Questões objetivas

Q1. $1/2 = 0,5$ e $|0,7 - 1/2| = 0,2$; $2/3 = 0,666...$ e $|0,7 - 2/3| > 0,03$; $3/4 = 0,75$ e $|0,7 - 0,75| = 0,05$; $4/5 = 0,8$ e $|0,7 - 0,8| = 0,1$; $5/7 = 0,71...$ e $|0,7 - 5/7| < 0,02$. Então $5/7$ está à menor distância de 0,7 entre os números apresentados.

Resposta: **E**.

Q2. Se a média aritmética entre a e b é 17, então

$$\frac{a+b}{2} = 17\,,$$

isto é, $a + b = 34$. Se a média aritmética entre a, b e c é 15 então

$$\frac{a+b+c}{3} = 15\,,$$

isto é, $a + b + c = 45$. Logo $c = 45 - (a + b) = 45 - 34 = 11$.

Resposta: **C**.

Q3. Para contar o número de divisores, o melhor procedimento é escrever a decomposição do número em fatores primos. Tem-se

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1\,. \end{aligned}$$

Os divisores de 10! são todos os produtos possíveis usando esses fatores. Dito de outro modo, são todos os produtos da forma

$$2^i \cdot 3^j \cdot 5^k \cdot 7^m$$

em que $0 \leq i \leq 8$, $0 \leq j \leq 4$, $0 \leq k \leq 2$ e $0 \leq m \leq 1$ (isso inclui o 1 e o 10! como divisores). Como há nove possibilidades para i, cinco para j, três para k e duas para m, há um total de $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$ possibilidades. Não há possibilidade de contarmos duas vezes o mesmo número porque a decomposição em fatores primos é única.

Resposta: **B**.

Q4. O ângulo pedido é igual ao ângulo interno do pentágono regular da região central, que vale 108°.

Resposta: **A**.

Q5. Pela hipótese, a cada acréscimo positivo na primeira coordenada de 2 unidades corresponde o acréscimo positivo na segunda coordenada de 1 unidade. Portanto $P = (0, 1)$ está sobre a reta (subtraindo-se 4 unidades da primeira coordenada de A obriga a subtrair 2 unidades da segunda coordenada); e $Q = (-2, 0)$ está sobre a reta (subtraindo-se 3 unidades da segunda coordenada de A obriga a subtrair 6 unidades da primeira coordenada). Pelo Teorema de Pitágoras, a distância entre esses pontos é $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Resposta: **D**.

Q6. De janeiro a fevereiro não houve decréscimo, então não é preciso considerar esse caso. Fevereiro a março: $(200 - 160)/200 = 1/5$, decréscimo de 20%. Março a abril: $(160 - 120)/160 = 1/4$, decréscimo de 25%. Abril a maio: $(120 - 84)/120 = 3/10$, decréscimo de 30%. Maio a junho: $(84 - 63)/84 = 1/4$, decréscimo de 25%. Portanto o maior decréscimo ocorreu entre abril e maio.

Resposta: **D**.

Q7. Como Maria é a quinta garota à esquerda de Denise, há 4 meninas entre elas pelo lado esquerdo de Denise. E como Maria é a sexta garota à direita de Denise, há 5 meninas entre elas pelo lado direito de Denise. Então são 1 (Denise) + 1 (Maria) + 4 (entre elas pela esquerda) + 5 (entre elas pela direita) = 11 garotas.

Resposta: **B**.

Q8. Aumentar o diâmetro de um círculo em 100% significa duplicá-lo. Com isso, sua área é multiplicada por 4. Isso significa somar 3 vezes a área original à área original, o que, em porcentagem, significa aumentar 300%.

Resposta: **A**.

Q9. O peso de 81g não podia estar com a pera, pois a soma dos outros pesos seria incapaz de equilibrar as 142g resultantes. E ele tinha que estar no outro prato, pois a soma dos outros pesos (40g) também seria incapaz de equilibrar a pera. Então peso de 81g e pera estavam certamente em pratos distintos.

