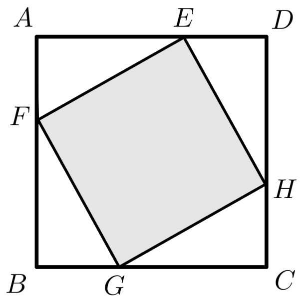
[01] Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 1 e $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{DE} = x$. Qual o valor de x para que o quadrado $EFGH$ tenha a menor área possível?



(A) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) 1

Solução
Resposta: D

Se ℓ é o comprimento do lado do quadrado $EFGH$ então, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\ell^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$.

Mas $x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Assim o menor valor para ℓ^2 ocorre quando $x - \dfrac{1}{2} = 0$, ou seja, para $x = \dfrac{1}{2}$.

---

[02] A equação de estado de um gás ideal é

$$PV = nRT,$$

onde P é a pressão em Pascal, V é o volume ocupado pelo gás em metros cúbicos, n é o número de mols da amostra gasosa, R é a constante universal dos gases perfeitos e T é a temperatura em Kelvin. Supondo que para uma certa amostra o número de mols se mantenha constante, é correto afirmar que:

(A) quanto maior o volume ocupado, maior a pressão.

(B) n e T são proporcionais.

(C) $\dfrac{T}{P}$ é inversamente proporcional a V.

(D) nR é proporcional a T.

(E) P e $\dfrac{V}{T}$ são inversamente proporcionais.

Solução
Resposta: E

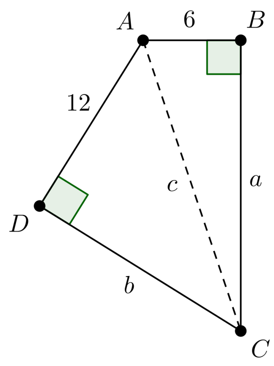
P é proporcional ao inverso de $\dfrac{V}{T}$, pois $P = nR \cdot \dfrac{T}{V}$ com nR constante.

Portanto são grandezas inversamente proporcionais.

[03] No quadrilátero $ABCD$, os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos. Sendo $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CD} = b$ e $\overline{AD} = 12$, o valor de $\sqrt{a^2 - b^2}$ é

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $6\sqrt{5}$ (C) 3 (D) $8\sqrt{3}$ (E) 6

Solução
Resposta: A



Se chamarmos de c a medida da diagonal AC, teremos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$6^2 + a^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = c^2.$$

Assim, $6^2 + a^2 = 12^2 + b^2$, logo $a^2 - b^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$.

Com isso, $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

---

[04] As ternas abaixo são medidas dos comprimentos dos lados de triângulos. Em qual das alternativas temos, nessa ordem, as medidas de um triângulo acutângulo, de um triângulo retângulo e de um triângulo obtusângulo?

(A) $(2,3,4)$, $(3,4,5)$ e $(4,7,8)$.

(B) $(4,7,8)$, $(5,12,13)$ e $(4,8,9)$.

(C) $(6,7,9)$, $(4,5,6)$ e $(4,8,9)$.

(D) $(8,9,11)$, $(3,4,5)$ e $(4,6,7)$.

(E) $(8,10,13)$, $(6,8,10)$ e $(4,5,7)$.

Solução
Resposta: B

Vamos analisar algumas ternas que aparecem nas respostas e comparar o quadrado do maior lado com a soma dos quadrados dos dois lados menores. Se o quadrado do lado maior for maior, o triângulo é obtusângulo; se for igual ele é retângulo; se for menor, é acutângulo.

$(4,7,8)$: $8^2 = 64 < 65 = 49 + 16 = 7^2 + 4^2$, assim temos um triângulo acutângulo e o item (A) está incorreto.

$(4,5,6)$: $6^2 = 36 < 41 = 16 + 25 = 4^2 + 5^2$, assim temos um triângulo acutângulo e o item (C) está errado.

$(5,12,13)$: $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$, assim temos um triângulo retângulo.

$(4,8,9)$: $9^2 = 81 > 80 = 64 + 16 = 8^2 + 4^2$, assim temos um triângulo obtusângulo. Juntando os dois cálculos acima, segue que o item (B) está correto.

$(4,6,7)$: $7^2 = 49 < 52 = 36 + 16 = 6^2 + 4^2$, assim temos um triângulo acutângulo e o item (D) está incorreto.

$(8,10,13)$: $13^2 = 169 > 164 = 100 + 64 = 10^2 + 8^2$, assim temos um triângulo obtusângulo e o item (E) está incorreto.

---

[05] Um dado não viciado será lançado duas vezes. Seja p_i a probabilidade da soma dos resultados obtidos ser igual a i. Então é correto afirmar que:

(A) $p_5 < p_6 < p_7$ (B) $p_5 < p_6 < p_8$ (C) $p_6 = p_8 < p_9$

(D) $p_5 = p_9 > p_8$ (E) $p_5 < p_8 < p_9$

Solução
Resposta: A

Listamos as maneiras que pode ser obtida cada uma das somas abaixo:

$5 : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$

$6 : (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$

$7 : (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$

$8 : (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$

$9 : (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$

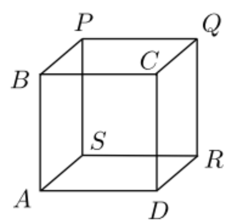
Como a quantidade de resultados possíveis é igual a 36 segue que:

$p_5 = \frac{4}{36}, p_6 = \frac{5}{36}, p_7 = \frac{6}{36}, p_8 = \frac{5}{36}, p_9 = \frac{4}{36}$

Assim a única alternativa correta é a (A).

---

[06] A seguinte figura mostra um cubo.



