Discursiva 1

Cristina e Pedro vão com outros seis amigos, três moças e três rapazes, para uma excursão. No ônibus que vai fazer a viagem sobraram apenas quatro bancos vagos, cada um deles com dois assentos, todos numerados. Ficou acertado que cada banco vago será ocupado por uma moça e um rapaz, e que Cristina e Pedro se sentarão juntos. Respeitando-se esse acerto, de quantas maneiras o grupo de amigos pode se sentar nos assentos vagos do ônibus? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO:

Primeiro vê-se de quantas maneiras os casais podem ser formados. Ordenando os rapazes, o primeiro rapaz tem 3 possibilidades entre as moças, o segundo tem 2 e o terceiro fica determinado pelos outros. Assim, são 6 possíveis formações de casais. Para cada formação há várias maneiras de escolher seus bancos. Sendo 4 bancos para os 4 casais, são $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Mas cada casal pode escolher os assentos de seu banco de duas maneiras, então para cada escolha dos casais nos bancos ainda temos $2^4 = 16$ posicionamentos possíveis.

São, portanto, $6 \cdot 24 \cdot 16 = 2304$ maneiras de o grupo se sentar, nas condições impostas.

Discursiva 2

Decida se cada uma das duas afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando sua decisão.

(A) "$|a - b| \leq \big|\,|a| - |b|\,\big|$, para quaisquer números reais a e b".

(B) "$|a + b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer números reais a e b".

SOLUÇÃO:

(A) Essa afirmação é falsa, pois existem números reais a e b para os quais a desigualdade não é satisfeita. Basta tomar $a = 1$ e $b = -1$: para esses números, o lado esquerdo é igual a 2 e o lado direito é igual a zero, e, evidentemente, $2 \leq 0$ é falso.

(B) Essa afirmação é verdadeira. Não há uma única maneira de prová-la, mas aqui apresentaremos apenas uma. Sendo tanto $|a + b|$ como $|a| + |b|$ não negativos, basta mostrar que seus quadrados satisfazem a desigualdade, isto é, basta mostrar que

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2\,.$$

Para isso, começamos pelo lado esquerdo. O quadrado de $|a+b|$ é o quadrado de $a+b$, então

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \,.$$

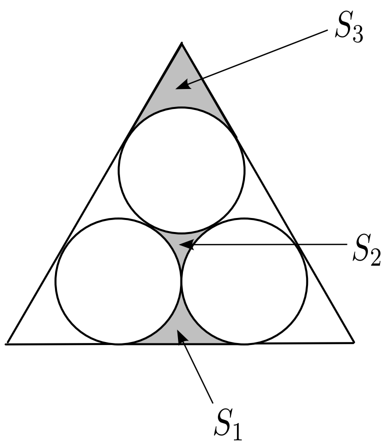
Para todo x real é verdade que $x \leq |x|$, porque ou $x \geq 0$ e vale a igualdade, ou $x < 0$ e vale $x < 0 < |x|$. Então $2ab \leq |2ab| = 2|a| \cdot |b|$ e

$$|a+b|^2 \leq |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \,,$$

como queríamos demonstrar.

Discursiva 3

A figura abaixo mostra três circunferências de 1 cm de raio, tangentes entre si duas a duas, e um triângulo equilátero circunscrito a essas circunferências.



(A) Calcule o lado do triângulo equilátero, explicitando seu raciocínio.

(B) Sendo S_1, S_2 e S_3 as áreas das regiões sombreadas, conforme indicado na figura, mostre que $S_3 > S_1 + S_2$.

SOLUÇÃO:

(A) Sejam A, B e C os vértices do triângulo, sendo A o vértice superior e B o vértice inferior esquerdo. Seja O_A o centro da circunferência mais próxima de A e D o ponto de tangência dessa circunferência com o lado AB, o que implica que O_AD é perpendicular a AB. Então ADO_A é um triângulo retângulo, com ângulo reto em D.

Como ABC é equilátero, então o triângulo ADO_A tem ângulo de $\frac{\pi}{6}$ (30 graus) em A. Como O_AD é o raio da circunferência (igual a 1, pela hipótese), então

$$\frac{1}{AD} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ou seja, $AD = \sqrt{3}$.

Agora seja D' o ponto de tangência da circunferência mais próxima de B. Por argumento inteiramente análogo, $BD' = \sqrt{3}$. Além disso, DD' é igual a O_AO_B, pois $DD'O_BO_A$ é um retângulo. Como o segmento O_AO_B contém o ponto de tangência das circunferências, então O_AO_B mede a soma de seus raios, isto é, 2. Portanto $DD' = 2$ e $AB = BD' + D'D + DA = 2 + 2\sqrt{3}$.

(B) S_3 é duas vezes a área de ADO_A subtraído da área de um setor de 120 graus da circunferência de raio 1. Então $S_3 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

S_2 é a área do triângulo equilátero com vértices nos centros das circunferências subtraída da área de 3 setores de 60 graus. A área de cada setor é $\frac{\pi}{6}$, logo os três juntos somam a área de $\frac{\pi}{2}$. O triângulo equilátero tem lado 2 e altura $\sqrt{3}$ (por Pitágoras), logo sua área é $\sqrt{3}$. Portanto $S_2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$.

Finalmente, S_1 é a área do retângulo cujos vértices são os centros das duas circunferências inferiores e seus pontos de tangência com o lado inferior, que vale 2, subtraída da área de dois setores de 90 graus, que valem $\frac{\pi}{4}$ cada uma. Portanto $S_1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Agora, $S_3 > S_1 + S_2$ se, e somente se,

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}) + (2 - \frac{\pi}{2}),$$

que ocorre (por reagrupamento dos termos) se, e somente, se $\pi > 3$, que é uma afirmação verdadeira.