MA11 – Números e Funções Reais
Avaliação de Recuperação GABARITO - MA 11
23 de novembro de 2013

1. *(valor 2,0)*

Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando adequadamente e em detalhes as suas respostas.

a) O produto de dois números irracionais é um número irracional.*(0,5)*

b) Se $a \in \mathbb{R}$ não possui representação decimal finita, então $\dfrac{1}{a}$ também não possui representação decimal finita.*(0,5)*

c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui um ponto de máximo em $x_0 \in \mathbb{R}$, então a função $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^2(x) = f(x).f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, também possui um ponto de máximo em x_0.*(0,5)*

d) Se a função $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui um ponto de mínimo em $x_0 \in \mathbb{R}$, então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também possui um ponto de mínimo em x_0.*(0,5)*

Uma solução:

a) Falso.

Contra-exemplo: $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{8}$ são irracionais, mas $a\,b = 4 \in \mathbb{Q}$.

b) Falso.

Contra-exemplo: $a = \frac{1}{3}$ não possui representação decimal finita, mas $\frac{1}{a} = 3$.

c) Falso.

Contra-exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Então f possui um máximo absoluto em $x_0 = 0$, mas a função $f^2(x) = x^4$ não possui um ponto de máximo nesse ponto.

d) Falso.

Contra-exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -1, x \neq 0$, $f(0) = -\frac{1}{2}$. Então a função $f^2(x) = 1, x \neq 0$, $f(0) = \frac{1}{4}$. Assim $x_0 = 0$ é ponto de mínimo de f^2, mas não é de f.

2. *(valor 2,0)*

Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva e sejam $A, B \subset X$.

a) Mostre que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Indique claramente em que ponto da demonstração você usou a hipótese de injetividade. *(1,0)*

b) A igualdade de conjuntos demonstrada no item anterior continua valendo sem a hipótese de que f é injetiva? Justifique sua resposta, com uma demonstração ou um contra-exemplo. *(1,0)*

Uma solução:

a) Seja $y \in f(A \cap B)$. Então, $\exists\, x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$, portanto $y = f(x) \in f(A)$ e $y = f(x) \in f(B)$. Então, $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, portanto $y \in f(A) \cap f(B)$. Segue que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Reciprocamente, seja $y \in f(A) \cap f(B)$. Então, $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, portanto existem $x_1 \in A$ tal que $f(x_1) = y$ e $x_2 \in A$ tal que $f(x_2) = y$. **Como f é injetiva** e $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Logo, $x_1 \in A \cap B$, portanto $y = f(x_1) \in f(A) \cap f(B)$. Segue que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

b) A igualdade não vale sem a hipótese de injetividade, pois neste caso não é possível garantir a inclusão $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Como, contra-exemplo, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$. Então, $f(A) = f(B) = [0, 1]$, logo $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$. Porém, $f(A \cap B) = \{0\}$.

3. *(valor 2,0)*

a) Mostre que o número $\sqrt{p}$, em que p é um número natural primo, é irracional. *(0,5)*

b) Mostre que o número $\sqrt{a}$, em que a é um natural qualquer, é inteiro ou irracional. *(1,5)*

(Sugestão: Suponha que a seja racional, escreva-o na forma irredutível $a = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N}, s \neq 0,$ e observe que $\sqrt{a}$ satisfaz $x^2 - a = 0$)

Uma solução:

a) Se $\sqrt{p}$ fosse racional, então poderíamos escrevê-lo na forma $\sqrt{p} = \frac{r}{s}$, com $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$. Logo $s^2 p = r^2$; portanto, sendo p primo, ele seria fator de r^2 e também de r, isto é $r = \lambda p$, para algum $\lambda \in \mathbb{N}$. Assim $s^2 p = \lambda^2 p^2$. Portanto p também seria fator de s, o que é uma contradição. Este resultado também é uma consequência de b), que será demonstrado a seguir.

b) Suponhamos que $\sqrt{a}$ fosse racional então podemos escrever $\sqrt{a} = \frac{r}{s}$ na forma irredutível. Se $s = 1$, $\sqrt{a}$ seria inteiro e terminou. Vamos supor então que $s \neq 1$; neste caso s tem um fator primo q. Vamos verificar que este q é fator comum de r e de s.

Isto é evidente pois $r^2 = as^2$ e portanto todo fator primo de s é também fator de r.

Isto é uma contradição e portanto $\sqrt{a}$, caso não seja inteiro, deve ser irracional.

4. *(valor 2,0)*

Determine o polinômio p de menor grau possível que tenha uma raiz dupla em $x = 1$ e tal que $p(-1) = 2$. Justifique sua resposta.

Uma solução:

A condição de $x = 1$ ser raiz dupla nos diz que o polinômio p de ter $(x - 1)^2$ como fator. Logo o grau de p deve ser maior ou igual do que 2. Como queremos que o grau seja o mínimo possível, buscamos uma constante a tal que $p(x) = a.(x-1)^2$ satisfaça $p(-1) = 2$. É imediato verificar que $a = \dfrac{1}{2}$ é a constante procurada. Logo $p(x) = \dfrac{1}{2}.(x-1)^2$.

5. *(valor 2,0)* Certas substâncias radioativas decaem a uma taxa proporcional à própria massa. A meia-vida T de uma substância radioativa com essa propriedade é definida como o tempo decorrido até que sua massa reduza-se à metade, isto é, se a massa de uma substância com meia-vida T é dada pela função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, então $f(t+T) = \frac{1}{2}\, f(t)$, $\forall\, t > 0$.

a) Se a meia-vida de uma substância radioativa é de 1 hora, qual é número inteiro mínimo de horas que deve transcorrer para que sua massa fique menor do que 10% da original? *(0,5)*

b) Nas condições do ítem a), se a massa inicial dessa substância é m_0, deduza uma fórmula para sua massa em função do tempo $t > 0$. *(0,5)*

c) Verificou-se que 2 kg de uma substância radioativa se reduziram a 500 g, depois de transcorridas 3 horas. Qual é a meia vida dessa substância? *(0,5)*

d) Nas condições do ítem c), deduza uma fórmula para a massa dessa substância em função do tempo $t > 0$ medido em horas. *(0,5)*

Uma solução:

a) Neste caso, depois de transcorridas k horas, com $k \in \mathbb{N}$, a massa da substância terá ser reduzido a $\dfrac{1}{2^k}$ da original. Assim, depois de 3h passadas, a massa terá se reduzido a $\dfrac{1}{8}$ da original; e depois de 4h, a $\dfrac{1}{16}$ da original. Portanto, o número mínimo inteiro para que a massa fique inferior a $\dfrac{1}{10}$ da original é de 4 horas.

b) Se a cada hora a massa decai a metade, então depois de t horas, a massa será dada pela função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(t) = \dfrac{1}{2^t}\, m_0$.

c) Se depois de transcorridas 3h a massa decai a $\dfrac{1}{4}$ da original, então depois de $1,5$ h a massa era $\dfrac{1}{2}$ da original. Portanto, a meia vida da substância é de $T = 1,5$ horas.

d) Seja m_0 a massa original da substância. Considere s e t as variáveis correspondentes ao tempo medido em unidades de 1,5h e de 1h, respectivamente. Então, $t = \dfrac{3}{2}\, s$. Então, depois de transcorrido um tempo s, a massa da substância terá se reduzido a $\dfrac{1}{2^s}\, m_0$. Portanto, a função que dá a massa em função do tempo medido em horas é $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(t) = 2^{-\frac{2}{3}t}\, m_0$.