MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Avaliação 2 - MA11 - 2015.1

Questão 01 [**2,00 pts**]

Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois dos seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = a \cdot b^x$ e $F(x) = A \cdot B^x$, com $b, B \notin \{0, 1\}$, $a \neq 0$ e $A \neq 0$, são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.

Questão 02 [**2,00 pts**]

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

(a) Mostre que, se $x \neq y$, então $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) < \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

(b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \lambda < 1$ e $x \neq y$, então

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Questão 03 [**2,00 pts**]

(a) Se x é um número real não nulo, obtenha uma expressão para $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ em função de $t = x + \dfrac{1}{x}$.

(b) Use o item (a) para reduzir a equação $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$ numa equação quadrática na variável t.

(c) Resolva a equação do segundo grau em t e, em seguida, encontre as soluções da equação de quarto grau.

Questão 04 [**2,00 pts**]

Se a e b são números reais não nulos, determine a imagem da função $f(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x$.

Sugestão: Multiplique e divida por $\sqrt{a^2+b^2}$.

Questão 05 [**2,00 pts**]

(a) Defina a função logaritmo natural, utilizando áreas.

(b) Se n é um inteiro positivo, use argumentos geométricos para provar que $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$.

(c) Dada a sequência $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) - \ln n$, use o item (b) para provar que $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \geqslant 1$.