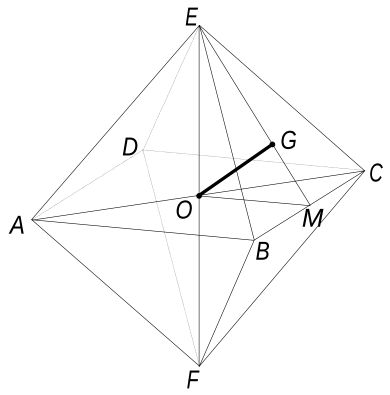
Questão 1. (pontuação: 1)

No octaedro regular duas faces opostas são paralelas. Em um octaedro regular de aresta a, calcule a distância entre duas faces opostas.

Obs: no seu cálculo, você pode afirmar as propriedades que está utilizando sem precisar demonstrá-las, mas deve descrevê-las detalhadamente.



Uma solução:

A figura acima mostra o octaedro regular $ABCDEF$ de aresta a. As diagonais AC e EF determinam o centro O do octaedro. Seja M o ponto médio da aresta BC. Como a reta BC é perpendicular ao plano (EOM), os planos (EBC) e (EOM) são perpendiculares. No triângulo retângulo EOM a altura OG relativa à hipotenusa é a distância do ponto O à face (EBC). Temos:

$OE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, metade da diagonal do quadrado $BEDF$,

$OM = \frac{a}{2}$, distância do centro do quadrado $ABCD$ ao lado BC, e

$EM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, altura do triângulo equilátero EBC.

Assim, a relação $OG.EM = OE.OM$ fornece $OG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

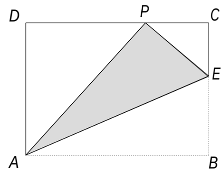
Como a distância de O à face (FDA) é igual ao comprimento de OG temos que a distância entre duas faces opostas do octaedro regular é o dobro do comprimento de OG, ou seja, igual a $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Outra solução:

Podemos decompor a pirâmide $ABCDE$ em quatro tetraedros congruentes ao tetraedro $BCEO$. A pirâmide $ABCDE$ tem volume igual a $V = \frac{a^2.OE}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ e o tetraedro $BCEO$ tem volume igual a $W = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}OG = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}OG$. Da igualdade $V = 4W$ segue que $OG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, logo a distância entre duas faces opostas do tetraedro regular é igual a $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Questão 2. (pontuação: 1,5)

A figura abaixo mostra uma folha de papel retangular $ABCD$ com $AB = 25$ cm e $BC = 20$ cm. Foi feita uma dobra no segmento AE de forma que o vértice B coincidiu com o ponto P do lado CD do retângulo.



(a) Calcule o comprimento do segmento DP.

(b) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos ADP e PCE.

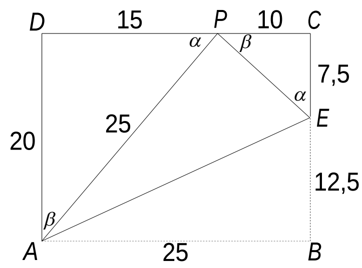
(c) Calcule o comprimento do segmento AE.

Uma solução:

a) Como os triângulos AEB e AEP são congruentes, então $AP = AB = 25$ cm . Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$DP = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15\,\text{cm}$$

.



b) Temos $PC = 25 - 15 = 10$ cm. O ângulo APE é reto pois é igual ao ângulo ABE. Assim, os ângulos α e β da figura são complementares e, como consequência, os triângulos ADP e PCE são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos e a razão de semelhança é $k = \frac{AD}{PC} = \frac{20}{10} = 2$. Assim, a razão entre as áreas desses triângulos é $k^2 = 4$.

c) Da semelhança dos triângulos ADP e PCE tem-se $\frac{CE}{PC} = \frac{DP}{AD}$, ou seja, $\frac{CE}{10} = \frac{15}{20}$, o que dá $CE = 7,5$ cm e, consequentemente, $BE = 12,5$ cm.

O teorema de Pitágoras pode ser usado no triângulo ABE para calcular o comprimento de AE. Isto dá $AE = \sqrt{25^2 + (12,5)^2}$ cm.

Observando que, neste problema, AB é o dobro de BE, o cálculo acima é imediato. Se um triângulo retângulo possui catetos a e $2a$, então sua hipotenusa mede $a\sqrt{5}$. Assim, neste caso, obtemos facilmente que

$$AE = 12,5\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{2}\ \text{cm}$$

Questão 3. (pontuação: 1)

Em uma caixa há três dados aparentemente idênticos. Entretanto, apenas dois deles são normais, enquanto o terceiro tem três faces 1 e três faces 6. Um dado é retirado ao acaso da caixa e lançado duas vezes.