O número de triângulos equiláteros que podem ser formados cujos vértices coincidam com os do cubo é:

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 24

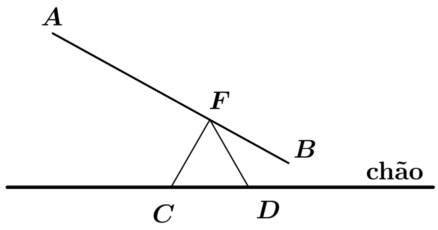
Solução
Resposta: C

Os vértices do cubo podem ser ligados de três maneiras: por uma aresta do cubo, por uma diagonal da face, por uma diagonal interna do cubo. Dessas três, a única maneira de formarmos um triângulo equilátero é com as diagonais das faces.

Note que de cada vértice é possível formar três triângulos distintos, por exemplo, com o vértice A formamos os triângulos ACP, ACR e APR. Sendo assim, com os 8 vértices do cubo teremos um total de 24 triângulos equiláteros. No entanto cada um dos triângulos foi contado três vezes, por cada vértice de cada triângulo, logo teremos 8 triângulos equiláteros distintos.

---

[07] A figura esquematiza o perfil de uma máquina simples, conhecida como *alavanca*. O triângulo equilátero CDF do esquema tem lados de medida $\sqrt{3}$ metros, estando o lado CD em contato com o chão horizontal. O segmento AB representa uma haste rígida e retilínea, de comprimento 6 metros, que gira em torno do ponto fixo F, sendo $\overline{BF} = 2$ m.

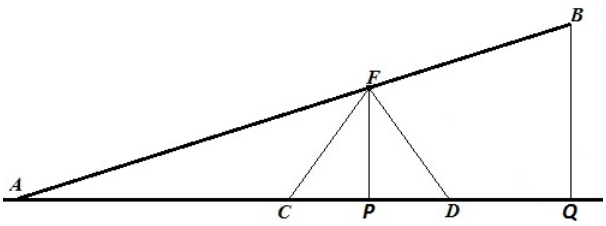


Quando A tocar o chão, a altura de B, em metros, em relação ao chão será

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{9}{4}$ (E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Solução
Resposta: D

A figura abaixo mostra a situação do problema, onde P e Q são, respectivamente, as projeções de F e B sobre o chão horizontal.



Como todos os pontos são coplanares, inclusive P e Q, então FP é altura do triângulo equilátero CDF. Sendo $\ell = \sqrt{3}$ metros o lado desse triângulo, então:

$$\overline{FP} = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ m} = \frac{3}{2} \text{ m}.$$

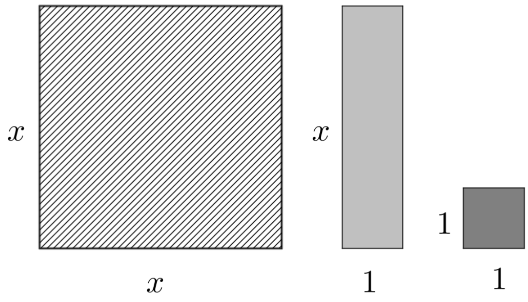
Como $A\hat{P}F = A\hat{Q}B = 90°$ e $P\hat{A}F = Q\hat{A}B$ (ângulo comum), então os triângulos AFP e ABQ são semelhantes pelo critério *ângulo-ângulo*. Disso e sabendo-se que $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{FB} = 4$ metros, tem-se:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{4},$$

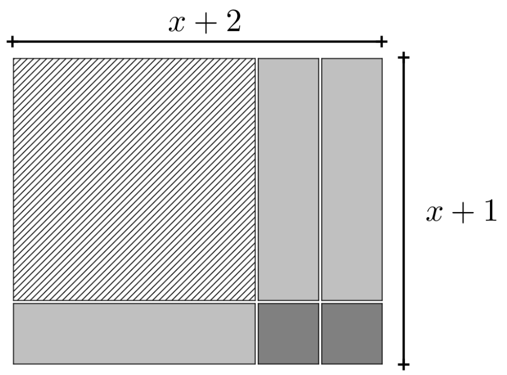
donde conclui-se que a altura do ponto B em relação ao chão é $\overline{BQ} = \frac{9}{4}$ m.

---

[08] O *Algeplan* é um material manipulativo utilizado como ferramenta no ensino de polinômios. Em sua versão mais simples, ele consiste em 3 tipos de peças (conforme figura abaixo) que representam os monômios e a unidade. Um quadrado grande de área x^2, um retângulo de área x e um quadrado pequeno de área 1.



Usando essas peças, sem sobreposição, é possível montar retângulos maiores cujas áreas podem ser calculadas de duas formas: pela soma das áreas das peças que compõem a figura e pelo produto da base pela altura, obtendo assim a fatoração, conforme o exemplo a seguir.
Determine qual dos polinômios abaixo **não** é possível ser representado por um retângulo usando somente as peças do *Algeplan*.



$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

(A) x^2+5x+6 (B) $3x^2+8x+4$ (C) $2x^2+4x+2$

(D) x^2+6x+9 (E) $2x^2+5x+4$

Solução
Resposta: E

O item (E) é o único polinômio que não pode ser fatorado como produto de monômios com coeficientes inteiros positivos. De fato, as raízes da equação correspondente são complexas.

(A) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.
(B) $3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2)$.
(C) $2x^2+4x+2=(2x+2)(x+1)$.
(D) $x^2+6x+9=(x+3)(x+3)$.
(E) $2x^2+5x+4=(2x+1)(x+2)+2$.

---

[09] Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1. \end{cases}$$

Com a solução $(1,0)$ do sistema acima construímos o segundo sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

cuja solução $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ é usada para formar o terceiro sistema

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ \\ x-y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Prosseguindo desse modo, qual é a solução do décimo sistema?

