Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA11 – Números e Funções Reais
Avaliação 1 - GABARITO
13 de abril de 2013

1. Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando adequadamente e em detalhes as suas respostas.

   (a) A soma de dois números irracionais é um número irracional. (*pontuação 1,0*)

   (b) O produto de dois números reais com representação decimal infinita e periódica é um número real que não possui representação decimal finita. (*pontuação 1,0*)

   Uma solução:

   a) Falso.

   Contra-exemplo: $x = \pi$ e $y = 1 - \pi$ são irracionais, mas $x + y = 1$ não é irracional.

   b)Falso.

   Contra-exemplo: $x = \frac{7}{12}$ e $y = \frac{6}{7}$ têm representação decimal infinita, mas $x.y = \frac{1}{2}$ possui representação decimal finita.

2. Da mesma forma que se expressa um número real no sistema de numeração decimal, é possível expressá-lo em um sistema de numeração posicional qualquer, de base $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 2$. Dizemos que um número $a \in \mathbb{R}$ está expresso no sistema de base β se ele é escrito na forma:

$$a = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, \beta^{-n}$$

   em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os a_n são dígitos entre 0 e $\beta - 1$.

   (a) Sejam x e y os números reais cujas representações no sistema de numeração de base 4 são dadas por $0,321$ e $0,111\ldots$, respectivamente. Determine as representações de x e de y no sistema decimal. (*pontuação 1,0*)

   (b) Mostre que um número racional $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e $mdc(m,n) = 1$, possui representação finita no sistema de numeração posicional de base β se, e somente se, o denominador n não possui fatores primos que não sejam fatores de β. (*pontuação 1,0*)

Uma solução:

a) Pela definição da expressão de um número real no sistema de numeração posicional de base β, temos que:

$$x = (0,321)_\beta = 3 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4^2} + 1 \times \frac{1}{4^3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} = 0,890625$$

$$y = (0,111\ldots)_\beta = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k}$$

Portanto, a expressão acima é a soma da progressão geométrica infinita cujo termo inicial é $\frac{1}{4}$ e a razão é $\frac{1}{4}$. Essa soma converge para:

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

b) Observamos que um número a possui representação finita no sistema de numeração posicional de base β se, e somente se, existe um expoente $k \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^k a \in \mathbb{N}$.

Assim, se $\dfrac{m}{n}$ possui representação finita no sistema de numeração posicional de base β, então $\dfrac{\beta^k m}{n} \in \mathbb{N}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo, $n \,|\, \beta^k m$. Como $mdc(m,n) = 1$, então $n \,|\, \beta^k$. Portanto, n não possui fatores primos que não sejam fatores de β^k. Mas estes são os mesmos fatores primos de β.

Reciprocamente, se n não possui fatores primos que não sejam fatores de β, então $n \,|\, \beta^k$, para um expoente k suficientemente grande. Logo, $n \,|\, \beta^k m$, portanto $\dfrac{\beta^k m}{n} \in \mathbb{N}$. Então, $\dfrac{m}{n}$ possui representação finita no sistema de numeração posicional de base β.

3. (a) Considere a função $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2x}$. Usando o fato de que a função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é monótona crescente, mostre que h é monótona crescente. (*pontuação 0,5*)

(b) Conclua, com base no item anterior, que, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ a equação $\sqrt{x} = a - \sqrt{2x}$ admite uma única solução real. (*pontuação 0,5*)

(c) Considere a seguinte resolução para a equação $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x}$:

$$\sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x} \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2\sqrt{2x} + 2x \quad \Rightarrow \quad 1 + x = 2\sqrt{2x} \quad \Rightarrow$$
$$1 + 2x + x^2 = 8x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Este método de resolução está correto? Justifique sua resposta. (*pontuação 1,0*)

Uma solução:

a) Temos que $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2\,x} = (1+\sqrt{2})\,\sqrt{x} = (1+\sqrt{2})\,g(x)$. Como g é crescente, então, $x_1, x_2 \in [0, +\infty[\,$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; g(x_1) < g(x_2) \;\Rightarrow\; h(x_1) < h(x_2)$. Portanto, h é crescente.