O peso de 27g, se estivesse junto com o peso de 81g, obrigaria a ter ao menos 27+81-61=47g além da pera no prato da pera, mas isso não pode ser conseguido com os pesos restantes. Ao mesmo tempo, o prato da pera precisa de pelo menos 20g para contrabalançar o peso de 81g, o que também não pode ser conseguido sem o peso de 27g. Então o peso de 27g tinha que estar no prato da pera, que por isso certamente tinha, pelo menos, 27+61=88g.

Pelo mesmo raciocínio, o peso de 9g não pode estar no prato da pera e tem que estar no outro prato, que agora soma 81+9=90g. Analogamente, o peso de 3g tinha que estar no prato da pera e o peso de 1g no outro prato.

Concluindo, o prato da pera tinha os pesos de 27g e de 3g (somando 91g), enquanto o outro prato tinha os pesos de 81g, 9g e 1g (também somando 91g). E nenhuma outra maneira de equilibrar os pratos com esses pesos e a pera de 61g é possível.

Resposta: **B**.

Q10. As soluções de $f(x) = -10$ correspondem aos valores da abscissa dos cruzamentos do gráfico de f com a horizontal na altura -10. Pela figura, ocorrem dois cruzamentos, portanto são duas soluções.

Resposta: **C**.

Q11. Formulando em termos de conjuntos, a hipótese diz que $A \subset B$, que $C \cap B \neq \emptyset$ sem que $B \subset C$. Apenas $A \subset B$ já implica que se algo não é B então não é A, então (E) é correta.

Sobre as outras alternativas, um único exemplo serve para mostrar que não podem ser sempre verdadeiras. Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$ três subconjuntos dos números inteiros. Esses 3 conjuntos satisfazem as hipóteses: todos os A's são B's e apenas alguns B's são C's. (A) "Nenhum A é C": falsa, pois $2 \in A$ e $2 \in C$; (B) "Se algo é C então ele também é B": falsa, pois $4 \in C$ mas $4 \notin B$; (C) "Todo A é C": falsa, pois $1 \in A$ e $1 \notin C$; (D) "Ou nenhum A é C ou nenhum C é B": falsa, pois 2 pertence a A e C e, ao mesmo tempo, 2 e 3 pertencem a C e a B.

Resposta: **E**.

Q12. É bom lembrar que quadrados também são retângulos. Exceto 2 quadrados com lados inclinados em 45°, os demais retângulos têm lados paralelos aos eixos, e podem ser contados de acordo com suas dimensões $n \times m$.
$n = 1, m = 1$: 6
$n = 1, m = 2$: 4
$n = 1, m = 3$: 2
$n = 2, m = 1$: 3
$n = 2, m = 2$: 2
$n = 2, m = 3$: 1

Portanto, são os dois mencionados mais os 18 listados, totalizando 20.

Resposta: **E.**

Q13. Pelo encaixe no quadrilátero grande, o trapézio sombreado (e suas cópias) têm um lado maior (digamos de tamanho ℓ) e 3 lados menores iguais (digamos de tamanho m). Além disso, o encaixe também mostra que os ângulos agudos do trapézio são de 60° e os obtusos são de 120°. Por trigonometria, isso implica que $\ell = 2m$. Então o perímetro do trapézio sombreado é igual a $\ell + 3m = 5m$. Por outro lado, por inspeção da figura, o perímetro do quadrilátero maior é $4\ell + 2m = 8m + 2m = 10m$, ou seja, duas vezes maior que o do trapézio sombreado. Então o perímetro do trapézio sombreado é igual a 18 cm.

Resposta: **C**.

