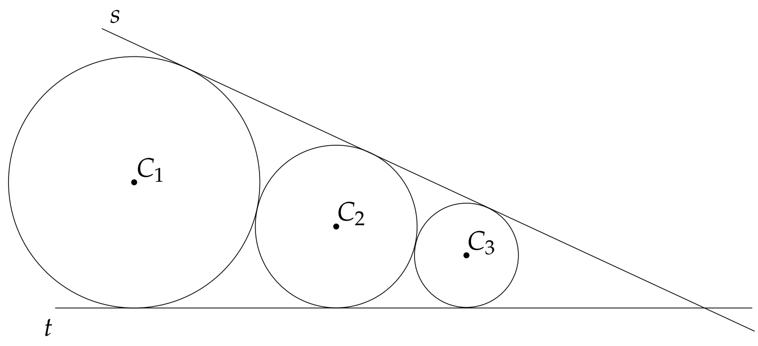
Questão 1.

A figura abaixo mostra uma sequência de circunferências de centros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ com raios $r_1, r_2, \ldots, r_n$, respectivamente, todas tangentes às retas s e t, e cada circunferência, a partir da segunda, tangente à anterior.

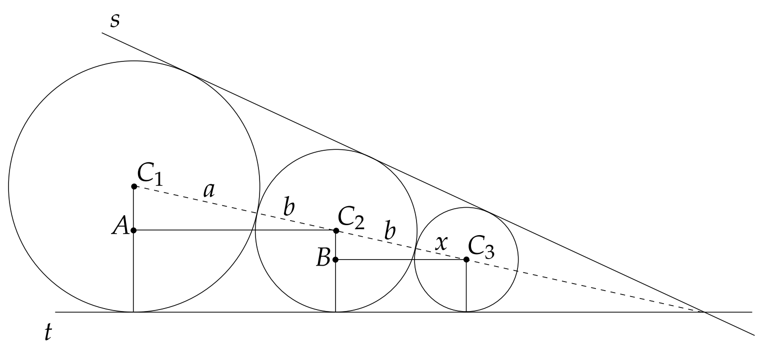


Considere $r_1 = a$ e $r_2 = b$.

(1,0) (a) Calcule r_3 em função de a e b.

(1,0) (b) Calcule r_n em função de a e b.

UMA SOLUÇÃO



(a) Todos os centros estão a igual distância das duas retas, portanto estão na bissetriz das retas s e t. Seja A o ponto de intersecção entre a paralela à reta t passando por C_2 e a perpendicular à reta t passando por C_1, e seja B o ponto de intersecção entre a paralela à reta t passando por C_3 e a perpendicular à reta t passando por C_2. Seja $x = r_3$.

Como os triângulos-retângulos AC_1C_2 e BC_2C_3 são semelhantes, temos

$$\frac{C_1A}{C_1C_2} = \frac{C_2B}{C_2C_3},$$

isto é,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{b-x}{b+x},$$

o que implica $x = \frac{b^2}{a}$.

(b) A relação obtida

$$r_3 = \frac{r_2^2}{r_1}$$

pode ser reformulada como

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{b}{a},$$

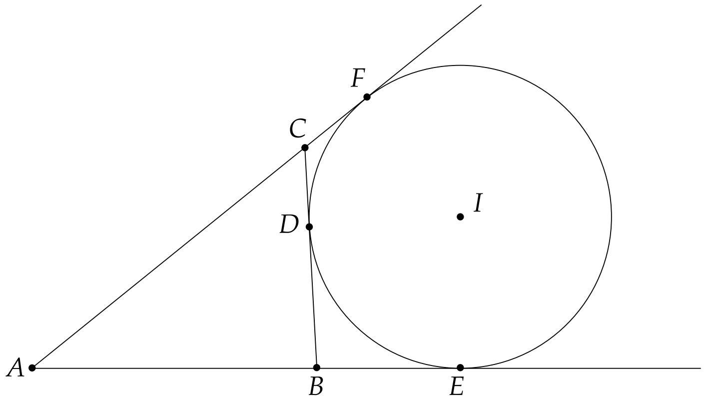
o que mostra que os três raios formam uma progressão geométrica de razão $\frac{b}{a}$. Como a mesma situação ocorre para quaisquer três circunferências consecutivas, a sequência $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{b}{a}$ e termo inicial a. Assim

$$r_n = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}},$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Questão 2.

Na figura abaixo, a circunferência de centro I é tangente em D ao lado BC do triângulo ABC e é tangente em E e F aos prolongamentos dos lados AB e AC, respectivamente.



(1,0) (a) Mostre que AE é igual ao semiperímetro do triângulo ABC.

