MA13 – Geometria I – Avaliação 3 – 2011

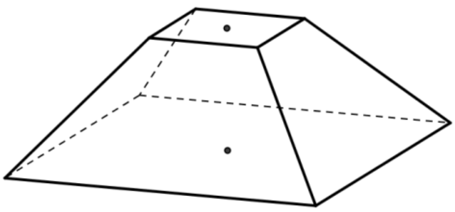
Questão 1
Considere um quadrado *ABCD* de lado *a* e seja *E* o ponto do lado *CD* tal que $AE = BC + CE$.
(1,0) (a) Calcule o comprimento de *CE*.
(1,0) (b) Calcule o seno do ângulo $C\hat{A}E$.

Questão 2
Um trapézio *ABCD* tem altura *h* e bases $AB = a$ e $CD = b$. Seja *F* o ponto de interseção das diagonais.
(1,0) (a) Calcule as distâncias de *F* às duas bases.
(1,0) (b) Calcule as áreas dos triângulos *ADF* e *BCF*.

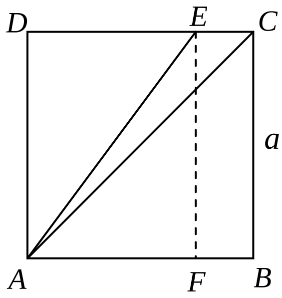
Questão 3
Seja *ABC* um triângulo qualquer. Desenhe exteriormente a *ABC* os triângulos equiláteros *ABD* e *ACE*.
(1,0) (a) Mostre que *DC* = *BE*. *Sugestão*: use congruência de triângulos.
(0,5) (b) Sendo *F* o ponto de interseção de *DC* e *BE*, mostre que o quadrilátero *ADBF* é inscritível.
(0,5) (c) Mostre que $A\hat{F}B = B\hat{F}C = C\hat{F}A = 120^0$.

Questão 4
Seja Π um plano horizontal. A reta *r* é perpendicular a Π e seja *A* o ponto de interseção de *r* e Π. A reta *s* está contida em Π e não passa por *A*. O ponto *B* da reta *s* é tal que *AB* é perpendicular à reta *s*. Seja *M* um ponto de *r* e *N* um ponto de *s*.
Dados: $AM = a$, $BN = b$, $AB = c$.
(0,5) (a) Faça um desenho da situação descrita no enunciado.
(0,5) (b) Calcule a distância entre os pontos *M* e *N*.
(0,5) (c) Calcule a tangente do ângulo que a reta *MN* faz com o plano Π.
(0,5) (d) Calcule a tangente do ângulo entre as retas *AB* e *MN*.

Questão 5
As bases de um tronco de pirâmide regular são quadrados de lados 12 e 4. Sabe-se que a área lateral é igual à soma das áreas das bases.
(1,0) (a) Calcule a altura do tronco.
(1,0) (b) Calcule o volume do tronco.



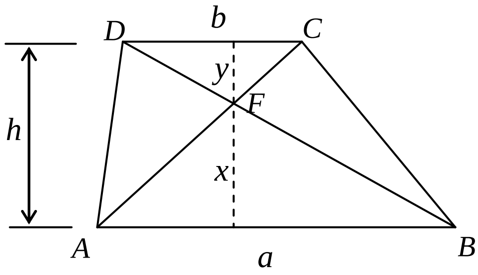
Questão 1 – Solução



(a) Seja $CE = x$. Assim $AE = a + x$.
Traçando *EF* perpendicular a *AB* temos no triângulo *AEF*:
$(a+x)^2 = (a-x)^2 + a^2$ o que dá $x = \dfrac{a}{4}$.

(b) Seja $A\hat{E}C = \theta$.
Como $CE = \dfrac{a}{4}$ e $AE = a + \dfrac{a}{4} = \dfrac{5a}{4}$ temos, pela lei dos senos,
$\dfrac{a/4}{\sin\theta} = \dfrac{5a/4}{\sqrt{2}/2}$ o que dá $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

Questão 2 – Solução



(a) Sejam *x* e *y* as distâncias de *F* às bases *AB e CD*, respectivamente. Como os triângulos *FAB* e *FCD* são semelhantes, temos:
$\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{a+b}{h}$
Assim, $x = \dfrac{ah}{a+b}$ e $y = \dfrac{bh}{a+b}$.

