PROFMAT

MA11 – Números e Funções Reais – AV2 – 2014

SBM

Questão 1 [2,0 pt]

Divide-se um arame de comprimento L em duas partes. Uma das partes estará destinada para construir um quadrado e a outra parte para construir um triângulo equilátero. Qual é o comprimento de cada parte para que a soma das áreas das figuras obtidas seja a menor possível? É possível encontrar uma divisão tal que a soma das áreas do quadrado e do triângulo equilátero seja máxima? Justifique.

Questão 2 [2,0 pt]

(a) Usando o fato de que $x^4 = (x^4+1) - 1$, mostre que

$$x^{2014} = ((x^4+1)-1)^{503} \cdot x^2 = [(x^4+1) \cdot q(x) + (-1)^{503}] \cdot x^2$$

para algum polinômio $q(x)$. Conclua que o resto da divisão de x^{2014} por x^4+1 é $-x^2$.

(b) Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 2x^{2014} + 15x^5 + 9x - 2014$ pelo polinômio $d(x) = x^4 + 1$.

Sugestão para o item (b): Use o fato que o resto da divisão de $p_1(x) + p_2(x)$ por $d(x)$ é igual à soma $r_1(x) + r_2(x)$ dos restos $r_1(x)$ e $r_2(x)$ das divisões de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por $d(x)$, respectivamente.

Questão 3 [2,0 pt]

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Mostre que existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Questão 4 [2,0 pt]

Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população de uma cidade fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo-se que a população de uma cidade era de 750 mil habitantes em 1990 e 1 milhão de habitantes em 2010, calcule:

(a) A população estimada para 2020;

(b) Em que ano a população da cidade alcançará a marca de 2 milhões de habitantes?

Observação: Caso julgue necessário, use as igualdades aproximadas a seguir: $\ln 4 = 1,386$, $\ln 3 = 1,098$, $e^{0,144} = 1,154$

Questão 5 [2,0 pt]

Resolva a equação

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$