(1,0) (b) Mostre que o ângulo $A\widehat{I}B$ é a metade do ângulo $A\widehat{C}B$.

UMA SOLUÇÃO

(a) Seja $2p$ o perímetro do triângulo ABC. Tem-se

$$2p = AB + BC + CA = AB + BD + DC + CA = AB + BE + CF + CA = AE + AF = 2AE\,.$$

Logo $AE = p$.

(b) No triângulo ABC, sejam $B\widehat{A}C = \widehat{A}$ e $A\widehat{C}B = \widehat{C}$. O ângulo externo de vértice B é $D\widehat{B}E = \widehat{A} + \widehat{C}$. Seja $A\widehat{I}B = \theta$. Como AI e BI são bissetrizes dos ângulos $C\widehat{A}B$ e $D\widehat{B}E$ então, no triângulo ABI, o ângulo externo $I\widehat{B}E$ é tal que

$$\frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2} = \frac{D\widehat{B}E}{2} = I\widehat{B}E = I\widehat{A}B + A\widehat{I}B = \frac{\widehat{A}}{2} + \theta\,.$$

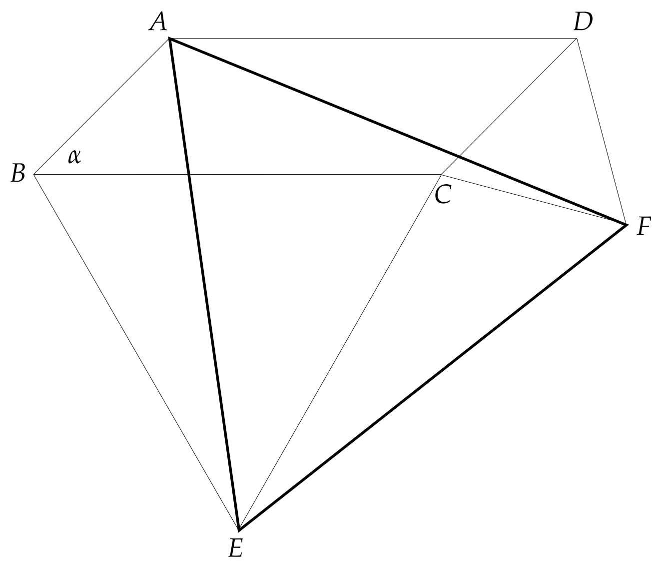
Logo

$$\theta = \frac{\widehat{C}}{2}\,.$$

Questão 3.

(2,0) Dado um paralelogramo $ABCD$ construa no seu exterior os triângulos equiláteros BCE e CDF. Mostre que o triângulo AEF é equilátero.

UMA SOLUÇÃO



Primeiro, vemos que $BA = DF = CF$. A segunda igualdade é consequência de CDF ser equilátero, enquanto a primeira segue de que $AB = CD$ (pois $ABCD$ é paralelogramo) e $CD = DF$ (pois CDF é equilátero).

Depois, vemos que $AD = BE = EC$. A segunda desigualdade segue de BCE ser equilátero. A primeira segue de que $AD = BC$ (pois $ABDC$ é paralelogramo) e $BC = BE$ (pois BCE é equilátero).

Finalmente, vamos mostrar que os ângulos $A\widehat{B}E$, $E\widehat{C}F$ e $A\widehat{D}F$ são iguais. Para isso vamos mostrar que todos são iguais a $\alpha + 60^o$, em que α é o ângulo $A\widehat{B}C$. De fato, isso é evidente para $A\widehat{B}E$, pois BCE equilátero implica $C\widehat{B}E = 60^o$. O mesmo para $A\widehat{D}F$, pois $A\widehat{D}C = \alpha$ (ângulos opostos do paralelogramos são iguais) e $C\widehat{D}F = 60^o$ (CDF é equilátero). Finalmente, em torno do ponto C tem-se

$$B\widehat{C}D + D\widehat{C}F + F\widehat{C}E + E\widehat{C}E = 360^o\,,$$

logo

$$(180^o - \alpha) + 60^o + E\widehat{C}F + 60^o = 360^o$$

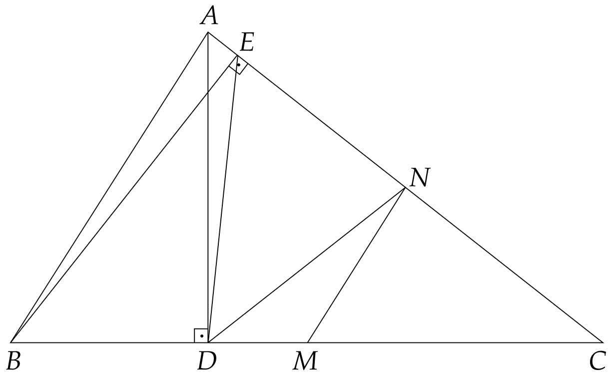
e, portanto, $E\widehat{C}F = \alpha + 60^o$, como queríamos demonstrar.