(A) $\left(1,\frac{1}{32}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{32},0\right)$ (C) $(1,1)$ (D) $\left(1,-\frac{1}{32}\right)$ (E) $\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)$

Solução
Resposta: E

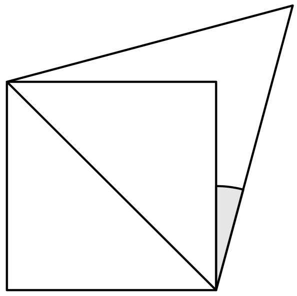
Observando quea solução do sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=a \end{cases}$ é $(a,0)$ e a solução dos sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=0 \end{cases}$ é $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, concluímos que as soluções dos sistemas são:

$$(1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},0\right),\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right),\left(\frac{1}{8},0\right),\left(\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right),\left(\frac{1}{16},0\right),\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)$$

Portanto, a resposta é $\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)$.

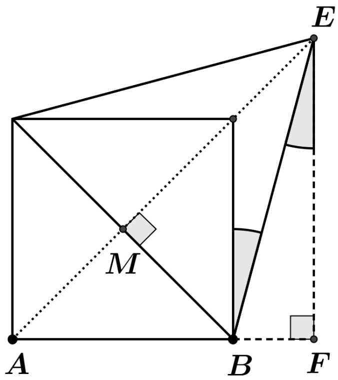
---

[10] Na figura abaixo, tem-se um quadrado e um triângulo equilátero, coplanares. Qual o seno do ângulo destacado?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (E) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Solução
Resposta: C



Seja ℓ a medida do lado do quadrado e α a medida do ângulo cujo seno queremos obter. Na figura acima, como EF é paralelo aos lados verticais do quadrado, temos que $B\hat{E}F = \alpha$. Além disso, AM é metade da diagonal do quadrado, logo $\overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

O lado do triângulo equilátero terá medida igual à da diagonal do quadrado, ou seja $\ell\sqrt{2}$. Com isso, a altura EM deste triângulo terá medida

$$\overline{EM} = \left(\ell\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}.$$

Assim,

$$\overline{AE} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} + \frac{\ell\sqrt{6}}{2} = \frac{\ell\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Como $F\hat{A}E = 45^\circ$, temos

$$\overline{AF} = \overline{AE}\cdot\cos 45^\circ = \frac{\ell\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Logo

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \frac{\ell\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} - \ell = \frac{\ell\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

Com isso,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{\ell(\sqrt{3}-1)}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Outra solução:

O ângulo α cujo seno queremos é a diferença entre um ângulo interno do triângulo equilátero (60°) e o ângulo entre o lado do quadrado e sua diagonal ($90^\circ/2 = 45^\circ$). Assim,

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(60^\circ - 45^\circ\right) = \operatorname{sen}\left(60^\circ\right)\cos\left(45^\circ\right) - \operatorname{sen}\left(45^\circ\right)\cos\left(60^\circ\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

[11] Em uma urna há 7 bolas vermelhas, 5 azuis e 4 brancas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual a probabilidade de que tenham sido retiradas uma bola vermelha e uma branca?

(A) $\frac{7}{60}$ (B) $\frac{7}{30}$ (C) $\frac{23}{120}$ (D) $\frac{7}{16}$ (E) $\frac{1}{8}$

Solução
Resposta: B

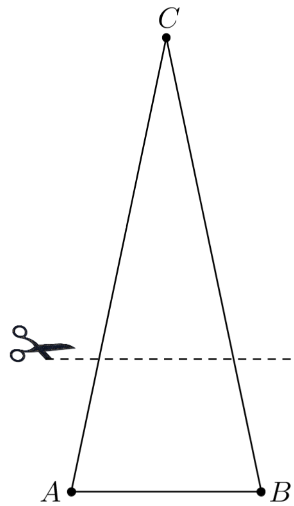
O espaço amostral é o conjunto de todos os pares de bolas distintas que tem $16 \times 15 = 240$ elementos.

Há duas maneiras de retirarmos uma bola vermelha e um branca, a saber:
a primeira é vermelha e a segunda é branca, isso pode ser feito de $7 \times 4 = 28$ modos;
a primeira é branca e a segunda é vermelha, isso pode ser feito de $4 \times 7 = 28$ modos.

Portanto a probabilidade de que tenham sido retiradas uma branca e uma vermelha é igual a $\frac{28+28}{240} = \frac{56}{240} = \frac{7}{30}$.

---

[12] Considere um triângulo isósceles de base 5 e de altura 12. Decide-se cortar o triângulo paralelamente à base de modo que as duas novas figuras geradas (um novo triângulo isósceles e um trapézio) possuam a mesma área.

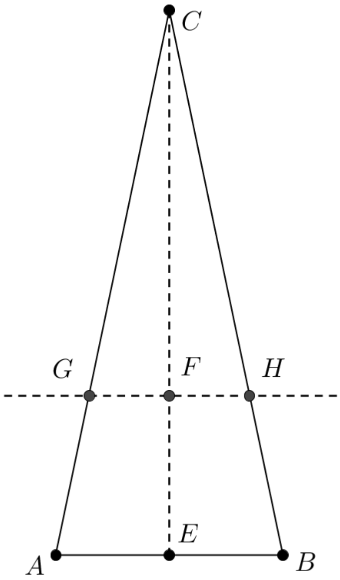


Nestas condições, a medida da base do novo triângulo isósceles será igual a

(A) $5\sqrt{2}$ (B) $6\sqrt{2}$ (C) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

Solução
Resposta: C

Denominamos os novos pontos após o corte da seguinte forma:



Através da semelhança dos triângulos retângulos BCE e CFH que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{FH}}.$$

Denominando a altura do novo triângulo CGH por h e a sua base por b, temos da relação anterior que

$$\frac{12}{h} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow h = \frac{12b}{5}.$$

Ora, o corte do triângulo original foi feito de forma que a área do novo triângulo fosse metade do original, então temos que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b \cdot h = 30.$$

Utilizando a igualdade encontrada para h anteriormente, temos que

$$b \cdot \frac{12b}{5} = 30 \Rightarrow b^2 = \frac{150}{12} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{50}{4}} \Rightarrow b = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Outra Solução:

Sejam $h = \overline{CF}$ e $x = \overline{GH}$. Logo $\overline{FE} = 12 - h$.