Q14. Para analisar as alternativas, é preciso saber os sinais e as raízes de f, g, $g - f$ e $f + 3$. A função f se anula em -1 e $+3$, é negativa entre esses valores e positiva nos demais pontos; a função g se anula em -1 e 4, é positiva entre esses dois valores e negativa nos demais pontos; a função $g - f$ (dada por $g(x) - f(x) = -2x^2 + 5x + 7$) se anula em -1 e $+7/2$, é positiva entre esses dois valores e negativa nos demais pontos; e $f(x) + 3 = x^2 - 2x$ se anula em 0 e 2, é negativa entre esses dois valores e positiva nos demais pontos.

(A) $f(x) > -3$ se e somente se $f(x)+3>0$; como visto acima, é VERDADEIRO que $x>2$ implica $f(x)+3>0$.
(B) $f(x) \leq g(x)$ se e somente se $g(x)-f(x) \geq 0$, o que ocorre se e somente se $-1 \leq x \leq 3,5$, como visto acima. Então, em particular, $-1<x<2$ implica $f(x) \leq g(x)$. VERDADEIRA.
(C) Como vimos, $f(x) \leq g(x)$ se e somente se $-1 \leq x \leq 3,5$. Então para $x=0$ vale $f(x) \leq g(x)$ mas não vale $0<x<3$. FALSA.
(D) Como vimos acima, f é positiva para $x<-1$ e g é negativa para $x<-1$. Conclui-se que se $x<-1$ então o produto das duas é negativo. VERDADEIRA.
(E) VERDADEIRA (exatamente o que constatamos acima sobre o sinal e as raízes de $g(x)-f(x)$).

Resposta: **C**.

Q15. Chamemos de A, B, C e D as quantidades pescadas por Ana, Beatriz, Carlos e Daniel, respectivamente. Queremos descobrir $C+D$. O enunciado diz que $A,B,C,D \geq 1$, que $B<C,D<A$, que $C \neq D$ e que $A+B+C+D=11$. Se $B=2$ então $C+D \geq 3+4$ e $A \geq 5$ (pois A é o maior e as quantidades não se repetem), de forma que $A+B+C+D \geq 14$, contradizendo o total de 11 peixes. Então $B=1$, $C+D \geq 2+3=5$ e $A \geq 4$. Por outro lado, isso implica $A+B \geq 5$ e, portanto, $C+D=11-(A+B) \leq 11-5=6$. Como $5 \leq C+D \leq 6$ então $C+D$ é igual a 5 ou a 6. Se for igual a 6, como $C \neq D$, então um deles é 2 e o outro é 4, e $A \geq 5$. Daí que $B+(C+D)+A \geq 1+6+5=12$, contradizendo o total estipulado. Portanto $C+D=5$ (um deles vale 2 e o outro vale 3, e A tem que valer 5).

Resposta: **C**.

Q16. Basta trabalhar com a semelhança de triângulos usando a linha paralela a AE que passa por B. Sejam G e H os pontos de cruzamento dessa linha com CD e EF. Então BGD é semelhante a BHF. Portanto $\frac{BG}{GD}=\frac{BH}{HF}$, ou seja, $\frac{x}{82-40}=\frac{x+27}{100-40}$. Resolvendo essa equação, chega-se em $x=63$.

Resposta: **D**.

Q17. *Estranhos.* Se não entra o algarismo zero, todos os quatro algarismos devem ser dígitos entre 1 e 9, sem repetição. Há 9 possibilidades para o primeiro, após o qual ficam 8 possibilidades, depois 7 e depois 6. Então são $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ números estranhos de quatro algarismos. *Belos.* O primeiro algarismo não pode ser zero, então só pode ser 2, 4, 6 ou 8. Os demais podem ser 0, 2, 4, 6, 8. Como pode haver repetição, então são $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ números belos de quatro algarismos.

Pede-se o número de números de quatro algarismos belos ou estranhos. Se somarmos 3024 com 500 (=3524) teremos somado duas vezes aqueles que são ao mesmo tempo belos e estranhos. Portanto temos que calcular quantos são e subtrair de 3524 a quantidade de números ao mesmo tempo belos e estranhos. Os que são belos e estranhos só usam os algarismos 2, 4, 6 e 8 em cada uma das posições (pois números estranhos não têm zero como algarismo) e ainda sem repetições. Então são $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Portanto são belos OU estranhos $3524-24=3500$ números de quatro algarismos.

