Questão 1.

(1,0) (a) Determine o maior número natural que divide todos os produtos de três números naturais consecutivos.

(1,0) (b) Responda à mesma questão no caso do produto de quatro números naturais consecutivos.

Em ambos os itens, justifique a sua resposta.

DUAS SOLUÇÕES

Uma solução

(a) Sendo $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, segue-se que o maior número natural que divide todo produto de três naturais consecutivos é um divisor de 6. Vamos mostrar que é exatamente 6. De fato, dados três inteiros consecutivos, exatamente um é múltiplo de 3 e pelo menos um é múltiplo de 2, logo o seu produto é múltiplo de 6. Isto mostra que o maior natural que divide o produto de quaisquer três naturais consecutivos é 6.

(b) Sendo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, segue-se que o maior número natural que divide todo produto de quatro naturais consecutivos é um divisor de 24. Vamos mostrar que este número é exatamente 24. De fato, dado o produto de 4 números consecutivos $a(a+1)(a+2)(a+3)$, pelo menos um desses é múltiplo de 3. Por outro lado, um deles é múltiplo de 4. Digamos que seja a o múltiplo de 4, logo $a+2$ é par. Se $a+1$ é o múltiplo de 4, então $a+3$ é par. Se $a+2$ é o múltiplo de 4, então a é par. Se $a+3$ é o múltiplo de 4, então $a+1$ é par. Isto mostra que n é múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$, o que prova o resultado.

Outra solução

Mais geralmente, sabemos da Combinatória que é natural o número

$$\binom{a+r-1}{r} = \frac{(a+r-1)!}{(a-1)!r!} = \frac{(a+r-1)(a+r-2)\cdots(a+1)a}{r!},$$

para quaisquer $a, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Logo o produto dos r números consecutivos $(a+r-1)(a+r-2)\cdots(a+1)a$ é divisível por $r!$. E, quando $a = 1$, esse é o máximo divisor possível.

Questão 2.

(1,0) (a) Determine os possíveis restos da divisão de a^3 por 7, onde a é um número natural.

(1,0) (b) Prove que se a e b são naturais e $a^3 + 2b^3$ é divisível por 7, então a e b são divisíveis por 7.

UMA SOLUÇÃO

(a) Podemos escrever $a = 7k + r$, onde $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Temos que

$$a^3 = (7k + r)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2r + 3kr^2) + r^3 .$$

Portanto, o resto da divisão de a^3 por 7 é igual ao resto da divisão de r^3 por 7. Como $0^3 = 0 \cdot 7 + 0$, $1^3 = 0 \cdot 7 + 1$, $2^3 = 8 = 1 \cdot 7 + 1$, $3^3 = 27 = 3 \cdot 7 + 6$, $4^3 = 64 = 9 \cdot 7 + 1$, $5^3 = 125 = 17 \cdot 7 + 6$, $6^3 = 216 = 30 \cdot 7 + 6$, segue-se que os possíveis restos de r^3 por 7 são 0, 1 ou 6. Além disso, o único caso em que o resto de r^3 por 7 dá zero é quando $r = 0$, isto é, quando a é múltiplo de 7. Então a^3 múltiplo de 7 implica a múltiplo de 7.

(b) Os possíveis restos da divisão de $2b^3$ por 7 são os possíveis restos de $2r^3$ por 7, em que r é o resto da divisão de b por 7. Como os possíveis restos de r^3 são 0, 1 e 6, pelo item anterior, multiplicamos por 2 cada um deles ($2 \cdot 0 = 0 \cdot 7 + 0$, $2 \cdot 1 = 0 \cdot 7 + 2$ e $2 \cdot 6 = 12 = 1 \cdot 7 + 5$) e concluímos que os possíveis restos de $2r^3$ por 7 são 0, 2 ou 5.

Observamos também que se $2b^3$ é múltiplo de 7, então o resto de $2r^3$ por 7 é zero, e isso só ocorre se o resto de r^3 por 7 é zero, que só ocorre quando o resto de b^3 por 7 é zero, que é o mesmo que ter b^3 múltiplo de 7, que, pelo item anterior, é o mesmo que ter b múltiplo de 7. Ou seja, $2b^3$ múltiplo de 7 implica b múltiplo de 7.