Se a soma dos resultados obtidos for igual a 7, qual é a probabilidade condicional de que o dado sorteado tenha sido um dos dados normais?

Uma solução:

Queremos obter

$$P(\text{dado normal}|\text{soma } 7) = \frac{P(\text{dado normal e soma } 7)}{P(\text{soma}7)}$$

Mas

$$P(\text{soma } 7|\text{dado normal}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{soma } 7|\text{dado anormal}) = \frac{6 \times 3}{36} = \frac{1}{2}$$

(o primeiro resultado pode ser qualquer das faces; o segundo, qualquer das três faces diferentes da obtida no primeiro lançamento). Logo

$$P(\text{dado normal}|\text{soma } 7) = \frac{P(\text{dado normal e soma } 7)}{P(\text{soma}7)} =$$

$$\frac{P(\text{dado normal}) \times P(\text{soma } 7|\text{dado normal})}{P(\text{dado normal}) \times P(\text{soma } 7|\text{dado normal}) + \text{P}(\text{dado anormal}) \times P(\text{soma } 7|\text{dado anormal})} =$$

$$\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Outra solução:

Nomeemos os dados da seguinte forma: N_1 e N_2 (dados normais) e A (dado anormal).

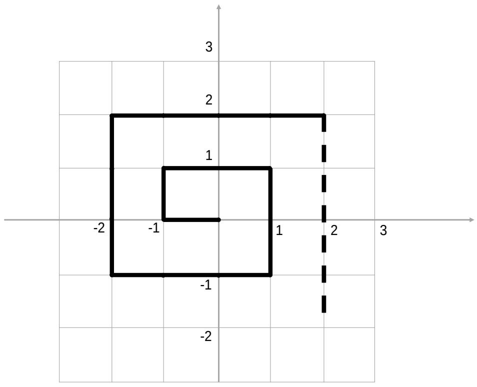
Se o dado retirado for N_1 são 36 casos possíveis para dois lançamentos deste dado e somente 6 casos favoráveis com soma 7. Se o dado retirado for N_2 também são 36 casos possíveis para dois lançamentos deste dado e somente 6 casos favoráveis com soma 7. Se o dado retirado for A são 36 casos possíveis para dois lançamentos deste dado, mas agora 18 casos favoráveis com soma 7.

Logo, no total são 30 os casos possíveis para que a soma dê 7 e dentre estes, somente em 12 a soma é proveniente de dados normais. Portanto

$$P(\text{dado normal}|\text{soma } 7) = \frac{P(\text{dado normal e soma } 7)}{P(\text{soma } 7)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

Questão 4. (pontuação: 1,5)

A linha poligonal da figura começa na origem e passa por todos os pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano.

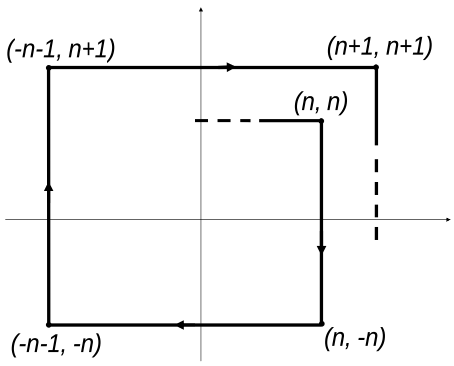


(a) Seja n um número inteiro não negativo. Mostre que o comprimento $c(n)$ da linha poligonal da origem até o ponto (n, n) é igual a $4n^2$.

(b) Qual é o comprimento da linha poligonal entre os pontos $(7, 10)$ e $(11, -20)$?

Uma solução:

a) A passagem do ponto (n, n) para o ponto $(n + 1, n + 1)$ é ilustrada no diagrama abaixo:



Assim, o comprimento adicional ao passar de (n, n) para $(n + 1, n + 1)$ é $2n + (2n + 1) + (2n + 1) + (2n + 2) = 8n + 4 = 4(2n + 1)$.

A partir daí, pode-se calcular diretamente a soma $4(2.0+1)+4(2.1+1)+...+4(2(n-1)+1) = 4(1+3+...+(2n-1)) = 4(1 + 2n - 1).n/2 = 4n^2$.