A área do triângulo ABC é igual a $\frac{5 \times 12}{2} = 30$.

Como desejamos que o triângulo GCH e o trapézio $AGHB$ tenham a mesma

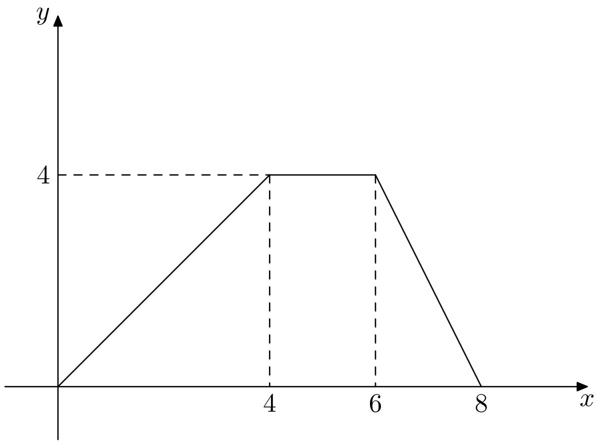
área, segue que $\frac{xh}{2} = 15$ e $\frac{5+x}{2} \cdot (12-h) = 15$.

Assim temos que $xh = 30$ e $60 + 12x - 5h - xh = 30$.

Substituindo xh por 30 na última equação temos que $12x - 5h = 0$, ou seja, $h = \frac{12}{5}x$.

Portanto $x\frac{12}{5}x = 30$, ou seja, $x^2 = \frac{25}{2}$ e assim $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

[13] O gráfico da função $y = f(x)$, formado por três segmentos de reta, está representado na figura abaixo.



Sobre a função f podemos afirmar que:

(A) $f(2) + f(3) = f(5)$

(B) $f(1) + f(2) = f(7)$

(C) $f(2) + f(4) = f(5)$

(D) $f(5) - f(3) = f(7)$

(E) $f(7) - f(2) = f(8)$

Solução
Resposta: E

A equação da reta que passa pelos pontos $(6, 4)$ e $(8, 0)$ é dada por $y = -2x + 16$, logo $f(7) = 2$.

Além disso, temos que $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 4, f(8) = 0$.

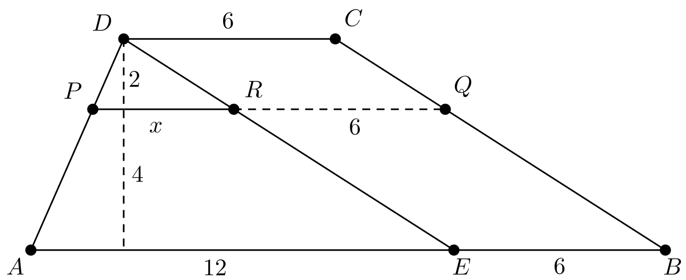
A única afirmação correta é $f(7) - f(2) = 2 - 2 = f(8)$.

---

[14] As medidas das bases AB e CD de um trapézio $ABCD$ são, respectivamente, 18 e 6. Uma reta paralela às bases intersecta os lados AD e BC nos pontos P e Q. Sabendo que a distância desta paralela a CD é 2 e a distância a AB é 4, a medida do segmento PQ é:

(A) 16 (B) 14 (C) 10 (D) 9 (E) 6

Solução
Resposta: C



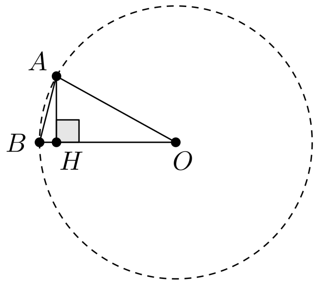
Traçando o segmento DE, paralelo ao lado BC, como na figura acima, os triângulos ADE e PDR serão semelhantes, pois PQ é paralelo a AB. Com isso, sendo $x = \overline{PR}$, como as alturas dos triângulos ADE e PDR são 2 e 6, respectivamente, temos

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{6},$$

logo $x = 4$. Assim, $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} = x + 6 = 10$.

---

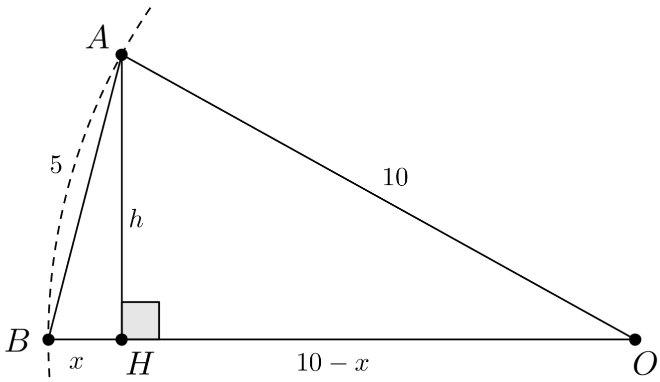
[15] Na figura, a corda AB tem medida 5 e o raio OA mede 10.