b) A existência da solução da equação $\sqrt{x} = a - \sqrt{2x}$ é explícita: dado $a \geq 0$, $x = \frac{a^2}{(1+\sqrt{2})^2}$ é uma solução. Mesmo que não conseguíssemos uma solução explícita, a garantia teórica da existência de uma solução desta equação é uma consequência da continuidade de h e de que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, existe *pelo menos* um $x \in [0, +\infty[$ tal que $h(x) = a$. Vejamos a unicidade: suponhamos que existam $x_1\, x_2 \in [0, +\infty[\,$, $x_1 \neq x_2$ tais que $h(x_1) = h(x_2) = a$. Digamos $x_1 < x_2$. Como h é crescente, deveríamos ter $h(x_1) < h(x_2)$. Logo, existe um único $x \in [0, +\infty[$ tal que $h(x) = a$, isto é, $\sqrt{x} = a - \sqrt{2x}\,$.

c) Pelo item anterior, a equação $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x}$ admite uma única solução. Portanto, a resolução não está correta.

Na primeira passagem da resolução, é verdade que $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x} \Rightarrow x = 1 - 2\sqrt{2x} + 2x$. Entretanto, $x = 1 - 2\sqrt{2x} + 2x \not\Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x}$. De fato, nesta implicação, estamos implicitamente fazendo:

$$x = 1 - 2\sqrt{2x} + 2x = (1-\sqrt{2x})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(1-\sqrt{2x})^2} = 1 - \sqrt{2x}\,.$$

Em primeiro lugar, para que a implicação acima seja verdadeira, devemos supor que $x \geqslant 0$, o que já é uma hipótese inicial para a resolução da equação. Além disso, temos que $1 - 2\sqrt{2x} + 2x = (1-\sqrt{2x})^2$, mas a igualdade $\sqrt{(1-\sqrt{2x})^2} = 1 - \sqrt{2x}$ só vale se $1 - \sqrt{2x} \geqslant 0$. Logo, a implicação acima só é verdadeira se $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Portanto, nessa passagem ocorre uma inclusão de raízes estranhas à equação.

4. Considere a função $p : [-1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} 3\,x - x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ ||x-2|-1| & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de p. (*pontuação 0,5*)

(b) Determine todas as soluções reais da equação $p(x) = 2$. (*pontuação 0,5*)

(c) Determine todos os pontos de máximo e de mínimo locais e absolutos de p. (*pontuação 0,5*)

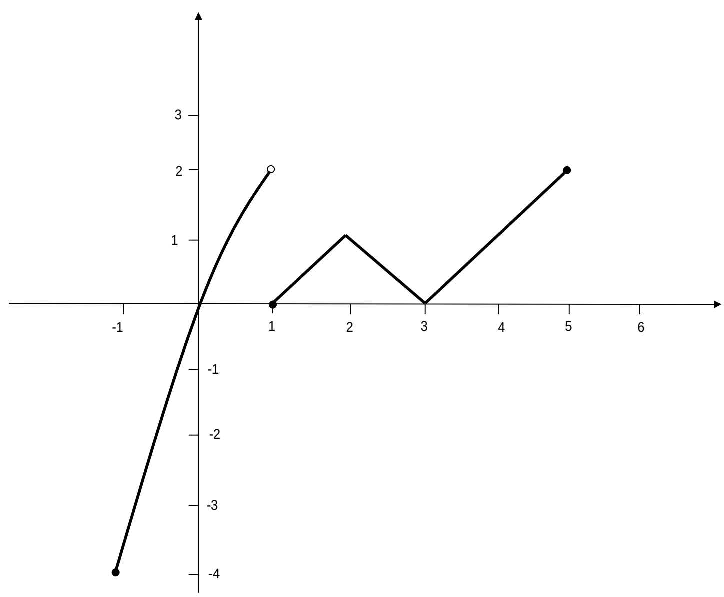
(d) Faça um esboço do gráfico da função $q : [-1, 2]] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$q(x) = p(2x+1) - 2\,.$$

(*pontuação 0,5*)

Uma solução:

a) O gráfico da função p é dado por:



b) Resolvendo $3x - x^2 = 2$, obtemos $x = 1$ ou $x = 2$, mas estes valores estão fora do intervalo em que p é definida pela expressão $y = 3x - x^2$. Resolvendo $||x-2|-1| = 2$, obtemos $|x-2| = 1 \pm 2$. Como não há valores de x tais que $|x-2| = -1$, resta apenas a alternativa $|x-2| = 3$. Esta implica em $x = 2 \pm 3$, portanto $x = -1$ ou $x = 5$, mas $x = -1$ está fora do intervalo em que p é definida pela expressão $y = ||x-2|-1| = 2$, portanto, a única solução da equação $p(x) = 2$ é $x = 5$. De fato, percebemos pelo gráfico esboçado no item anterior que a reta $y = 2$ intercepta o gráfico de p apenas quando $x = 5$.