Resposta: **D**.

Q18. É preciso simplificar as expressões para responder.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{2}{1-\sqrt{2}} + \sqrt{8} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{1-2} + \sqrt{8} = -2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -2 \\
b &= (1+\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3} \\
c &= \frac{(1+\sqrt{2})^3 - 7}{4\sqrt{2}} = \frac{1 + 3\sqrt{2} + 3\cdot 2 + 2\sqrt{2} - 7}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Então: a é inteiro e também é racional; b é irracional; c é racional. A única alternativa correta é C)"a e c são ambos racionais e b é irracional".

Resposta: **C**.

Q19. Chame de R o ponto médio de BC e de S o ponto médio de AC. Como BNM é semelhante a BRA, e BM é metade de BA, então BN é metade de BR, isto é, vale $\frac{x}{4}$. Assim, $NC = \frac{3x}{4}$. Como CPN é semelhante a CSB, então $CP = \frac{3}{4}CS = \frac{3x}{8}$. Por outro lado, $AP = 12$ implica $CP = x - 12$. Então

$$CP = \frac{3x}{8} = x - 12\,,$$

de onde resulta $x = \frac{96}{5} = 19,2$.

Resposta: **E**.

Q20. Como estamos trabalhando com proporções, podemos supor a quantidade de 100 gramas total, sendo 18g de sal e 82g de água. Para que os mesmos 18g de sal representem 30% do novo peso P após a evaporação, é preciso que $\frac{18}{P} = 0,3$, isto é, $P = 60g$. Portanto a quantidade de água restante após a evaporação tem que ser 42g. Isto significa uma perda de 40g de água dentro das 82g originais, isto é, a fração perdida é $\frac{40}{82} = \frac{20}{41}$, que representa uma porcentagem pouco menor do que 50%.

Resposta: **D**.

Q21.

(A) FALSA. Tome $x = 1$: $1^6 = 1$ não é maior do que $1^4 = 1$.

(B) FALSA. $x = 0$ também satisfaz $x^2 = x$.

(C) FALSA. Tome $y = x$.

(D) FALSA. Tome $x = -1/2$. Então $x^2 = 1/4$ e $-x = 1/2$, e não vale $x^2 \geq -x$.

(E) VERDADEIRA. A equação é equivalente a $x(x-1)^2 = 0$, o que implica $x = 0$ ou $x = 1$. Mas é logicamente correto afirmar que $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$.

Resposta: **E**.

A resposta a esta questão tem suscitado dúvidas, devido ao mau entendimento das regras da lógica. Existe consenso de que as quatro primeiras alternativas são falsas, mas é contestado se a quinta alternativa é verdadeira. Analisemos este assunto.

A afirmação da resposta (E) é: "se $x(x^2-2x+1)=0$ então $x=0$ ou $x=1$ ou $x=2$". Isto é realmente verdade, já que existem apenas dois números que satisfazem $x(x^2-2x+1)=0$, a saber 0 e 1, e qualquer dos dois também satisfaz a conclusão "$x=0$ ou $x=1$ ou $x=2$".

O erro por trás da maioria dos questionamentos está em confundir (E) com a sua recíproca, que seria afirmar que todo número que satisfaz "$x=0$ ou $x=1$ ou $x=2$" também satisfaz $x(x^2-2x+1)=0$. Isso é falso, realmente, mas não está afirmado em lugar algum.

Q22. Para que a soma seja par, ou (a) os 3 números são pares ou (b) um deles é par e os outros dois são ímpares. Há 10 números pares e 10 números ímpares entre os inteiros de 1 a 20. Os casos (a) seriam, portanto, $10\cdot 9\cdot 8=720$, se importasse a ordem, mas como a ordem não importa dividimos por $3!=6$, o que dá 120. Os casos (b): temos 10 escolhas para o número par; depois $10\cdot 9$ escolhas para os dois números ímpares, mas devemos dividir por 2 porque a ordem não importa, perfazendo 45; então são $10\cdot 45=450$ possibilidades. Somando os dois casos, são $120+450=570$.

