GABARITO E PAUTA DE CORREÇÃO DO ENQ-2014.2

Questão 1 [1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]

Sejam a, b, p inteiros, com p primo. Demonstre que:

(a) se p não divide a, então $(p, a) = 1$.

(b) se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Solução

(a) Suponha que $p \nmid a$ e seja $d = (p, a)$. Segue que $d \mid p$ e $d \mid a$. Como p é primo, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, consequentemente $d = 1$.

(b) Basta provar que, se $p \mid ab$ e $p \nmid a$, então $p \mid b$. Suponha então que $p \mid ab$ e $p \nmid a$. Segue que $(a, p) = 1$ e daí, existem r e s inteiros tais que $ra + sp = 1$. Multiplicando esta equação por b tem-se que $rab + spb = b$. Mas $p \mid ab$ e $p \mid p$, portanto $p \mid b$.

PAUTA DE CORREÇÃO:

Item (a)

- Usar o fato de que p é primo e concluir que $(p, a) = p$ ou $(p, a) = 1$ $[0, 25]$
- Concluir que $(p, a) = 1$ $[0, 25]$

Item (b)

- Escrever a estratégia da prova $[0, 25]$
- Concluir a prova $[0, 25]$

Questão 2 [1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]

Duas sequências de números reais x_n e y_n estão relacionadas pelas recorrências

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n, \qquad y_{n+1} = 5x_n - 2y_n.$$

(a) Mostre que a sequência x_n satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 9x_n$.

(b) Suponha $x_0 = y_0 = 1$. Encontre as fórmulas gerais para as sequências x_n e y_n em função de n.

Solução

(a) Como $x_{n+1} = 2x_n + y_n$ e $y_{n+1} = 5x_n - 2y_n$, segue que $x_{n+2} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2(2x_n + y_n) + 5x_n - 2y_n = 4x_n + 2y_n + 5x_n - 2y_n = 9x_n$.

(b) A recorrência $x_{n+2} - 9x_n = 0$ tem como equação característica $r^2 - 9 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -3$ e $r_2 = 3$. Com isso a solução da recorrência é dada por $x_n = C_1(-3)^n + C_2 \cdot 3^n$. Como $x_0 = y_0 = 1$ temos que $x_1 = 2x_0 + y_0 = 3$. Logo segue que $1 = C_1(-3)^0 + C_2 \cdot 3^0$ e $3 = C_1(-3)^1 + C_2 \cdot 3^1$, ou seja, $C_1 + C_2 = 1$ e $-3C_1 + 3C_2 = 3$, cuja solução é $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$. Portanto $x_n = 3^n$ e $y_n = x_{n+1} - 2x_n = 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n = 3^n$.

PAUTA DE CORREÇÃO:

Item (a)

- Provar o resultado $[0,5]$

Item (b)

- Determinar x_n $[0,25]$
- Encontrar y_n $[0,25]$

Questão 3 [1,0 pt]

Considere o triângulo ABC de lados a, b, c e alturas h_a, h_b e h_c relativas respectivamente aos lados a, b e c. Prove que ABC é semelhante a um triângulo de lados $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$ e $\dfrac{1}{h_c}$.

Solução

No triângulo ABC, temos que h_a é a altura relativa ao lado a, h_b é a altura relativa ao lado b e h_c é a altura relativa ao lado c. Sendo assim, podemos escrever três relações que fornecem a mesma área, ou seja, a área do triângulo ABC:

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Dessa forma, temos que $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. Como $a \cdot h_a = \frac{a}{(1/h_a)}$, podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}},$$

o que mostra que os triângulos de lados a, b, c e lados $(1/h_a), (1/h_b), (1/h_c)$ são semelhantes.

PAUTA DE CORREÇÃO:

- Observar que $a \cdot h_a/2$, $b \cdot h_b/2$ e $c \cdot h_c/2$ são, as três, expressões da área do triângulo (ou, obviamente, que $a \cdot h_a$,$b \cdot h_b$ e $c \cdot h_c$ são o dobro da área) [0,5]
- Utilizar a conclusão anterior para concluir que $a/(1/h_a) = b/(1/h_b) = c/(1/h_c)$ [0,25]
- Concluir a semelhança [0,25]

Questão 4 **[1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]**

Sejam x e y dois números racionais com $x < y$.