A medida do segmento AH, perpendicular ao raio OB, é igual a

(A) $\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$ (B) 5 (C) $5\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ (E) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Solução
Resposta: A



Chamando de x a medida do segmento BH, como na figura acima, temos, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos AHB e AHO,

$$h^2 + x^2 = 5^2 \text{ e } h^2 + (10 - x)^2 = 10^2.$$

Com isso, $h^2 = 25 - x^2$ e $h^2 = 100 - (10 - x)^2 = 20x - x^2$.
Logo $25 - x^2 = 20x - x^2$ e assim $x = \dfrac{5}{4}$.
Substituindo na equação $h^2 + x^2 = 5^2$, temos

$$h^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25,$$

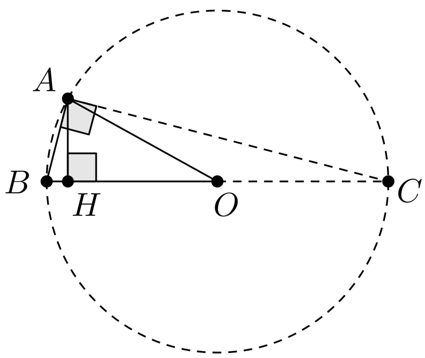
logo

$$h^2 = 25 - \frac{25}{16} = \frac{400}{16} - \frac{25}{16} = \frac{375}{16}.$$

Com isso,

$$\overline{AH} = h = \sqrt{\frac{375}{16}} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

Outra solução:



Traçando o diâmetro BC e a corda AC da figura, o triângulo ABC será retângulo em A, pois o ângulo $B\hat{A}C$ determina um arco de $180°$.

Chamando de y a medida de AC, como $\overline{BC} = 20$ pelo Teorema de Pitágoras,

$$y^2 + 5^2 = 20^2,$$

logo $y^2 = 375$, e então $y = 5\sqrt{15}$.

Temos ainda, pela semelhança dos triângulos ABH e ABC, que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, logo

$$5 \cdot 5\sqrt{15} = 20 \cdot \overline{AH}$$

e, com isso

$$\overline{AH} = \frac{25\sqrt{15}}{20} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

---

[16] Em um determinado momento, o preço da gasolina pura na refinaria era de R\$ $1,60$ por litro e o preço do álcool anidro na usina era de R\$ $1,20$ por litro. Sabe-se que a gasolina vendida nos postos contém 75% de gasolina pura e 25% de álcool anidro e que o preço dessa mistura corresponde a 40% do preço de venda da gasolina nos postos. O preço pago pelo consumidor por litro de gasolina nos postos é

(A) R\$ $3,37$ (B) R\$ $3,42$ (C) R\$ $3,49$ (D) R\$ $3,62$ (E) R\$ $3,75$

Solução
Resposta: E

O preço da gasolina na refinaria, sem impostos, é

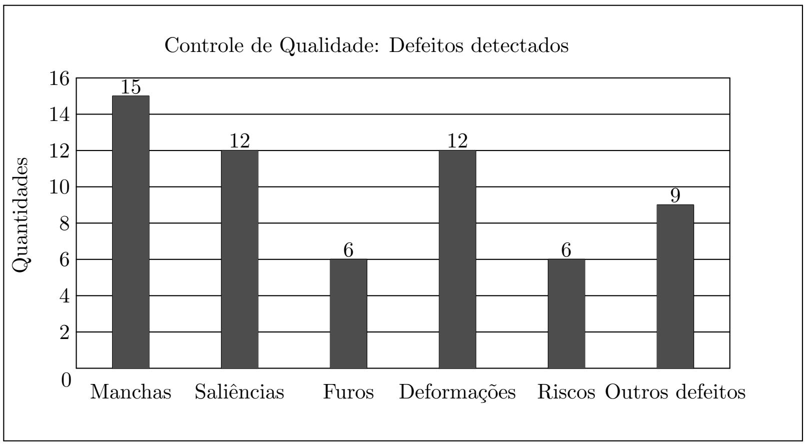
$$\text{R\$ } 1,60 \times 0,75 + \text{R\$ } 1,20 \times 0,25 = \text{R\$ } 1,50.$$

Visto que o preço na refinaria compõe 40% do preço final, o preço final é

$$\text{R\$ } 1,50 \times \frac{100}{40} = \text{R\$ } 3,75.$$

---

[17] O administrador responsável pelo controle de qualidade de uma fábrica de artigos plásticos registrou, em um gráfico, os diversos defeitos nas peças não aprovadas segundo critérios de qualidade durante um certo período, conforme abaixo.



É correto afirmar que

(A) Os defeitos referentes às manchas superam em 15% as deformações.

(B) As deformações consistem em 30% dos defeitos detectados.

(C) 35% dos defeitos detectados correspondem a riscos ou manchas.

(D) 45% dos defeitos detectados são de manchas, saliências ou furos.

(E) Os problemas de deformação superam em 15% os problemas de furos nos produtos.

Solução
Resposta: C

Foi detectado um total de $15+12+6+12+6+9=60$ defeitos através do controle de qualidade. Inicialmente calculemos o valor percentual referente a cada tipo de defeito:

- Manchas: $\dfrac{15}{60}\times 100 = 25\%$;
- Saliências: $\dfrac{12}{60}\times 100 = 20\%$;
- Furos: $\dfrac{6}{60}\times 100 = 10\%$;
- Deformações: $\dfrac{12}{60}\times 100 = 20\%$;
- Riscos: $\dfrac{6}{60}\times 100 = 10\%$;
- Outros: $\dfrac{9}{60}\times 100 = 15\%$.

Analisando as alternativas, concluímos que 35% dos defeitos detectados (10% + 25%) correspondem a riscos ou manchas.

---

[18] Dois números reais são tais que a *média aritmética* entre eles é 25 e a *média geométrica* é 20. Quais são esses números?

(A) 10 e 30 (B) 20 e 30 (C) 10 e 40 (D) 15 e 35 (E) 5 e 45

Solução
Resposta: C

Chamando de x e de y os números procurados, temos que $\dfrac{x+y}{2}=25$ e $\sqrt{xy}=20$, onde se usou a definição de média aritmética e geométrica entre dois números, respectivamente. Assim, $x+y=50$ e $xy=400$. Isolando y na primeira e substituindo na segunda igualdade obtém-se a equação de segundo grau $-x^2+50x-400=0$ cujas raízes são $x=10$ e $x=40$ e substituindo $x=10$ em uma das equações obtém-se $y=40$. Se $x=40$ obtém-se $y=10$.