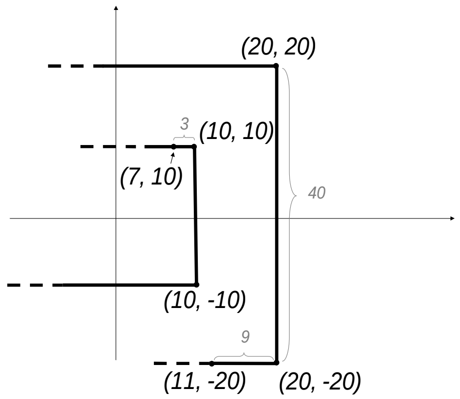
Alternativamente, pode-se recorrer à indução finita:

A fórmula dada claramente vale para $n = 0$. Suponhamos válida para n. Para $n+1$, o comprimento é $4n^2+4(2n+1) = 4(n + 1)^2$; logo, a fórmula vale para $n + 1$. Portanto, pelo PIF, vale a fórmula para todo n inteiro não negativo.

Outra solução:

Até chegar ao ponto (n, n), teremos passado por todos os pontos de coordenadas inteiras do retângulo $[-n, n-1] \times [-(n-1), n]$, que possui $2n.2n$ pontos; a linha poligonal tem, assim, comprimento igual a $(4n^2 - 1) + 1$ (a primeira parcela exprime o comprimento da poligonal no retângulo acima; a segunda, corresponde ao segmento final).

b) Como ilustra o diagrama abaixo, o comprimento entre $(7, 10)$ e $(11, -20,)$ é $c(20) - c(10) + 3 + 40 + 9 = 4.20^2 - 4.10^2 + 52 = 1252$.



Questão 5. (pontuação: 1)

Um corpo está impregnado de uma substância radioativa cuja meia-vida é um ano. Quanto tempo levará para que sua radioatividade se reduza a 10% do que é?

Uma solução:

Se M_0 é a massa da substância radioativa no ano $t = 0$ e M é a massa da mesma substância após t anos, então $M = M_0.a^t$, para um certo a, com $0 < a < 1$. A informação sobre a meia-vida nos diz que $M_0.a^1 = \frac{1}{2}M_0$, logo $a = \frac{1}{2}$.

Queremos achar t de modo que $M_0.a^t = \frac{M_0}{10}$, ou seja $(\frac{1}{2})^t = \frac{1}{10}$. Então, tomando logaritmos na base 10,

$$t = \frac{1}{log_{10} 2}\,.$$

[Como $log_{10} 2 \approx 0,3010$ então $t \approx 3,3 \approx$ 3 anos e 4 meses]

Questão 6. (pontuação: 1,5)

Qual é o menor valor da expressão $\sqrt{16x/y} + \sqrt{y/(81x)}$ quando x e y são números reais positivos quaisquer? Justifique sua resposta.

Uma solução:

A expressão dada é o dobro da média aritmética entre $\sqrt{16x/y}$ e $\sqrt{y/(81x)}$, logo seu valor é maior do que ou igual ao dobro da média geométrica desses números. Ou seja:

$$\sqrt{16x/y} + \sqrt{y/(81x)} \geq 2.\sqrt{\sqrt{16x/y}.\sqrt{y/(81x)}} = \frac{4}{3}$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $16x/y = y/(81x)$, isto é $16.81.x^2 = y^2$. Isto acontece, por exemplo, quando $x = 1$ e $y = 36$. Em outras palavras, com $x = 1$ e $y = 36$, a expressão dada atinge seu valor mínimo, que é igual a $\frac{4}{3}$. Há, entretanto, infinitos pontos para os quais este valor mínimo é atingido.

Poderíamos também "completar quadrados" para obter a igualdade

$$\sqrt{16x/y} + \sqrt{y/(81x)} = ((16x/y)^{\frac{1}{4}} - (y/(81x))^{\frac{1}{4}})^2 + 2.(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}} = ((16x/y)^{\frac{1}{4}} - (y/(81x))^{\frac{1}{4}})^2 + \frac{4}{3}$$

e proceder como acima.

Questão 7. (pontuação: 1)

Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é inteiro o número $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n$.

Uma solução:

Pelo Pequeno Teorema de Fermat temos que $n^7 \equiv n \bmod 7$ e $n^5 \equiv n \bmod 5$, logo 7 divide $n^7 - n$ e 5 divide $n^5 - n$, para todo n. Portanto, a igualdade

$$\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n = \frac{n^7 - n}{7} + \frac{n^5 - n}{5} + n$$

nos permite concluir o desejado.