(a) Prove que $x < \dfrac{x+y}{2} < y$ e que $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$.

(b) Mostre que entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos um número racional e um irracional.

Solução

(a) Como $x < y$ por hipótese, somando x em ambos os lados desta desigualdade tem-se $2x < x+y$, logo $x < \dfrac{x+y}{2}$. De modo análogo, somando y em ambos os lados de $x < y$ tem-se $x + y < 2y$, ou seja, $\frac{x+y}{2} < y$. Portanto segue-se que $x < \dfrac{x+y}{2} < y$. Por outro lado, $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} > 0$ e somando x em ambos os lados desta última desigualdade obtém-se $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}$. Para demonstrar a segunda parte da desigualdade, observe que $x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$
equivale a $\sqrt{2}x + y - x < \sqrt{2}y$, ou ainda, $(\sqrt{2}-1)x < (\sqrt{2}-1)y$ que nos dá $x < y$. Portanto, usando argumento de volta, pode-se concluir que $x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$ e, juntando as duas partes chega-se a desigualdade desejada, $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$.

(b) A primeira parte do item (a) nos diz que o número $z_1 = \dfrac{x+y}{2}$ está situado entre os números racionais x e y e como soma e produto de números racionais é um número racional, segue que z_1 satisfaz a condição requerida. A segunda parte de (a) nos diz que o número $z_2 = x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}$ também está situado entre os números racionais x e y e para concluir, basta ver que z_2 é irracional. Sabemos que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é irracional e que produto de irracional por racional não nulo é irracional. Como $y - x > 0$ é racional, segue que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y-x) = \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}$ é irracional. A soma de um racional com um irracional também é irracional e portanto $z_2 = x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}$ é irracional e está situado entre os números racionais x e y.

PAUTA DE CORREÇÃO:

Item (a)

- Provar que $x < \dfrac{x+y}{2} < y$ [0,25]
- Provar que $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$ [0,25]

Item (b)

- Provar que entre dois números racionais existe pelo menos um racional [0,25]
- Provar que entre dois números racionais existe pelo menos um irracional [0,25]

Questão 5 [1,0 pt]

Em uma cesta contendo ovos, na contagem de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, sobram $1, 2, 3$ e 4 ovos, respectivamente. Qual é a menor quantidade de ovos que a cesta pode ter?

Solução

Representamos por N o número procurado. Sabemos que N é uma solução do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv & 1 \mod 2 \\ x \equiv & 2 \mod 3 \\ x \equiv & 3 \mod 4 \\ x \equiv & 4 \mod 5 \end{cases}$$

Como $(3, 4) = (3, 5) = (4, 5) = 1$ consideramos primeiramente o sistema formado pelas três últimas congruências e usamos o Teorema Chinês dos Restos para resolvê-lo. Neste caso, $M = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60, M_1 = 20, M_2 = 15$ e $M_3 = 12$. Por outro lado, $y_1 = 2, y_2 = 3$ e $y_3 = 3$ são soluções, respectivamente, das congruências $20y_1 \equiv 1 \mod 3$, $15y_2 \equiv 1 \mod 4$ e $12y_3 \equiv 1 \mod 5$. Portanto, uma solução é dada por

$$M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + M_3y_3c_3 = 20 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \cdot 3 + 12 \cdot 3 \cdot 4 = 359.$$

As soluções do sistema são $x = 359 + 60t$, onde $t \in \mathbb{Z}$. A menor solução é 59, quando $t = -5$. Como 59 também satisfaz a primeira congruência concluimos que $N = 59$.

PAUTA DE CORREÇÃO:

- Montar o sistema $[0, 25]$
- Determinar a solução geral $[0, 5]$
- Obter a menor solução positiva [0,25]

Outra solução :

Representamos por N o número procurado. Sabemos que N é uma solução do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv & 1 \mod 2 \\ x \equiv & 2 \mod 3 \\ x \equiv & 3 \mod 4 \\ x \equiv & 4 \mod 5 \end{cases}$$

Somando 1, nos dois lados, de cada congruência:

$$\begin{cases} x + 1 \equiv & 0 \mod 2 \\ x + 1 \equiv & 0 \mod 3 \\ x + 1 \equiv & 0 \mod 4 \\ x + 1 \equiv & 0 \mod 5 \end{cases}$$

o qual é equivalente à congruência $x + 1 \equiv 0 \mod [2, 3, 4, 5]$, onde $[2, 3, 4, 5] = 60$, obtemos as soluções $x + 1 = 60t$, onde $t \in \mathbb{Z}$. A menor solução positiva ocorre quando $t = 1$, portanto $N = 59$.

