Questão 1.

A sequência $0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, \ldots$ é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.

(0,5) (a) Qual é o centésimo termo dessa sequência?

(0,5) (b) Qual é a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência?

(1,0) (c) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

UMA SOLUÇÃO

(a) Chamemos de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ os termos dessa sequência. A sequência dos termos com índices ímpares $a_1, a_3, a_5, \ldots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 0 e passo (ou razão) 7. A sequência dos termos com índices pares $a_2, a_4, a_6, \ldots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e passo 7. O centésimo termo é o 50º da sequência dos pares. Então $a_{100} = 3 + (50 - 1) \cdot 7 = 3 + 343 = 346$.

(b) Há maneiras diferentes de se fazer isso. Podemos agrupar a soma assim:

$$(a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) + \ldots + (a_{50} + a_{51}).$$

Veja que de a_1 para a_2 há um acréscimo de 3 e de a_{99} para a_{100} também. Então os dois primeiros termos são iguais. Do segundo para o terceiro há um aumento e um decréscimo de 4, logo o terceiro termo é igual ao segundo. E assim por diante. Então todos os termos entre parênteses são iguais ao primeiro, que vale $0 + 346 = 346$. Como são 50 termos, a soma dá $50 \cdot 346 = 17300$.

Outro jeito de fazer é somar separadamente as sequências com índices ímpares e pares. No segundo caso (pares), são 50 termos da progressão aritmética de razão 7 começando em 3 e terminando em 346. A soma dessa progressão dá

$$50 \cdot \frac{3 + 346}{2} = 25 \cdot 349 = 8725.$$

No primeiro caso (ímpares), são 50 termos, mas todos 3 unidades menores do que os termos da série par. Então a soma desses é 8725 subtraído de $50 \cdot 3 = 150$, isto é, dá 8575. Juntando as duas, ficamos com 17300.

Obs. Essa segunda soma também sairia da mesma forma como a outra, pois a PA tem primeiro termo igual a 0, último termo igual a 343, totalizando 50 termos, logo soma

$$50 \cdot \frac{0 + 343}{2} = 25 \cdot 343 = 8575.$$

(c) Observe primeiro que se n é ímpar então a_n é múltiplo de 7, e se n é par então $a_n - 3$ é múltiplo de 7 (de fato, valem as recíprocas, mas não precisaremos disso).

Como nem $2000 = 7 \cdot 285 + 5$ nem $1997 = 7 \cdot 285 + 2$ são múltiplos de 7, então 2000 não pode ser um a_n nem para n par nem para n ímpar.

Questão 2.

Seja R_n o número máximo de regiões determinadas no plano por n círculos.

(0,5) (a) Quais são os valores de R_1 e R_2?

(0,5) (b) Explique por que $R_{n+1} = R_n + 2n$, para todo $n \geq 1$.

(1,0) (c) Mostre por indução que $R_n = n^2 - n + 2$.

UMA SOLUÇÃO

(a) Um único círculo no plano determina exatamente duas regiões (dentro e fora). Então $R_1 = 2$. Agora colocamos um segundo círculo no plano e olhamos para várias possibilidades: (i) se ele for idêntico ao primeiro, continuamos com duas regiões; (ii) se um dos círculos está inteiramente contido numa das regiões delimitadas pelo outro, então ficam delimitadas 3 regiões (mesma coisa se apenas se tangenciam); (iii) se eles se intersectam sem se tangenciarem, ficam delimitadas 4 regiões. Esse é o máximo possível, então $R_2 = 4$.

(b) Primeiro verifiquemos se a fórmula está compatível com a resposta anterior. Pela fórmula, deveríamos ter $R_2 = R_1 + 2 \cdot 1$. De fato, $R_1 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$.

