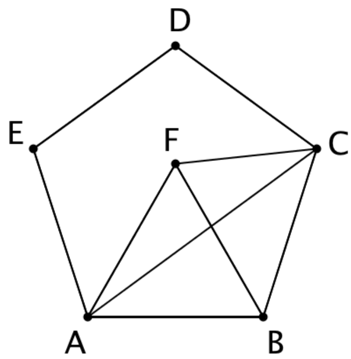
Questão 1. *(pontuação: 2)*

$ABCDE$ é um pentágono regular e ABF é um triângulo equilátero interior ao pentágono. Calcule os ângulos internos do triângulo AFC.

Uma solução:



Cada ângulo interno do pentágono regular mede

$$\frac{180^o(5-2)}{5} = 108^o = A\hat{B}C$$

Sendo $AB = BC$, então $B\hat{A}C = B\hat{C}A = \dfrac{180^o - 108^o}{2} = 36^o$. Assim, $F\hat{A}C = F\hat{A}B - C\hat{A}B = 60^o - 36^o = 24^o$.

Temos ainda $F\hat{B}C = A\hat{B}C - A\hat{B}F = 108^o - 60^o = 48^o$.

Sendo $BF = BC$, então $B\hat{F}C = B\hat{C}F = \dfrac{180^o - 48^o}{2} = 66^o$. Assim, $A\hat{C}F = B\hat{C}F - B\hat{C}A = 66^o - 36^o = 30^o$.

Finalmente, $A\hat{F}C = A\hat{F}B + B\hat{F}C = 60^o + 66^o = 126^o$.

Conclusão: os ângulos internos do triângulo AFC medem 24^o, 30^o e 126^o.

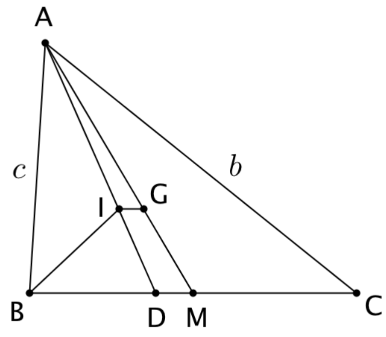
Questão 2. *(pontuação: 2)*

No triângulo ABC tem-se $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. A semirreta AD ($D \in BC$) é bissetriz do ângulo BAC e o ponto I é o incentro do triângulo.

a) *(1,0)* Calcule a razão $\dfrac{IA}{ID}$ em função dos lados a, b e c.

b) *(1,0)* Sendo G o baricentro de ABC mostre que, se IG é paralelo a BC, então $a = \dfrac{b+c}{2}$.

Uma solução:



a) Pelo teorema da bissetriz interna, temos $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$. Então, devido a uma propriedade útil das proporções,

$$\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}, \quad \text{pois} \quad BD + DC = a$$

Logo $BD = \dfrac{ac}{b+c}$.

Sendo I o incentro então BI é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Pelo mesmo teorema,

$$\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

b) Seja M o ponto médio de BC. Como IG é paralelo a BC então

$$\frac{IA}{ID} = \frac{b+c}{a} = \frac{GA}{GM} = \frac{2}{1}$$

(a última igualdade é válida pois G é o baricentro de ABC). Logo, $a = \dfrac{b+c}{2}$, c.q.d.

Questão 3. *(pontuação: 2)*

No triângulo acutângulo ABC tem-se $AB = x - 1$, $BC = x$ e $AC = x + 1$.

a) *(1,0)* Determine todos os valores possíveis de x para que exista um triângulo nas condições descritas acima.

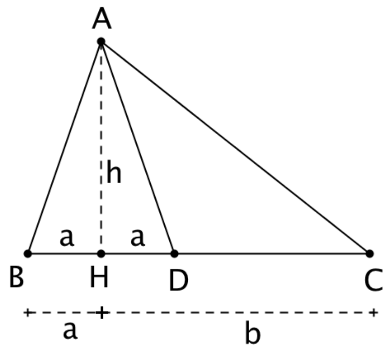
b) *(1,0)* Seja D o ponto do lado BC tal que $AB = AD$. Calcule o comprimento do segmento DC.

Uma solução:

a) Note que AC é o maior lado. Para que ABC seja acutângulo, o maior ângulo deve ser menor do que 90°. Isto significa que devemos ter $AC^2 < AB^2 + BC^2$. De $(x+1)^2 < (x-1)^2 + x^2$ concluímos que $x > 4$.

(O "caso limite" $x = 4$ é o conhecido triângulo retângulo $3 - 4 - 5$)

b) Seja AH perpendicular a BC. Como $AB = AD$, então H é médio de BD. Sejam $AH = h$, $BH = a$ e $HC = b$.