Resposta: **C**.

Q23. Podemos escrever $a=(2^7)^{1000}=128^{1000}$, $b=(5^3)^{1000}=125^{1000}$ e $c=(13^2)^{1000}=169^{1000}$. Como $125<128<169$, então $b<a<c$.

Resposta: **A**

Q24. Como $|1-x^2|\geq 0$ para qualquer x real, então $f(x)\leq 0$ para qualquer x real. Apenas o gráfico em (B) respeita isso.

(E de fato está correto: $1-x^2$ se anula em -1 e $+1$. Entre -1 e $+1$ é positiva, logo $|1-x^2|=1-x^2$ nessa região, e $f(x)=-(1-x^2)=x^2-1$. Quando $|x|>1$ aí $1-x^2<0$ e $|1-x^2|=-(1-x^2)$. Portanto $f(x)=-(-(1-x^2))=1-x^2$ nessa região. Resumindo, $f(x)=x^2-1$ para $|x|\leq 1$ e $f(x)=1-x^2$ para $|x|>1$.)

Resposta: **B**.

Q25. Se é múltiplo de 5 então termina ou com o algarismo zero ou com o algarismo 5. Vamos contá-los separadamente. Se termina com zero, significa que só há os algarismos de 1 a 9 disponíveis para as três primeiras posições. Isso dá $9\cdot 8\cdot 7=504$ possibilidades. Se termina com 5, então a primeira posição não pode nem ser 5, nem ser zero, o que dá 8 possibilidades. Escolhido esse algarismo, a segunda posição tem à disposição os algarismos de 0 a 9, exceto o 5 e aquele escolhido na primeira, ou seja, tem 8 possibilidades. Para a terceira posição, restam 7 possibilidades. Então são $8\cdot 8\cdot 7=448$ possibilidades. Somando as duas, são $448+504=952$ possibilidades.

Resposta: **D**.

Q26. O enunciado diz que $f(d) = c \cdot \frac{q}{d^2}$. Então

$$f(2d) = c\frac{q}{(2d)^2} = \frac{1}{4} \cdot c \cdot \frac{q}{d^2} = \frac{1}{4}f(d)\,.$$

Resposta: **A**.

Q27. Na figura há 4 pétalas sombreadas, todas idênticas. Podemos dividi-las em "semipétalas", traçando em cada pétala um segmento de reta entre os dois vértices da pétala. São, portanto, 8 semipétalas. Observe que $(1,1)$ é vértice da pétala do primeiro quadrante. Portanto a área da semipétala superior do primeiro quadrante é um quarto da área do círculo unitário (isto é, $\frac{\pi}{4}$) menos a área do triângulo-retângulo de catetos unitários (isto é, $1/2$). Ou seja, cada semipétala tem área $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Como são 8, a área total sombreada é $2\pi - 4$.

Resposta: **C**.

Q28. Seja n o número de pessoas que pagaram a conta. Como havia $n+2$ pessoas, o rateio inicial era de $\frac{120}{n+2}$. Saindo as duas pessoas, o rateio passou a ser de $\frac{120}{n}$. Como o rateio aumentou em 5 reais, isso leva à equação

$$\frac{120}{n+2} + 5 = \frac{120}{n}\,.$$

Multiplicando-se os dois lados por $n(n+2)$, resulta a equação de segundo grau

$$5n^2 + 10n - 240 = 0\,.$$

A solução positiva dessa equação é $n = 6$.

Resposta: **B**.

Q29. Como $\frac{OA'}{OA}$ é a razão de semelhança entre os hexágonos, a razão entre as áreas será o quadrado dessa razão, isto é, $\frac{(OA')^2}{(OA)^2}$.