PAUTA DE CORREÇÃO:

- Montar o sistema $[0, 25]$
- Determinar a solução geral $[0, 5]$
- Obter a menor solução positiva [0,25]

Questão 6 [1,0 pt]

Um professor do Ensino Médio propôs a seguinte questão:

"Dada a sequência $1, 4, 9, 16, \ldots$, determine o quinto termo".

Um aluno achou um resultado diferente de 25, que era a resposta esperada pelo professor. Ele obteve um polinômio $P(x)$ satisfazendo cinco condições: $P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9, P(4) = 16$ e $P(5) \neq 25$. Encontre um polinômio $P(x)$ satisfazendo as condições acima e tal que $P(5) = 36$.

Sugestão: Analise o polinômio $Q(x) = P(x) - x^2$.

Solução

Seja $Q(x) = P(x) - x^2$. Observe que $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ são raízes de $Q(x)$ e podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$Q(x) = h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

onde $h(x)$ é uma função de x. Temos então que

$$P(x) = x^2 + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Como o enunciado pede para encontrarmos um polinômio, façamos $h(x) = k$, sendo k uma constante a ser determinada com $P(5) = 36$. Substituindo $x = 5$ em $P(x)$, $P(5) = 36 = 5^2 + k.4.3.2.1$ e encontramos $k = \frac{11}{24}$.

Logo $P(x) = x^2 + \frac{11}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ é um polinômio que satisfaz as condições do enunciado.

PAUTA DE CORREÇÃO:

- Observar que $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ são raízes de $Q(x)$ [0,25]
- Descrever que $Q(x)$ é da forma $Q(x) = h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ [0,25]
- Descrever que $P(x) = x^2 + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ [0,25]
- Mostrar algum $h(x)$ e escrever $P(x)$ [0,25]

Questão 7 [1,0 pt]

Considere um cubo de aresta a. A partir de um vértice, e sobre as três arestas que nele concorrem, são assinalados os pontos que distam $\frac{a}{3}$ deste vértice. Os três pontos assim obtidos, junto com o vértice do cubo, são vértices de um tetraedro. Repetindo o processo para cada vértice, e retirando-se do cubo os oito tetraedros assim formados, obtém-se o poliedro P restante. Calcule a área total de P.

Solução

A área do total poliedro P pode ser calculada subtraindo-se, da área total do cubo, as áreas de 24 triângulos retângulos de catetos $\frac{a}{3}$, correspondentes às 3 faces laterais de cada um dos 8 tetraedros retirados, e somando-se a área de 8 triângulos equiláteros de lado $\frac{a\sqrt{2}}{3}$, correspondentes às bases de cada um dos 8 tetraedros.

As áreas acima são dadas por:

- Área total do cubo:
$$A_C = 6a^2.$$
- Área de cada triângulos retângulos de catetos $\frac{a}{3}$:
$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{18}.$$
- Área de cada triângulos equiláteros de lados $\frac{a\sqrt{2}}{3}$:
$$A_2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}.$$

Assim, a área do poliedro P é dada por

$$\begin{aligned} A_P &= 6\,A_C - 24\,A_1 + 8\,A_2 \\ &= 6a^2 - 24 \cdot \frac{a^2}{18} + 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{18} \\ &= 6a^2 - \frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \\ &= \frac{a^2 \cdot (4\sqrt{3} + 42)}{9}. \end{aligned}$$

PAUTA DE CORREÇÃO:

- Apresentar a estratégia para cálculo da área e calcular corretamente a área do cubo [0,25]
- Calcular corretamente a área de cada face triangular a ser retirada (A_1) [0,25]
- Calcular corretamente a área de cada face triangular a ser somada (A_2) [0,25]
- Calcular corretamente a área total, a partir das áreas acima obtidas, observando o número correto de faces a serem somadas ou retiradas [0,25]

Outra solução:

O poliedro P obtido é formado por 8 faces triangulares e 6 faces octogonais. Considerando A_1 a área de uma face triangular e A_2 a área de uma face octogonal, teremos que a área A do Poliedro P será dada por $A = 8 \cdot A_1 + 6 \cdot A_2$.