Agora imaginemos que n círculos já estão desenhados, definindo um certo número de regiões. Então desenhamos um novo círculo (diferente dos anteriores, pois neste caso a divisão de regiões permaneceria a mesma), que intersectará os círculos anteriores em um certo número de pontos. Como o novo círculo só pode intersectar cada um dos outros círculos em no máximo 2 pontos, ele terá no máximo $2n$ intersecções. Essas intersecções dividirão o círculo em arcos de círculo, que serão no máximo $2n$ (e no mínimo 1, que é quando o círculo não intersecta nenhum dos círculos já desenhados). Chamemos de k o número de arcos de círculo obtidos.

Agora suponha que numeremos esses k arcos de círculo, e vamos desenhar o $n+1$-ésimo círculo arco por arco, contando qual é o máximo acréscimo de regiões em cada etapa. O primeiro arco está inteiramente contido em uma das regiões previamente delimitadas, e a divide em duas regiões. Isso acrescenta uma unidade na contagem de regiões. Como o segundo arco só pode intersectar os círculos anteriores e o primeiro arco em seus extremos, ele também está inteiramente contido em uma das regiões, incluindo as novas regiões formadas pela introdução do primeiro arco. Ele dividirá essa região em duas, acrescentando mais uma unidade na contagem. Esse raciocínio pode ser repetido de forma indutiva até chegarmos no k-ésimo arco. No total, serão acrescentadas k regiões à contagem.

Como $k \leq 2n$, então são acrescentadas no máximo $2n$ regiões à contagem, quando se passa de n círculos para $n+1$ círculos. Portanto, se n círculos não podem dividir o plano em mais do que R_n regiões, então $n+1$ círculos não poderão dividir o plano em mais do que $R_n + 2n$ regiões. Isso define o valor de R_{n+1}.

Observação. A rigor, dever-se-ia mostrar que, para cada n, alguma configuração de círculos divide o plano em R_n regiões, para se dizer que R_n é o máximo (e não apenas uma cota superior). Para tanto, em vista do que foi feito acima, basta achar uma lista de círculos $C_1, C_2, C_3, \ldots$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, o círculo C_{n+1} intersecta cada círculo $C_1, \dots, C_n$ em 2 pontos, produzindo ao todo $2n$ pontos de intersecção distintos entre si. Isso pode ser realizado por

$$C_i = \{(x,y); (x - \frac{1}{i})^2 + y^2 = 1\}\,,\; i = 1,2,3,\dots\,,$$

isto é, C_i é o círculo de raio 1 e centro em $(\frac{1}{i}, 0)$. Uma conta simples mostra que C_{n+1} intersecta C_i nos dois pontos

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{i}\right)\,,\, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right)^2} \right)\,.$$

Como os valores de $\frac{1}{i}$ são distintos para $i = 1, 2, \dots, n$, os $2n$ pontos de intersecção são todos distintos entre si.

(c) A fórmula vale para $n = 1$, pois $1^2 - 1 + 2 = 2 = R_1$. Agora, supondo que ela vale para n, isto é, supondo $R_n = n^2 - n + 2$ verdadeira, queremos mostrar que também vale para $n+1$, isto é, queremos mostrar que $R_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 2$. Ora, a relação de recorrência nos dá $R_{n+1} = R_n + 2n$; valendo a hipótese de que $R_n = n^2 - n + 1$, então

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n + 2n \\ &= (n^2 - n + 2) + 2n \\ &= n^2 + n + 2 \\ &= [(n+1)^2 - 2n - 1] + n + 2 \\ &= (n+1)^2 - n - 1 + 2 \\ &= (n+1)^2 - (n+1) + 2\,. \end{aligned}$$

Questão 3. Suponha que o dinheiro valha 10% ao mês para um comerciante que vende determinado produto por R$ 4200,00 à vista.

(1,0) (a) Se o comerciante deseja oferecer o produto para compra em duas prestações iguais, a primeira no ato da compra, qual deve ser o valor dessas prestações?

(1,0) (b) Suponha que ele deseja oferecer o produto em 10 prestações iguais, a primeira no ato da compra. Escreva uma expressão que permita calcular o valor da prestação.