Outra solução:

Basta usar o Princípio de Indução Finita:

Se $n = 0$ a expressão é também igual a zero. Observe que quando $n = 1$, a expressão torna-se $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{23}{35} = 1$.

Suponha agora que $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n$ é um número inteiro e mostremos que $\frac{1}{7}(n+1)^7 + \frac{1}{5}(n+1)^5 + \frac{23}{35}(n+1)$ também é inteiro.

Expandindo em seus binômios de Newton

$$\{\frac{1}{7}C(7,0)n^7 + \frac{1}{7}C(7,1)n^6 + ... + \frac{1}{7}C(7,7)n^0\} + \{\frac{1}{5}C(5,0)n^5 + \frac{1}{5}C(5,1)n^4 + ... + \frac{1}{5}C(5,5)n^0\} + \frac{23}{35}n + \frac{23}{35}$$

vemos que todos os termos desta última expressão são números inteiros, exceto talvez $\frac{1}{7}n^7$, $\frac{1}{5}n^5$, $\frac{23}{35}n$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{23}{35}$. Mas, por hipótese de indução, a soma dos três primeiros elementos desta última lista é um número inteiro e a soma dos três restantes é igual a 1, logo a expressão toda é um inteiro.

Questão 8. (pontuação: 1,5)

Um número natural m é dito um *quadrado* se existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $m = a^2$.

(a) Mostre que o algarismo das unidades (na base 10) de um quadrado só pode ser um dos seguintes: 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

(b) Mostre que todo quadrado é da forma $4n$ ou $4n + 1$.

(c) Mostre que nenhum número que escrito na base 10 tem a forma $m = dd\ldots d$ (todos os algarismos iguais), com $m > 10$ e $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, é um quadrado.

Uma solução:

a) Escrevamos $a = 10b + c$, com $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Logo,

$$m = a^2 = (10b + c)^2 = 10(10b^2 + 2bc) + c^2.$$

Portanto, o algarismo das unidades de m coincide o algarismo das unidades de c^2. Fazendo variar c no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos os seguintes possíveis valores:

$$c^2 = 0,\ c^2 = 1,\ c^2 = 4,\ c^2 = 9,\ c^2 = 16,$$

$$c^2 = 25,\ c^2 = 36,\ c^2 = 49,\ c^2 = 64,\ c^2 = 81,$$

o que prova a asserção.

b) Todo número natural a se escreve na forma $4s + r$, com $r = 0, 1, 2$ ou 3.

Temos que

$r = 0$: $m = a^2 = (4s)^2 = 4(4s^2)$,

$r = 1$: $m = a^2 = (4s + 1)^2 = 4(4s^2 + 2s) + 1$,

$r = 2$: $m = a^2 = (4s + 2)^2 = 4(4s^2 + 4s) + 4 = 4(4s^2 + 4s + 1)$,

$r = 3$: $m = a^2 = (4s + 3)^2 = 4(4s^2 + 6s) + 9 = 4(4s^2 + 6s + 2) + 1$,

logo m é da forma $4n$ ou $4n + 1$.

[Observe também que se dois números a e b deixam restos r_1 e r_2, respectivamente, na divisão por um número c, então o produto ab deixa o mesmo resto na divisão por c que o produto r_1r_2. Assim, apenas temos que olhar para 0^2, 1^2, 2^2, 3^2 *e observar que estes quatro números deixam resto 1 ou 0 na divisão por 4].*

c) Os casos $d = 2, 3, 7$ e 8 são consequências imediatas do item (a).

Os casos $d = 1, 4$ e 9 são tratados a seguir. Temos que

$$m = 11 \dots 1 = 100x + 11 = 4(25x + 2) + 3,$$

logo m é da forma $4n + 3$. Portanto, m não é um quadrado.

Os números $m = 44 \dots 4 = 4(11 \dots 1)$ e $m = 99 \dots 9 = 9(11 \dots 1)$ não podem ser quadrados, pois, caso contrário, $11 \dots 1$ seria um quadrado.

O caso $d = 5$ segue do fato de

$$m = 55 \dots 5 = 100y + 55 = 4(25y + 13) + 3,$$

logo da forma $4n + 3$.

O caso $d = 6$ segue do fato de $m = 66 \dots 6 = 4(25z + 16) + 2$, logo da forma $4n + 2$.