As faces octogonais são obtidas, cada uma, retirando-se de um quadrado de lado a quatro triângulos retângulos cujos catetos medem $\frac{a}{3}$. A área de cada um desses triângulos será $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{18}$. Assim, a área de cada face octogonal será $A_1 = a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{18} = \frac{7a^2}{9}$.

As faces triangulares são equiláteras, de lados $l = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, que podem ser obtidos observando que os lados do tetraedro retirado são triângulos retângulos de catetos medindo $\frac{a}{3}$. Sendo assim, $A_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Assim podemos calcular a área A do poliedro P:

$$\begin{aligned} A_P &= 6 \cdot (A_1) + 8 \cdot (A_2) \\ &= 6 \cdot \frac{7a^2}{9} + 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{18} \\ &= \frac{a^2 \cdot (4\sqrt{3} + 42)}{9}. \end{aligned}$$

PAUTA DE CORREÇÃO:

- Calcular corretamente a área de cada face triangular [0,25]
- Apresentar uma forma correta de cálculo da área de cada face octogonal (retirando as áreas dos quatro triângulos ou outro caminho equivalente) [0,25]
- Obter corretamente a área de cada face octogonal [0,25]
- Calcular corretamente a área total, a partir das áreas obtidas para cada tipo de face, observando o número correto de faces de cada tipo [0,25]

Questão 8. **[1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]**

Considere que foram efetuadas todas as permutações possíveis dos algarismos que compõem o número 78523, listando os números obtidos em ordem crescente.

(a) Determine a posição ocupada pelo número 78523.

(b) Calcule a soma de todos os números listados.

Solução

(a) Para obter a posição do número 78523 nesta lista, calcularemos quantos números estão antes dele na lista. Os primeiros números, nesta lista, são aqueles que iniciam com 2. Permutando os outros 4 algarismos, temos $4! = 24$ números que iniciam com 2. Os próximos números são os iniciados com 3. Como no caso anterior, trata-se de 24 números. Seguem-se os números iniciados com 5, que também são 24 números. Os próximos números são os iniciados com 72, 73 e 75. Para cada um destes casos, permutandos os outros 3 algarismos, temos mais $3! = 6$ números. Finalmente, temos os números iniciados com 782 e 783, com 2 números em cada caso. Sendo assim, a posição do número 78523 é

$$3 \times 24 + 3 \times 6 + 2 \times 2 + 1 = 95.$$

Outra Solução:

Para obter a posição do número 78523 nesta lista, calcularemos quantos números estão depois dele na lista. Permutando os 5 algarismos, calculamos que a lista tem um total de $5! = 120$ números. Os últimos números, nesta lista, são aqueles que iniciam com 8. Permutando os outros 4 algarismos, temos $4! = 24$ números que iniciam com 8. Antes destes temos o número 78532, que está imediatamente após o número 78523. Sendo assim, a posição do número 78523 é

$$120 - 24 - 1 = 95.$$

(b) Permutando os 5 algarismos, vemos a lista tem um total de $5! = 120$ números. Para calcular a soma destes números, devemos perceber que cada algarismo do número 78523 aparece na posição das unidades em $4! = 24$ números. Assim temos $(7 + 8 + 5 + 2 + 3) \times 24 = 600$ unidades. O mesmo ocorre na posição das dezenas, centenas, milhares e dezenas de milhares. Portanto, a soma é igual a

$$600 \times 10000 + 600 \times 1000 + 600 \times 100 + 600 \times 10 + 600 = 6.666.600.$$

PAUTA DE CORREÇÃO:

Item (a)

- Perceber que existem 24 números iniciando com 2, 3 e 5 [0,25]
- Calcular corretamente a posição ocupada pelo número 78523 [0,25]

Solução alternativa para o item (a)

- Perceber que existem 24 números iniciando com 7 e 8 [0,25]
- Calcular corretamente a posição ocupada pelo número 78523 [0,25]

Item (b)

- Perceber que cada algarismo aparece 24 vezes em cada posição [0,25]
- Calcular corretamente a soma [0,25]