c) Analisando o gráfico, concluímos que a função p possui:

- mínimo absoluto em $x = -1$;
- mínimo local em $x = 1$;
- máximo local em $x = 2$;
- mínimo local em $x = 3$;

• máximo absoluto em $x = 5$.

d) Na definição da função q, a variável de p é multiplicada por 2 e somada a 1 e, em seguida, a função p é somada à constante -2. Estas operações podem ser descritas geometricamente por meio das seguintes funções:

• $p(x)$, cujo gráfico foi obtido em a),

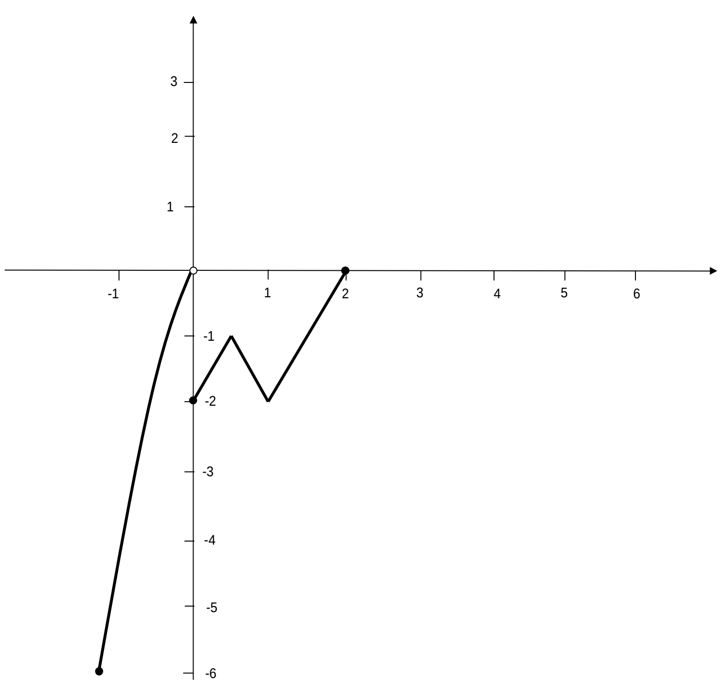
• $p_1(x) = p(2x)$, cujo gráfico é obtido do de $p(x)$ por uma contração horizontal de razão $\frac{1}{2}$,

• $p_2(x) = p_1(x + \frac{1}{2}) = p(2(x + \frac{1}{2})) = p(2x + 1)$, cujo gráfico é obtido do de $p_1(x)$ por uma translação horizontal de $\frac{1}{2}$ unidade no sentido negativo do eixo (isto é, para a esquerda),

e, finalmente,

• $q(x) = p_2(x) - 2$, cujo gráfico é obtido do de $p_2(x)$ por meio de uma translação vertical de 2 unidades no sentido negativo do eixo (isto é, para baixo).

Portanto, o gráfico de q tem o seguinte aspecto:



5. Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, com $a > 0$. Use a forma canônica do trinômio de segundo grau

$$y = a\,(x - x_0)^2 + y_0$$

para mostrar que:

a) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo absoluto de f; (*pontuação 1,0*)

b) a reta $x = x_0$ é um eixo de simetria vertical do gráfico de f. (*pontuação 1,0*)

Uma solução:

a) Temos que $f(x_0) = y_0$. Além disso, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$, temos $a\,(x - x_0)^2 > 0$, portanto:

$$f(x) = a\,(x - x_0)^2 + y_0 > y_0 = f(x_0)$$

Segue que (x_0, y_0) é ponto de mínimo absoluto de f.

b) Dado $r > 0$ qualquer temos:

$$\begin{aligned} f(x_0 - r) &= a\,r^2 + y_0 \\ f(x_0 + r) &= a\,r^2 + y_0 \end{aligned}$$

Portanto, $f(x_0 - r) = f(x_0 + r)$, $\forall r > 0$. Logo, a reta $x = x_0$ é um eixo de simetria vertical do gráfico de f.