Portanto os triângulos ABE, FCE e FDA são congruentes, de onde concluímos que $AE = EF = AF$, isto é, AEF é equilátero.

Questão 4.

(2,0) No triângulo ABC, $\widehat{B} = 68^o$ e $\widehat{C} = 40^o$, AD e BE são alturas, M é médio de BC e N é médio de AC. Calcule os ângulos $D\widehat{N}M$ e $E\widehat{D}N$.

UMA SOLUÇÃO



(A figura não foi desenhada com os ângulos prescritos no enunciado)

(a) Primeiro, $B\widehat{A}C = 180^o - 68^o - 40^o = 72^o$. Segundo, como N é o ponto médio de AC, então é equidistante de A e D. Logo AND é isósceles e $ND = NA$. Pela mesma razão $NA = NC$, de onde resulta que NDC é isósceles. Disso resulta que $N\widehat{D}C = A\widehat{C}B = 40^o$ e que $D\widehat{N}C = 180^o - 40^o - 40^o = 100^o$. Terceiro, MN é paralelo a BA, logo MNC é semelhante a BAC e, por conseguinte, $M\widehat{N}C$ é igual a $B\widehat{A}C$, isto é, 72^o. Portanto, $D\widehat{N}M = D\widehat{N}C - M\widehat{N}C = 100^o - 72^o = 28^o$.

(b) ADN é isósceles e $A\widehat{N}D = 180^o - D\widehat{N}C = 80^o$, logo $A\widehat{D}N = 50^o$.

Como $B\widehat{D}A = 90^o = B\widehat{E}A$, então E e D pertencem à circunferência cujo diâmetro é AB. Logo, os ângulos $A\widehat{B}E$ e $A\widehat{D}E$ inscritos nessa circunferência são iguais. Então $A\widehat{D}E = A\widehat{B}E = 90^o - 72^o = 18^o$.

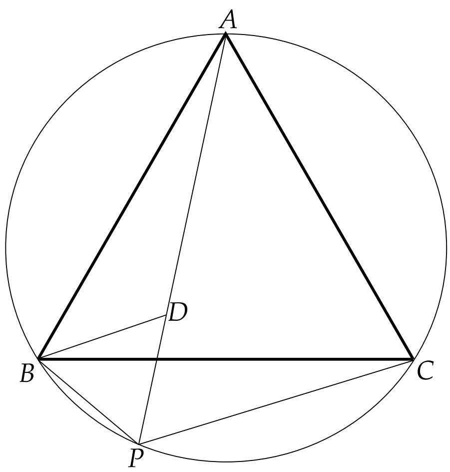
Portanto $E\widehat{D}N = A\widehat{D}N - A\widehat{D}E = 50^o - 18^o = 32^o$.

Questão 5.

(2,0) O triângulo equilátero ABC está inscrito em uma circunferência e P é um ponto qualquer do menor arco BC. Prove que $PA = PB + PC$ (isto é, que a distância de P ao ponto A é igual à soma das distâncias de P aos pontos B e C).

Sugestão: Considere um ponto D sobre PA tal que $PD = PB$.

UMA SOLUÇÃO



Seja D o ponto do segmento PA tal que $PD = PB$. Precisamos mostrar que $AD = PC$.

Como o arco AB mede 120º, então $B\widehat{P}A = 60^{\text{o}}$. Então $B\widehat{P}D = 60^{\text{o}}$ (é o mesmo ângulo) e, como $PB = PD$, então PBD é equilátero, resultando que $BD = PB$. Também por PBD ser equilátero tem-se $B\widehat{D}P = 60^{\text{o}}$ e, por conseguinte, $B\widehat{D}A = 120^{\text{o}}$.

Como o arco BAC mede 240º, então $B\widehat{P}C = \frac{240^{\text{o}}}{2} = 120^{\text{o}}$, logo $B\widehat{P}C = B\widehat{D}A$. Juntando essa informação com a igualdade $B\widehat{A}P = B\widehat{C}P$, que é evidente da simetria da construção, concluímos que $A\widehat{B}D = P\widehat{B}C$.

Por LAL os triângulos ABD e CBP são congruentes, resultando que $AD = PC$, como queríamos demonstrar.