Notemos que OA é o tamanho da apótema do hexágono externo, o que pode ser visto ao girar-se o hexágono interno até que A coincida com o ponto médio de $A'F'$. Nessa *nova posição*, OAA' é triângulo-retângulo, OA' é sua hipotenusa e $AA' = \frac{1}{2}A'F' = \frac{1}{2}OA'$. Então $(OA)^2 = (OA')^2 - \frac{1}{4}(OA')^2 = \frac{3}{4}(OA')^2$. Portanto a razão procurada é igual a $\frac{4}{3}$.

Resposta: **B**.

Q30. A primeira rodada completa de distribuição de balas totaliza $N_1 = 1+2+3+4 = 10$ balas. Em cada rodada, cada um recebe 4 balas a mais do que na rodada anterior. Cada rodada inteira terá, portanto, 16 balas a mais que a anterior. Portanto o número N_j de balas distribuídas na rodada j é dado por

$$N_j = 10 + 16(j-1)\,.$$

O total T_j de balas distribuídas até o final da j-ésima rodada é a soma $N_1 + N_2 + \ldots + N_j$, que é a soma de uma progressão aritmética, e vale

$$j \cdot \frac{N_1 + N_j}{2} = 8j^2 + 2j\,.$$

Se k é o maior número de rodadas completas dentro do limite de 300 balas então k é o maior dentre os valores de j que satisfazem $8j^2 + 2j \leq 300$, ou ainda

$$4j^2 + j - 150 \leq 0\,.$$

Ou seja, k é o maior inteiro localizado entre as raízes do polinômio quadrático $4x^2+x-150$. Esse polinômio tem uma raiz negativa e outra positiva, inteira e igual a 6. Então a 6ª rodada é a última completa e, de fato, após terminada, terão sido distribuídas exatamente 300 balas, pois

$$8 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 = 300\,.$$

Agora sabemos que Daniela recebeu balas em 6 rodadas, segundo a progressão aritmética: 3, 7, 11, 15, 19, 23. No total, recebeu a soma dos valores dessa progressão, ou seja,

$$6 \cdot \frac{3+23}{2} = 78\,.$$

Resposta: **C**.

Q31. A primeira equação é equivalente a $y(x^2 - y) = 0$ e suas soluções são os pontos (x, y) que satisfazem $y = 0$ ou $y = x^2$, isto é, são os pontos da união da abscissa com o gráfico de x^2. A segunda equação é equivalente a $(x^2 - y)(x + 1) = 0$ e suas soluções são os pontos do conjunto que é a união do gráfico de x^2 com a reta vertical definida por $x = -1$. Logo, as soluções do sistema são os pontos na interseção desses dois conjuntos, que é a união do ponto $(-1, 0)$ com o gráfico de x^2.

Isto mostra que existem infinitas soluções para o sistema: (I) é VERDADEIRA. Também mostra que há soluções fora da abscissa: (II) é FALSA. E não há nenhuma solução com segunda coordenada negativa, em particular (III) é VERDADEIRA.

Resposta: **E**.

Q32. O perímetro do círculo da base do cone é o mesmo perímetro do arco de círculo na borda do papel que liga A a B. Esse perímetro é igual a $\frac{1}{3}$ do perímetro total do círculo de raio 12, ou seja, $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 12 = 8\pi$.

Seja r o raio do círculo da base do cone. Como $2\pi r = 8\pi$ então $r = 4$. Se h é a altura do cone, então, examinando-se a interseção do plano vertical que passa pelo vértice do cone, deduz-se, pelo Teorema de Pitágoras, que $h^2+r^2 = 12^2$. Portanto

$$h = \sqrt{144 - 4^2} = \sqrt{128} \simeq 11,3\,.$$

Obs. Como $11^2 = 121$ então $\sqrt{128} > 11$, deixando apenas as respostas (D) e (E) como possíveis. Para decidir entre elas, pode-se escrever

$$(11,3)^2 = (11 + 0,3)^2 = 121 + 2 \cdot 11 \cdot 0,3 + 0,3^2$$
$$(11,7)^2 = (11 + 0,7)^2 = 121 + 2 \cdot 11 \cdot 0,7 + 0,7^2$$

Os termos $0,3^2$ e $0,7^2$ não superam $0,5$. O acréscimo mais importante em 121 é o termo do meio: $22 \cdot 0,3 = 6,6$ e $22 \cdot 0,7 = 15,4$, respectivamente. Daí fica claro que $11,3$ é a melhor aproximação.

