determine as constantes reais a e b de modo que $f^{-1}(\{3\}) = \{-1, \frac{3}{2}\}$ e, em seguida, determine o conjunto imagem de f .

Questão 4 [2,0 pt]

Seja $p(x)$ um polinômio do sétimo grau tal que

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 10.$$

Sabendo que $p(8) = 30$, determine $p(-3)$.

Questão 5 [2,0 pt]

- (a) Mostre que, para qualquer número real x , vale a identidade

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1.$$

- (b) Use o item anterior para mostrar que

$$\cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \text{ e } \operatorname{sen} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$