(b) Os triângulos *ADB* e *ACB* têm mesma área porque possuem mesma base e mesma altura. Os triângulos *ADF* e *BCF* têm mesma área porque

$$[ADF] = [ADB] - [AFB] = [ACB] - [AFB] = [BCF]$$

$$[ADF] = [BCF] = \frac{ah}{2} - \frac{ax}{2} = \frac{a}{2}\left[h - \frac{ah}{a+b}\right] = \frac{abh}{2(a+b)}$$

Questão 3 – Solução

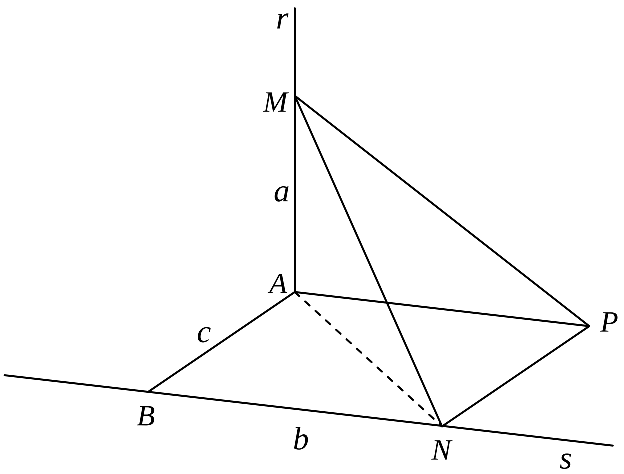
(a) Temos $AD = AB$, $AC = AE$ e $D\hat{A}C = B\hat{A}E = \hat{A} + 60^0$. Portanto, os triângulos *ADC* e *ABE* são congruentes e *DC* = *BE*.

(b) Pela congruência anterior, $A\hat{D}F = A\hat{B}F$. Portanto *D* está na circunferência que passa por *A*, *B* e *F*.

(c) Como *ADBF* é inscritível, seus ângulos são suplementares. Então $A\hat{F}B = 180^0 - A\hat{D}B = 180^0 - 60^0 = 120^0$. Analogamente, *AECF* é inscritível e $C\hat{F}A = 120^0$. Consequentemente, $B\hat{F}C = 120^0$.

Questão 4 – Solução

(a)



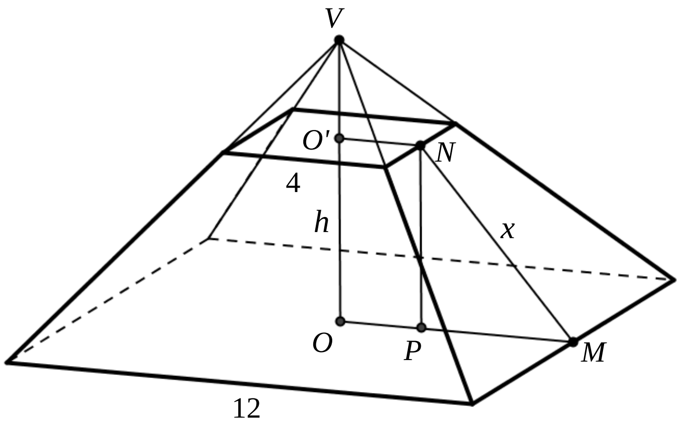
b) No triângulo *ABN*, retângulo em *B*, $AN^2 = b^2 + c^2$.
No triângulo *MAN*, retângulo em *A*, $MN^2 = a^2 + AN^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Então $MN = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

c) O ângulo que MN faz com Π é $M\hat{N}A = \alpha$. Assim, $\tan\alpha = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

d) Construa o retângulo *ABNP*.
AM é ortogonal a *NP* e *AP* é perpendicular a *NP*. Portanto, *NP* é perpendicular ao plano *AMP* e, consequentemente, o ângulo *NPA* é reto.
O ângulo entre *MN* e *BA* é o ângulo entre *MN* e *NP*, $M\hat{N}P = \beta$.
Assim, $\tan\beta = \dfrac{PM}{NP} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$.

Questão 5 – Solução

(a)



Sejam O e O' os centros das duas bases (maior e menor) como mostra a figura acima.
Na reta OO' está o vértice V da pirâmide que dou origem ao tronco.
A altura do tronco é $OO' = h$.
Cada face lateral do tronco é um trapézio isósceles, e a altura de um dos trapézios é o segmento MN que une os pontos médios das duas bases. Seja $MN = x$.
A área lateral do tronco é a soma das áreas dos quatro trapézios. Então,

$$4 \cdot \frac{(12+4)x}{2} = 12^2 + 4^2$$

Isto dá $x = 5$. Trace agora NP perpendicular à OM como na figura acima. Temos $O'O = NP = h$, $ON = OP = 2$, $OM = 6$ e, consequentemente, $PN = 4$. No triângulo PMN retângulo em P temos $h = 3$.

(b) Seja $VO' = y$.

Utilizando a semelhança entre as duas pirâmides temos $\dfrac{y}{y+3} = \dfrac{4}{12}$ o que dá $y = \dfrac{3}{2}$.

A altura da pirâmide grande é $OV = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$ e o seu volume é

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \frac{9}{2} = 216.$$

O volume da pirâmide pequena é $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \dfrac{3}{2} = 8$.

O volume do tronco é a diferença: $V = 216 - 8 = 208$ unidades de volume.

Obs:
Pode-se também aplicar a fórmula do volume do tronco de pirâmide:
$V = \dfrac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$ onde S_1 e S_2 são as áreas das duas bases e h é a altura do tronco. Assim,

$$V = \frac{3}{3}(12^2 + 4^2 + \sqrt{12^2 \cdot 4^2}) = 144 + 16 + 48 = 208.$$