Resposta: **D**.

Q33. Seja F a fração da gleba menor que um trabalhador pode cortar em um dia. Se são N trabalhadores, então eles, no primeiro dia, cortaram NF e, no segundo dia, um deles ainda cortou F, totalizando $(N+1)F$. Como a gleba maior é o dobro da menor, isso deu 3 vezes o tamanho da gleba menor, portanto $(N+1)F = 3$.

Por outro lado, a gleba maior foi toda cortada em um dia. Na primeira metade do dia foram N trabalhadores, que contribuíram com $\frac{1}{2} \cdot N \cdot F$, e na segunda metade do dia foram $\frac{N}{2}$ trabalhadores, que contribuíram com $\frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2} \cdot F$. Então $\frac{1}{2} \cdot \frac{3N}{2} \cdot F = 2$ (pois o corte da gleba maior foi equivalente a 2 vezes a gleba menor).

Essa segunda equação implica que $NF = \frac{8}{3}$. Colocando esse valor de NF na primeira, resulta $F = \frac{1}{3}$. Logo $N = 8$.

Resposta: **C**.

Q34. Os algarismos ímpares são cinco: 1, 3, 5, 7, 9. O total de números que podem ser escritos com 5 algarismos ímpares distintos é, portanto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Para cada algarismo possível, há 24 deles que terminam com esse algarismo. Então a soma das *unidades* desses números é igual a

$$24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 24 \cdot 25 = 600\,.$$

Pela mesma razão, a soma das *dezenas* tem o mesmo valor, mas sendo dezenas elas somam $600 \cdot 10 = 6000$. As centenas somam 60000, os milhares somam 600000 e as dezenas de milhares somam 6000000. A soma total dá 6666600.

Resposta: **A**.

Q35. Como $7x + 7y$ é certamente múltiplo de 7, podemos subtraí-lo de $10x + y$ e teremos que $3x - 6y$ é certamente múltiplo de 7. Dividindo esse número por 3, teremos $x - 2y$ e esse número continua sendo múltiplo de 7. Então (A) está correta.

Podemos ver que as demais nem sempre são verdadeiras apresentando contraexemplos. Por exemplo, para (B) basta encontrar x e y tais que $10x + y$ seja múltiplo de 7 mas $2x + y$ não seja. Ora, tomando $(x, y) = (1, 4)$ ficamos com $10x + y = 14$ e $2x + y = 6$. Esse mesmo contraexemplo também serve para (C), (D) e (E).

Resposta: **A**.

Questões dissertativas

Q1.

Seja x o comprimento dos lados do retângulo perpendiculares ao muro e y o comprimento do lado do retângulo paralelo ao muro. A metragem utilizada de cerca é, portanto, de $2x + y$, e isso deve ser igual a 40 m.

Primeira solução. Daí segue que $y = 40 - 2x$. Como a área do retângulo é dada por xy, o fazendeiro quer maximizar $xy = x(40-2x)$, que é um polinômio quadrático com coeficiente do termo de grau 2 negativo e com raízes em $x = 0$ e $x = 20$. Seu valor máximo ocorre no ponto médio entre as raízes, isto é, em $x = 10$. Disso decorre que $y = 40 - 2 \cdot 10 = 20$.