---

[19] Numa liquidação, uma camisa sofreu um desconto de 10%, no mês seguinte, outro desconto de 10% e, no terceiro mês, mais um desconto de 10%. Qual foi o desconto total?

(A) $27,10\%$ (B) $27,70\%$ (C) $27,90\%$ (D) 30% (E) $30,10\%$

Solução
Resposta: A

Podemos pensar no preço inicial da camisa sendo x reais. No primeiro mês passou para $x\cdot\dfrac{90}{100}=0,9x$ (desconto de 10%), no segundo para $0,9x\cdot\dfrac{90}{100}=0,81x$ e no terceiro $0,81x\cdot\dfrac{90}{100}=0,729x$.

Portanto, o desconto total é igual a $x-0,729x=0,271x$, que corresponde a um percentual de $27,10\%$.

---

[20] Francisco escreveu todos os números de 144 até 2017. Quantas vezes ele escreveu o dígito 5?

(A) 188 (B) 288 (C) 388 (D) 478 (E) 578

Solução
Resposta: E

Faremos a contagem dos algarismos 5 que aparecem na casa das unidades, depois na das dezenas e finalmente na das centenas.

Os números terminados em 5 ocorrem de dez em dez a partir de 145 e são $145, 155, \ldots 2015$. Com isso temos $201-13=188$ números terminados em 5.

Os números que têm o algarismo 5 na casa das dezenas de 144 a 2017 são $19\times 10=190$, pois antes do 5 podem ser colocados os inteiros $1, 2, \ldots, 19$ e depois do 5, os inteiros $0, 1, \ldots, 9$.
Temos 200 números que têm o algarismo 5 na casa das centenas que são os números de 500 a 599 e de 1500 a 1599.

Portanto ele escreveu $188+190+200=578$ vezes o algarismo 5.

Outra Solução:

Faremos a contagem dos algarismos 5 que aparecem na casa das unidades, depois na das dezenas e finalmente na das centenas.

- Números com o algarismo das unidades igual a 5 são: $145, 155, 165, \ldots, 2015$.
- Números com o algarismo das dezenas igual a 5 são: $150, 151, 152, \ldots, 1958, 1959$.
- Números com o algarismo das centenas igual a 5 são: $500, 501, 502, \ldots, 1598, 1599$.

Na primeira lista, temos $201 - 13 = 188$ números, na segunda $10 \times 19 = 190$ e na terceira 200. Portanto a resposta é $188 + 190 + 200 = 578$.

Mais uma solução:

1) Calculemos de 1 até 2017 :

Como algarismos das unidades : temos 202 possibilidades, pois antes do 5 colocamos os naturais de 0 a 201.

Como algarismos das dezenas : temos $20 \times 10 = 200$ possibilidades, pois antes do 5 colocamos os naturais de 0 a 19 e, depois do 5, os naturais de 0 a 9.

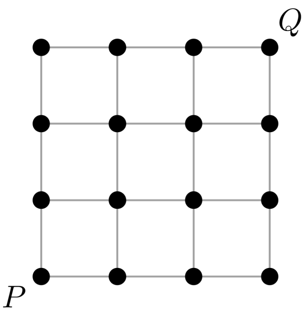
Como algarismos das centenas : temos $2 \times 100 = 200$ possibilidades, pois antes do cinco colocamos os naturais de 0 a 1 e, depois de 00 a 99. Totalizando : 602.

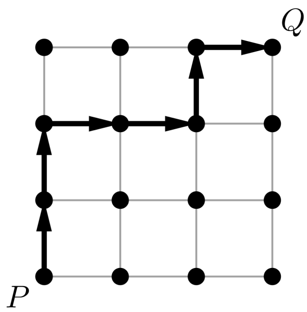
2) calculemos de 1 até 144 : usando a mesma ideia temos um total de 24.

Portanto a resposta é $602 - 24 = 578$.

---

[21] Um jogo é disputado em uma malha de 16 pontos, conforme a figura da esquerda abaixo. O jogador A inicia no ponto P e deve chegar ao ponto Q, podendo se deslocar apenas ao longo das retas que unem os pontos e atingir apenas um novo ponto a cada rodada. Em contrapartida, o jogador B inicia no ponto Q e deve chegar ao ponto P sob as mesmas condições. As jogadas acontecem alternadamente, iniciando com o jogador A. Em sua vez, um jogador não pode se deslocar para um ponto que esteja sendo ocupado pelo outro jogador.





Em uma partida já encerrada, o jogador A percorreu a trajetória destacada na figura da direita acima, atingindo o ponto Q em 6 jogadas. De quantas maneiras diferentes o jogador B pode ter se deslocado, sabendo que ele alcançou o ponto P também em 6 jogadas?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Solução
Resposta: D

Tomando o ponto P como sendo (0,0) e o ponto Q como (3,3), temos que R (1,2) poderá ser o único ponto de encontro na terceira jogada de A e de B, já que a trajetória de A foi destacada na figura.

Começamos calculando o total de trajetórias possíveis de B ao fazer o percurso de Q até P. Teremos 3 movimentos na vertical e 3 na horizontal, perfazendo um total de $\frac{6!}{3!3!} = 20$.

Agora calculamos calcular o total de trajetórias possíveis de B passando obrigatoriamente por R.
De Q a R : $\frac{3!}{2!1!} = 3$ e, de R a P : $\frac{3!}{2!1!} = 3$; ou seja, passando por R teremos um total de 9 trajetórias.

Logo a resposta é $20 - 9 = 11$.

---

[22] A soma das raízes reais da equação $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{3x-4}+\dfrac{1}{x-6}$ é igual a

(A) 12 (B) $\dfrac{29}{2}$ (C) $4\sqrt{6}$ (D) $\dfrac{5}{2}+4\sqrt{6}$ (E) $\dfrac{5}{2}$

Solução
Resposta: B

Começamos somando as frações em ambos os lados e assim temos que

$\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{4x-10}{(3x-4)(x-6)}$ que, para $x \notin \left\{2, 3, \dfrac{4}{3}, 6\right\}$, pode ser reescrito como $(2x-5)(3x-4)(x-6)=2(2x-5)(x-2)(x-3)$.