Somando as três possibilidades de restos de a^3 com as três possibilidades de restos de $2b^3$, num total de nove possibilidades ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $0 + 5 = 5$, $1 + 0 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 5 = 6$, $6 + 0 = 6$, $6 + 2 = 1 \cdot 7 + 1$, $6 + 5 = 11 = 1 \cdot 7 + 4$), a única que dá resto zero é quando a^3 e $2b^3$ têm ambos resto zero, ou seja, quando a^3 e $2b^3$ são múltiplos de 7, ou seja, quando a e b são múltiplos de 7. Concluímos que $a^3 + 2b^3$ é múltiplo de 7 se e somente se a e b são ambos múltiplos de 7.

Questão 3.

(1,0) (a) Determine todos os valores possíveis para $(n+1, n^2+4)$.

(1,0) (b) Sabendo que o resto da divisão de n por 5 não é 4, determine $[n+1, n^2+4]$.

UMA SOLUÇÃO

(a) Temos

$$(n+1, n^2+4) = (n+1, n^2+4-(n-1)(n+1)) = (n+1, 5)\,.$$

Daí segue-se que $(n+1, n^2+4)$ só pode ser igual a 1 ou a 5.

(b) Se n não deixa resto 4 quando dividido por 5, temos que $n+1$ não é múltiplo de 5. Neste caso, $(n+1, n^2+4) = 1$. Logo,

$$[n+1, n^2+4] = (n+1)(n^2+4)\,.$$

Questão 4.

(1,5) Determine todos os números naturais que, quando divididos por 18, deixam resto 6 e, quando divididos por 14, deixam resto 4.

UMA SOLUÇÃO

Temos que $x = 18v + 6$ e $x = 14u + 4$. Igualando, temos $14u - 18v = 2$. Esta equação é equivalente a $7u - 9v = 1$. A menor solução particular é $u_0 = 4$ e $v_0 = 3$. Portanto, a solução geral é dada por $u = 4 + 9t$ e $v = 3 + 7t$, com $t \in \mathbb{N}$. Daí segue-se que $x = 60 + 126t$, $t \in \mathbb{N}$.

Questão 5.

Sejam p e q dois números naturais, com $1 < p < q$ e $(p, q) = 1$. Sabemos que existem números naturais não nulos u e v tais que $up - vq = 1$.

(1,0) (a) Mostre que existem dois números naturais p_1 e q_1, não nulos, com $p_1 < p$ tais que $q_1 p - p_1 q = 1$. Conclua que $(p_1, q_1) = 1$ e que $q_1 < q$. *Sugestão:* Divida v por p, usando o algoritmo da divisão, para encontrar p_1.

(0,5) (b) Mostre que $n_1 = qq_1$ é tal que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{p_1}{q_1}.$$

Conclua que $p_1 < q_1$.

(1,0) (c) Prove que para quaisquer números naturais p e q com $1 < p < q$ e com $(p, q) = 1$, existe um número natural $r > 0$ e números naturais $n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 1$ tais que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_r}.$$

UMA SOLUÇÃO

(a) Sejam dados u e v tais que $up - vq = 1$. Pela divisão euclidiana, temos que $v = pb + p_1$, com $0 < p_1 < p$, logo $(u - bq)p - p_1 q = 1$. Ponhamos $u - bq = q_1$, logo $q_1 p - p_1 q = 1$. Daí conclui-se que p_1 e q_1 são primos entre si. Por outro lado, temos necessariamente que $q_1 < q$, pois $q_1 p = p_1 q + 1 < pq$.

(b) Temos que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{qq_1} + \frac{p_1}{q_1}.$$

Como $\frac{p}{q} < 1$, segue-se que $\frac{p_1}{q_1} < 1$, o que mostra que $p_1 < q_1$.

(c) Aplique o resultado do ítem b) à fração $\frac{p_1}{q_1}$, etc. Como $p > p_1 > p_2 > \cdots > 0$, para um certo r ter-se-á $p_r = 1$ e daí o procedimento para. As desigualdades $n_1 > n_2 > \cdots > n_r$ seguem de $n_1 = qq_1$, $n_2 = q_1 q_2$, etc. e de $qq_1 > q_1 q_2 > \cdots$.