Avaliação 2 - MA11 - 2015.1 - Gabarito

Questão 01 [2,00]

Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois dos seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = a \cdot b^x$ e $F(x) = A \cdot B^x$, com $b, B \notin \{0, 1\}$, $a \neq 0$ e $A \neq 0$, são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

Solução

As equações $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ são equivalentes a

$$a \cdot b^{x_1} = A \cdot B^{x_2} \quad \text{e} \quad a \cdot b^{x_2} = A \cdot B^{x_2}.$$

Como A, B, a e b são todos não-nulos, temos

$$\left(\frac{b}{B}\right)^{x_1} = \frac{A}{a} = \left(\frac{b}{B}\right)^{x_2} \Rightarrow \left(\frac{b}{B}\right)^{x_1 - x_2} = 1.$$

Como $x_1 \neq x_2$, temos $x_1 - x_2 \neq 0$ e isto implica que $\dfrac{b}{B} = 1$, isto é, $b = B$. Segue que $\dfrac{A}{a} = 1$, ou seja, $a = A$.

Questão 02 [2,00]

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

(a) Mostre que, se $x \neq y$, então

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

(b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \lambda < 1$ e $x \neq y$, então

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Solução

(a) Como a desigualdade $(x-y)^2 > 0$ implica $xy < \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ para $x \neq y$, temos

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= a\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+y}{2}\right) + c \\
&= a\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{bx}{2} + \frac{by}{2} + c \\
&< a\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + \frac{bx}{2} + \frac{by}{2} + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} \\
&= \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}(ay^2 + by + c) \\
&= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y).
\end{aligned}$$

(b) Usando novamente a desigualdade $xy < \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ para $x \neq y$, temos

$$\begin{aligned}(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \\ &< \lambda^2 x^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2+y^2) + (1-\lambda)^2 y^2 \\ &= (\lambda^2 + \lambda(1-\lambda))x^2 + (\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2)y^2 \\ &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= a(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 + b(\lambda x + (1-\lambda)y) + c \\ &< a(\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2) + b(\lambda x + (1-\lambda)y) + (\lambda + (1-\lambda))c \\ &= \lambda(ax^2 + bx + c) + (1-\lambda)(ay^2 + by + c) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).\end{aligned}$$

Questão 03 [2,00]

(a) Se x é um número real não nulo, obtenha uma expressão para $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ em função de $t = x + \dfrac{1}{x}$.

(b) Use o item (a) para reduzir a equação $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$ numa equação quadrática na variável t.

(c) Resolva a equação do segundo grau em t e, em seguida, encontre as soluções da equação de quarto grau.

Solução

(a) Temos

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

(b) Dividindo a equação por x^2 temos

$$x^2 - x - 10 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0,$$

isto é,

$$(t^2 - 2) - t - 10 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0.$$

(c) Resolvendo a equação $t^2 - t - 12 = 0$ obtemos $t = 4$ ou $t = -3$. Como $x + \dfrac{1}{x} = t$ implica $x^2 - tx + 1 = 0$, obtemos as equações $x^2 - 4x + 1 = 0$ de raízes $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, e $x^2 + 3x + 1 = 0$, de raízes $-\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Portanto as raízes de $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$ são $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$, $-\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Questão 04 [2,00]

Se a e b são números reais não nulos, determine a imagem da função

$$f(x) = a\cos x + b \text{ sen } x.$$

Sugestão: Multiplique e divida por $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Solução

Temos
$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{ sen } x\right).$$
Visto que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, existe $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{ sen } \theta$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$. Desta forma
$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\text{sen } \theta \cos x + \cos\theta \text{ sen } x) = \sqrt{a^2+b^2}\text{ sen } (\theta + x),$$
cuja imagem é claramente $[-\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}]$.
Observação: Poderíamos ter escolhido $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{ sen } \theta$ e isto nos levaria a $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$, que tem a mesma imagem.

Questão 05 [**2,00**]

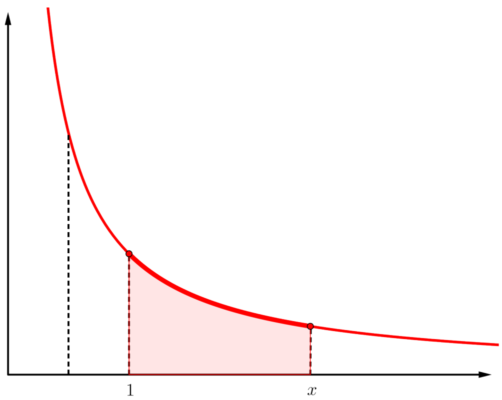
(a) Defina a função logaritmo natural, utilizando áreas.

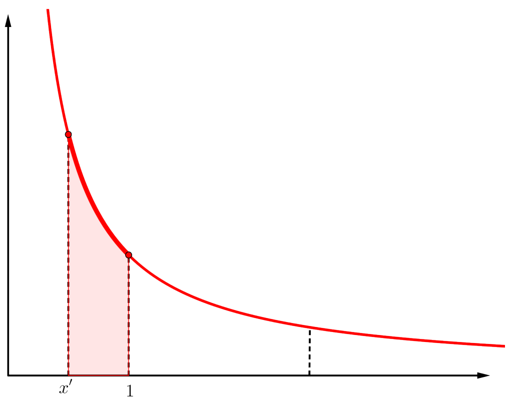
(b) Dado n inteiro positivo, use argumentos geométricos para provar que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$.

(c) Considere a sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$. Use o item (b) para provar que $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \geq 1$.

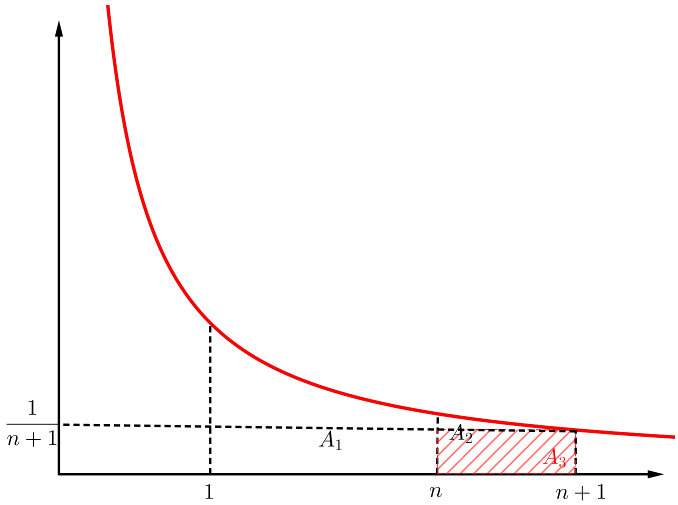
Solução

(a) Definimos a função $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como sendo a área da região limitada pelo gráfico de $f(t) = \frac{1}{t}$, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x$, para $x > 1$, e como sendo o negativo dessa área para $0 < x < 1$, como mostra a figura abaixo.





(b) Observando a figura



vemos que $\ln(n+1) = A_1 + A_2 = \ln n + A_2$, isto é $A_2 = \ln(n+1) - \ln n$. Por outro lado, $A_2 > A_3 = \dfrac{1}{n+1}$. Logo $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$ como queríamos.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] < 0, \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$