Se $2x-5=0$ a identidade acima é verificada e assim $x=\dfrac{5}{2}$ é uma solução.

Para $2x-5\neq 0$ dividimos a equação por $2x-5$ e obtemos a equação do segundo grau

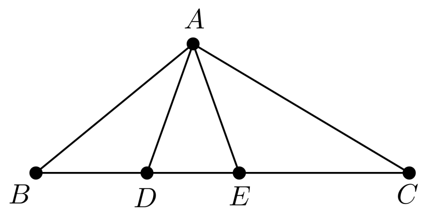
$3x^2-22x+24=2x^2-10x+12$, ou seja, $x^2-12x+12=0$.

As soluções desta equação são $6+2\sqrt{6}$ e $6-2\sqrt{6}$.

Portanto a soma das soluções da equação original é igual a $\dfrac{29}{2}$.

---

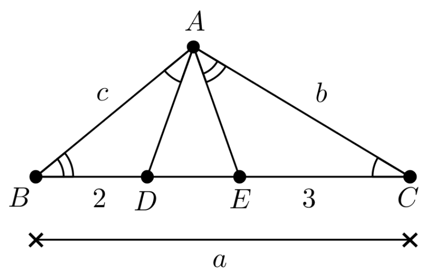
[23] No triângulo ABC da figura abaixo, $A\hat{B}C = E\hat{A}C$, $A\hat{C}B = D\hat{A}B$, $\overline{BD}=2$ e $\overline{CE}=3$.



Com base nas informações acima, podemos afirmar que a razão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é igual a

(A) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$ (E) $\dfrac{4}{9}$

Solução
Resposta: A



Denotando $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$ e $\overline{AC}=b$, queremos determinar $\dfrac{c}{b}$.

Pelos ângulos conhecidos, podemos afirmar que os triângulos ABC e DBA são semelhantes e assim

$$\frac{c}{a}=\frac{2}{c}, \text{ ou seja, } c^2=2a.$$

Podemos também afirmar que os triângulos ABC e EAC são semelhantes, logo

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{b}, \text{ ou seja, } b^2=3a.$$

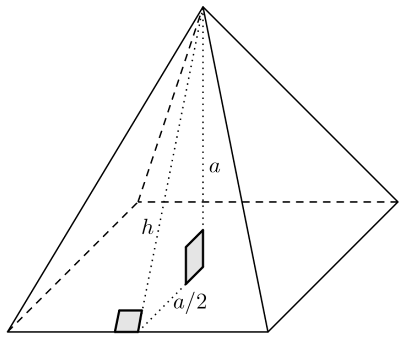
Com isso,

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}, \text{ portanto } \frac{c}{b}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

[24] As quatro faces triangulares de uma pirâmide de base quadrada são congruentes, e a altura desta pirâmide é igual à medida das arestas da base. A razão entre a área lateral total e a área da base é:

(A) 2 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) 1

Solução
Resposta: B



Na figura, está representado o triângulo retângulo formado pela altura da pirâmide, pelo apótema da base e pela altura de uma das faces (também chamado de apótema da pirâmide). Sendo a a medida das arestas da base (o lado do quadrado) e h a altura de uma das faces laterais, o triângulo representado tem hipotenusa h e catetos a e $a/2$.

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

A área S_ℓ de cada face lateral é dada por

$$S_\ell = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4},$$

portanto, a área lateral total da pirâmide é

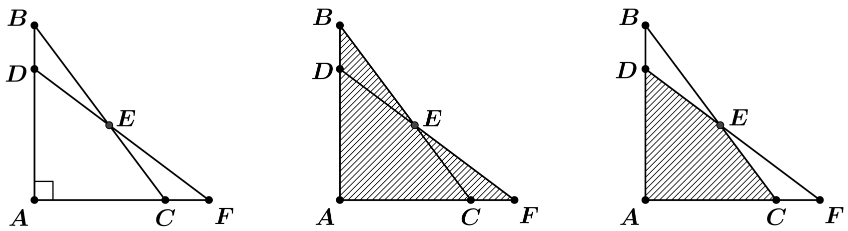
$$4S_\ell = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{4} = a^2\sqrt{5}.$$

Por outro lado, a área S_b da base é dada por a^2. Sendo assim, a razão $\frac{4S_\ell}{S_b}$ é igual a

$$\frac{4S_\ell}{S_b} = \frac{a^2\sqrt{5}}{a^2} = \sqrt{5}.$$

---

[25] Os triângulos retângulos ABC e AFD são congruentes e sobrepostos, conforme a figura abaixo à esquerda, sendo $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AC} = 3$.



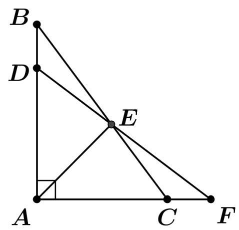
Sabendo que área do polígono $ABEF$, destacado na figura do meio, é S, a área do quadrilátero $ADEC$, destacado na figura da direita, é igual a

(A) $\frac{3\,S}{4}$ (B) $\frac{S}{2}$ (C) $\frac{9\,S}{16}$ (D) $\frac{7\,S}{8}$ (E) $\frac{2\,S}{3}$

Solução
Resposta: A

Como os triângulos ABC e AFD são congruentes, temos $\overline{AF} = \overline{AB} = 4$ e $\overline{AD} = \overline{AC} = 3$. Traçando AE, como $\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AF}$, teremos

$$\text{Área}(ACE) = \frac{3}{4}\text{Área}(AFE).$$



Da mesma forma, como $\overline{AD} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, teremos

$$\text{Área}(ADE) = \frac{3}{4}\text{Área}(ABE).$$

Assim segue que

$$\begin{aligned}
\text{Área}(ADEC) &= \text{Área}(ACE) + \text{Área}(ADE) \\
&= \frac{3}{4}\text{Área}(AFE) + \frac{3}{4}\text{Área}(ABE) \\
&= \frac{3}{4}\left(\text{Área}(AFE) + \text{Área}(ABE)\right) \\
&= \frac{3}{4}\text{Área}(ABEF) \\
&= \frac{3S}{4}.
\end{aligned}$$

---

[26] Se x e y são dois números reais tais que $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$, então $x + y$ é igual a

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

Solução
Resposta: D

Completando os quadrados, a expressão $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$ pode ser escrita na forma

$(2x - 1)^2 + (3y + 2)^2 = 0$.