Nos triângulos retângulos AHC e AHB temos:

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 \qquad \text{ou} \qquad \text{seja} \qquad b^2 = (x+1)^2 - h^2$$

$$HB^2 = AB^2 - AH^2 \qquad \text{ou} \qquad \text{seja} \qquad a^2 = (x-1)^2 - h^2$$

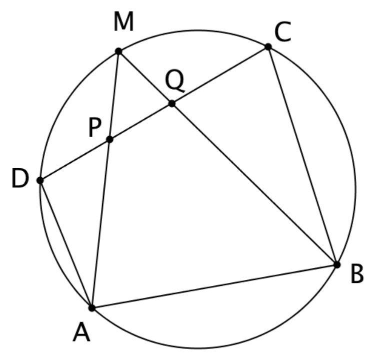
Subtraindo,

$$b^2 - a^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x$$

ou seja, $(b-a)(a+b) = 4x$. Como $a+b = BC = x$ então $b - a = DC = 4$.

Questão 4. *(pontuação: 2)*

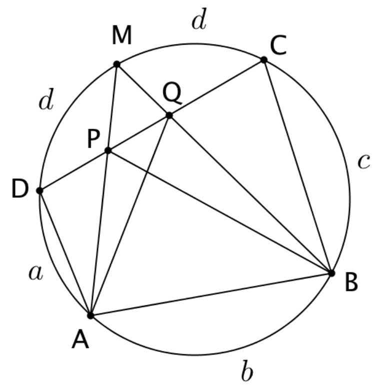
O quadrilátero $ABCD$ está inscrito em uma circunferência. Seja M o ponto médio do arco CD como mostra a figura. Os segmentos MA e MB cortam o lado CD em P e Q, respectivamente.



a) *(1,0)* Mostre que o quadrilátero $ABQP$ é inscritível.

b) *(1,0)* Mostre que os ângulos $D\hat{A}Q$ e $P\hat{B}C$ são iguais.

Uma solução:



a) Sejam a, b, c, d e novamente d os arcos DA, AB, BC, CM e MD como na figura acima. Vamos calcular a soma de dois ângulos opostos do quadrilátero $ABQP$.

$$P\hat{A}B = M\hat{A}B = \frac{arc(BM)}{2} = \frac{c+d}{2}$$

$$B\hat{Q}P = B\hat{Q}D = \frac{arc(DB) + arc(CM)}{2} = \frac{a+b+d}{2}$$

(já que $B\hat{Q}P$ é angulo externo ao triângulo DQM). Assim

$$P\hat{A}B + B\hat{Q}P = \frac{a+b+c+d+d}{2} = \frac{360^o}{2} = 180^o$$

Logo, $ABQP$ é inscritível.

b)

$$D\hat{A}Q = D\hat{A}P + P\hat{A}Q = D\hat{A}M + P\hat{A}Q = \frac{d}{2} + P\hat{A}Q$$

e

$$P\hat{B}C = P\hat{B}Q + Q\hat{B}C = P\hat{B}Q + M\hat{B}C = P\hat{B}Q + \frac{d}{2}$$

Como $ABQP$ é inscritível então $P\hat{A}Q = P\hat{B}Q$. Logo $D\hat{A}Q = P\hat{B}C$, c.q.d.

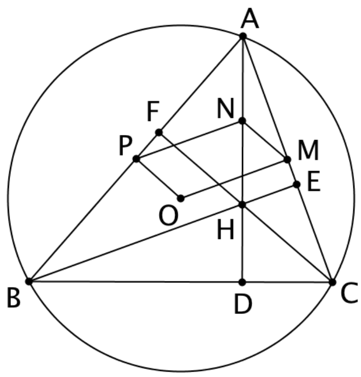
Questão 5. *(pontuação: 2)*

Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O. Os pontos D e E das retas BC e AC, respectivamente, são tais que AD é perpendicular a BC e BE é perpendicular a AC. As retas AD e BE cortam-se em H. Sejam M, N e P os pontos médios dos segmentos AC, AH e AB, respectivamente.

a) *(1,0)* Mostre que $OMNP$ é um paralelogramo.

b) *(1,0)* Mostre que em um triângulo qualquer, a distância do ortocentro a um vértice é o dobro da distância do circuncentro ao lado oposto.

Uma solução:



a) O ponto O é o circuncentro de ABC e, portanto, pertence as mediatrizes dos lados do triângulo. Assim, OM é perpendicular a AC e OP é perpendicular a AB. Como P e N são médios de AB e AH então PN é paralelo a BH que, por sua vez, é perpendicular a AC. Logo, PN e OM são paralelos porque são ambos perpendiculares a AC.

Agora, AD e BE são alturas do triângulo ABC e seja CF a terceira altura. Logo, CF passa por H, o ortocentro do triângulo. Repetindo o argumento, como N e M são pontos médios de AH e AC então MN é paralelo a CH que, por sua vez, é perpendicular a AB. Logo, MN e OP são paralelos porque são ambos perpendiculares a AB.

Assim, $OMNP$ é um paralelogramo.

b) A distância do circuncentro O ao lado AC é OM. No triângulo AHB, como P e N são médios de AB e AH respectivamente, então BH é o dobro de PN que, por sua vez, é igual a OM. Assim, $BH = 2.OM$, como queríamos demonstrar.

Obs: Naturalmente que essa propriedade vale qualquer que seja o vértice do triângulo.