UMA SOLUÇÃO

(a) Se x for o valor da prestação, ele quer $x + \frac{x}{1,1} = 4200$. Isso dá $x(1 + \frac{1}{1,1}) = 4200$. Então $x = \frac{11 \times 4200}{21} = 2200$.

(b) Pelo mesmo raciocínio, ele quer x tal que

$$x + \frac{x}{1,1} + \frac{x}{1,1^2} + \ldots + \frac{x}{1,1^9} = 4200\,.$$

Ou seja,

$$x\left(1 + 1,1^{-1} + 1,1^{-2} + \ldots + 1,1^{-9}\right) = 4200$$

e

$$x\left(\frac{1 - 1,1^{-10}}{1 - 1,1^{-1}}\right) = 4200\,.$$

Logo

$$x = 4200 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,1}}{1 - \frac{1}{1,1^{10}}} = \frac{4200}{11} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,1^{10}}}\,.$$

Questão 4.

Uma senha de banco é formada por 4 digítos de 0 a 9.

(1,0) (a) Quantas são as senhas em que aparecem exatamente três dígitos diferentes?

(1,0) (b) Quantas são as senhas em que não há dígitos consecutivos iguais?

UMA SOLUÇÃO

(a) Se há exatamente 3 dígitos diferentes, então há dois dígitos iguais e mais dois outros, diferentes dele e diferentes entre si. Há 10 possibilidades para o dígito que aparece repetido. Escolhido esse dígito, precisamos de 2 dígitos entre os 9 restantes. Temos $C_9^2 = 36$ escolhas para os dígitos restantes. Portanto, na escolha dos dígitos em que o dígito repetido está determinado, temos 360 possibilidades.

Falta agora ver de quantas maneiras diferentes eles podem ser dispostos. Primeiro escolhemos a disposição dos dois dígitos que não se repetem. Como há C_4^2 possibilidades de escolha de duas entre quatro posições, temos um total de 6 disposições possíveis.

Fixada as posições dos dígitos repetidos, temos 2 maneiras de colocar os outros dois dígitos.

Então cada uma das 360 escolhas dos 3 dígitos (com o dígito que se repete determinado) pode ser arranjada de 12 maneiras distintas, o que dá um total de $360 \times 12 = 4320$ senhas com exatamente 3 dígitos diferentes.

(b) Há 10 possibilidades para o primeiro dígito. Como o segundo só não pode ser igual ao primeiro, há 9 possibilidades para o segundo (para cada escolha do primeiro). Mais uma vez, há 9 possibilidades para o terceiro (para cada escolha dos dois primeiros) e 9 para o quarto (para cada escolha dos três primeiros). Então são $10 \times 9^3 = 7290$ possibilidades.

Questão 5.

João, ao partir para uma viagem, ficou de enviar um cartão postal para sua mãe. A probabilidade de que ele envie o cartão é igual a 0,7. Por outro lado, a probabilidade de um cartão postal se extraviar é 0,1.

(1,0) (a) Qual é a probabilidade de que a mãe de João receba um cartão postal dele?

(1,0) (b) Se ela não receber um cartão de João, qual é a probabilidade de que ele o tenha enviado?

UMA SOLUÇÃO

(a) A probabilidade de que um cartão não extravie, dado que foi enviado, é de $1 - 0,1 = 0,9$. Portanto a probabilidade de que a mãe de João receba um cartão de seu filho é igual à probabilidade de que seja enviado **e** não seja extraviado (dado que foi enviado), isto é $0,9 \times 0,7 = 0,63$.

(b) A probabilidade de a mãe não receber o cartão é igual a $1 - 0,63 = 0,37$. A probabilidade de a mãe não receber o cartão por não ter sido enviado é igual a $1 - 0,7 = 0,3$ e a probabilidade de a mãe não receber o cartão por ter se extraviado é $0,1 \times 0,7 = 0,07$. Portanto, se for dado que ela não recebeu o cartão, a probabilidade de que ele o tenha enviado é de $0,07/0,37 = 0,7/3,7 = 7/37$.