Assim temos que $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

Portanto $x + y = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

---

[27] João deseja comprar uma determinada calça. Para isto, decide observar os valores e promoções do produto em duas lojas diferentes. Na loja A a calça custa 140 reais, mas, se comprada à vista, João ganharia 15% de desconto. Na loja B a mesma calça custa 150 reais. Como promoção de aniversário da empresa, a loja B tem uma urna que contém 5 bolas, onde estão escritos os seguintes descontos: 5%, 10%, 15%, 20% e 25%. Ao realizar a compra, o cliente deve sortear desta urna duas bolas com reposição. Após o sorteio, o cliente recebe a soma dos dois descontos sobre o valor da peça adquirida.
Qual a probabilidade de João pagar menos, comprando na loja B em vez de comprar na loja A?

(A) 64% (B) 76% (C) 80% (D) 88% (E) 95%

Solução
Resposta: B

Realizando a compra da calça na loja A, o preço final será de 119 reais. Para que o custo da mesma calça seja inferior comprando na loja B é preciso que o desconto seja maior que 20%, pois se o desconto for de 20%, então o preço final seria de 120 reais.

Sendo o sorteio com reposição, temos um total de 25 possibilidades. Analisando os valores dos descontos e atentos ao fato de que há reposição, temos 6 possibilidades em que o desconto é menor ou igual a 20%: 5% mais 5%, 5% mais 10%, 10% mais 5%, 5% mais 15% e 15% mais 5%.
Logo percebemos que 19 possibilidades implicam em um desconto superior a 20%.

Portanto a probabilidade é igual a $\frac{19}{25} = 76\%$.

---

[28] Considere a seguinte distribuição de frequências das alturas, em metros, dos alunos de uma determinada turma:

Classe	Frequência
1,50 |— 1,60	3
1,60 |— 1,70	9
1,70 |— 1,80	12
1,80 |— 1,90	2

Lembre que a notação 2|— 3 é comumente usada em Estatística para representar o intervalo $[2,3)$.

Sobre a distribuição é correto afirmar que:

(A) a média aritmética é inferior a 1,60 m.

(B) a média aritmética pertence ao último quartil.

(C) a mediana é igual à média aritmética.

(D) a mediana pertence à terceira classe.

(E) a pessoa mais alta da turma tem 1,90 m.

Solução
Resposta: D

Somando as frequências, obtemos um total de 26 alunos na turma. O que significa que a mediana é a média aritmética entre as alturas que ocupam as posições de número 13 e 14 na distribuição. Como as duas primeiras classes somam 12 alunos, podemos concluir que a mediana está na terceira classe. Logo a resposta correta é a (D).

---

[29] A diferença entre um número de dois algarismos e outro escrito com os mesmos algarismos, em ordem inversa é 54. Sabendo que a soma dos algarismos é igual a 12, podemos afirmar que a soma dos seus quadrados é igual a

(A) 72 (B) 74 (C) 80 (D) 90 (E) 112

Solução
Resposta: D

Vamos representar o número na forma $AB = 10A + B$, onde A e B são algarismos de 0 a 9 e $A \geqslant B$. Assim temos que $AB - BA = 54$ e $A + B = 12$.

$$10A + B - (10B + A) = 54$$
$$9A - 9B = 54$$
$$A - B = 6$$

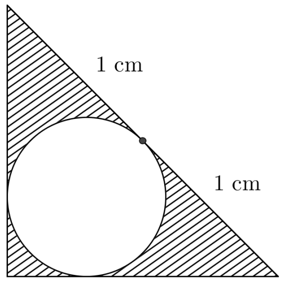
Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} A + B = 12 \\ A - B = 6 \end{cases}$$

Chegamos a $A = 9$ e $B = 3$, e então $9^2 + 3^2 = 90$.

---

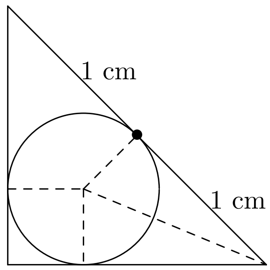
[30] Inscreve-se uma circunferência em um triângulo retângulo. O ponto de tangência divide a hipotenusa em dois segmentos que medem, cada um, 1 cm. Qual é a área, em cm^2, da região sombreada, interna ao triângulo e externa à circunferência?



(A) $2 + \pi(\sqrt{3} - 2)$ (B) $1 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$ (C) $2 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$

(D) $1 + \pi(1 - 2\sqrt{3})$ (E) $1 + \pi(\sqrt{3} - 3)$

Solução
Resposta: B



Seja r o raio da circunferência inscrita. Como o triângulo é retângulo, cada cateto mede $(1 + r)$ cm.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $(1 + r)^2 + (1 + r)^2 = 2^2 = 4$, donde $(1 + r)^2 = 2$. Assim, a área do triângulo mede

$$\frac{(r+1)(r+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}^2$$

Resolvendo a equação $(1 + r)^2 = 2$, encontramos $r = \sqrt{2} - 1$ cm e assim a área do círculo é $\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm^2.

Portanto a área da região sombreada é $1 - \pi(3 - 2\sqrt{2}) = 1 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$ cm^2.