Comentário 1. Também é verdade que $2x + y = 40$, de onde segue que $x = 20 - \frac{y}{2}$. Então a área do retângulo é igual a $(20 - \frac{y}{2})y$, que também é uma função quadrática com coeficiente do termo de grau 2 negativo e com raízes em $y = 0$ e $y = 40$. Logo seu máximo ocorre em $y = 20$, e daí sai automaticamente $x = 10$.

Comentário 2. Observe que a área do retângulo é igual a 200 m^2.

Segunda solução. Observamos que $2x + y = 40$ é também uma maneira de escrever que a média aritmética simples entre $4x$ e $2y$ é igual a 40:

$$2x + y = \frac{4x + 2y}{2} = 40\,.$$

A média aritmética de dois números positivos é sempre maior do que ou igual a sua média geométrica, logo

$$40 = \frac{1}{2}(4x + 2y) \geq \sqrt{(4x)\cdot(2y)} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{xy}\,,$$

isto é,

$$8xy \leq 40^2\,.$$

Isso mostra que a área xy é limitada por $40^2/8 = 200$ m^2. Mas a igualdade entre a média aritmética e a média geométrica é alcançada se, e somente se, os dois termos são iguais. Ou seja xy atinge o valor máximo de 200 m^2 se, e somente, se $4x = 2y$, isto é, $y = 2x$. A solução é encontrada após resolver-se o sistema constituído pelas duas equações $y = 2x$ e $2x + y = 40$, que tem única solução $(x, y) = (10, 20)$.

Q2.

(a) Seja M o ponto médio do segmento PA e N o ponto médio do segmento AQ. Como PA é uma corda da circunferência à esquerda, de centro C_1, então C_1M é perpendicular a PA. Da mesma forma, C_2N é perpendicular a AQ. Além disso, sendo C_1C_2 paralelo à reta r, segue que C_1C_2 é perpendicular aos segmentos C_1M e C_2N. Então C_1C_2NM é um retângulo. Disso decorre que $NM = C_1C_2$.

Então $PQ = PM + MA + AN + NQ$. Como $PM = MA$ e $AN = NQ$, segue que $PQ = 2(MA + AN) = 2MN = 2C_1C_2$, como se queria demonstrar.

(b) Sejam M e N como no item (a). Seja ℓ_M a reta contendo C_1M e ℓ_N a reta contendo C_2N. As duas retas são perpendiculares a PQ e paralelas entre si. A distância mínima entre dois pontos que estejam cada um em uma dessas retas ocorre quando o segmento por esses pontos é perpendicular a ambas as retas, como é o caso de MN. Em outras palavras, quando o segmento pelos dois pontos é paralelo a r. Então, como C_1C_2 não é paralelo a r, por hipótese, $C_1C_2 > MN$.

Daí segue, como no item anterior, que $PQ = 2(MA + AN) = 2MN > 2C_1C_2$, como se queria demonstrar.

Q3.

Seja n o número de pedras 1×1 e m o número de pedras 2×1. Em primeiro lugar, o engenheiro pode usar algum e apenas algum dos seguintes valores para (n, m): $(10, 0)$, $(8, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$ e $(0, 5)$.

Em cada um dos casos $(10, 0)$ e $(0, 5)$ só há 1 maneira de revestir a passarela, já que todas as pedras são iguais. No caso $(8, 1)$ há 9 possibilidades de se colocar a única pedra de 2 m junto com as 8 pedras de 1 m. Note que nenhuma dessas disposições é equivalente entre si, pois as duas pontas da passarela são *distinguíveis* entre si. A mesma observação vale para a análise dos casos restantes.

De fato, os casos restantes e os anteriores podem ser analisados sempre da mesma forma. De um total de $n + m$ pedras, basta escolher as m posições das m pedras de 2 m. Para isso, há $\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ escolhas. Para $(n, m) = (6, 2)$ isso dá $\frac{8!}{2!6!} = 28$, para $(n, m) = (4, 3)$ dá $\frac{7!}{3!4!} = 35$ e para $(n, m) = (2, 4)$ dá $\frac{6!}{2!4!} = 15$.

O total é, portanto, igual a $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$.