Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA12 – Matemática Discreta
Avaliação Recuperação - GABARITO
23 de novembro de 2013

1. *(valor 2,0)*

Um comerciante, para quem o dinheiro vale 2% ao mês, oferece determinado produto por três prestações mensais iguais a R$ 200,00, a primeira paga no ato da compra.

a) Que valor o comerciante deve cobrar por este produto, no caso de pagamento à vista? (*0,5*)

b) Se um consumidor desejar pagar o produto em 3 prestações mensais iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, qual deve ser o valor das parcelas? (*1,5*)

(*Utilize, se desejar, os seguintes valores para as potências de* $1,02$: $1,02^2 = 1,0404$, $1,02^3 = 1,0612$, $1,02^{-1} = 0,9804$, $1,02^{-2} = 0,9612$, $1,02^{-3} = 0,9423$).

Uma solução:

1. a)

Data	1	2	3	4	5	...
Dinheiro	x	$1,02x$	$1,02^2x$	$1,02^3x$	$1,02^4x$	...

Transferimos tudo para a data 1.

A primeira parcela já é à vista: $R\$200,00$

Para calcular quanto será a segunda parcela de $R\$200,00$ à vista, fazemos: $1,02x = 200$, logo $x = (1,02)^{-1}.200 = 0,9804.200 = 196,08$.

Para calcular quanto será a terceira parceira de $R\$200,00$ à vista, fazemos $(1,02)^2x = 200$, donde $x = (1,02)^{-2}200 = 0,9612.200 = 192,24$.

Logo o preço equivalente à vista do produto deve ser $200,00 + 196.08 + 192,24 = 588,32$ reais.

b)

Seja P o valor de cada prestação, sendo a primeira paga na data 2. Então, depois de feitos os três pagamentos, a dívida fica quitada e assim temos

$$(1,02)^2(1,02.588,32 - P) - 1,02P - P = 0$$

Logo $P = [(1,02)^3.588,32/(1,02)^2 + 1,02 + 1]$. Portanto $P = [1,0612.588,32/1,0404 + 1,02 + 1] = 204,00$ reais.

2. *(valor 2,0)*

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 3n^2 - 20n$.

a) Qual é a razão da progressão? (*1,0*)

b) Qual é o último termo negativo da progressão? (*1,0*)

Uma solução

a) Denotemos por $a_0, a_1 = a_0 + r, a_2 = a_0 + 2r, a_3 = a_0 + 3r, ...$ os termos da PA de razão r. Assim a soma dos n primeiros termos é $S_n = na_0 + [(n(n-1)/2].r = 3n^2 - 20n$. Como $S_1 = a_0$, então $a_0 = 3 - 20 = -17$ e como $S_2 = 2a_0 + r = 3.2^2 - 20.2 = -28$, então $r = 6$.

b) Assim a PA é formada pelos seguintes termos (-17, - 11, -5, 1, 7, 13, 19, 25, ...) e o último termo negativo é, portanto, $a_2 = -5$, daí para frente todos os termos serão positivos, pois a razão é positiva.

3. *(valor 2,0)*

Demonstre, por indução finita, a desigualdade de Bernoulli: se $h \geq -1$, então

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

para todo natural n.

Uma solução

Provemos, por indução finita que, $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para $h \geq -1$.
Quando $n = 1$, $(1+h)^1 \geq 1 + h$.
Suponha que $(1+h)^n \geq 1 + nh$ e mostremos que $(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h$. Agora

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \overset{Hip.Ind.}{\geq} (1+nh)(1+h) = 1 + h + nh + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$$

pois $nh^2 \geq 0$.
Logo, pelo PIF, se $h \geq -1$, então $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para todo natural n.

4. *(valor 2,0)*

Quantos são os números de 4 algarismos:

a) em que todos os algarismos são ímpares? (*0,5*)

b) em que todos os algarismos são ímpares e, além disso, aparecem em ordem não decrescente? (Por exemplo, 1337 e 1579 são dois destes números, mas 1759 e 1227 não.)(*1,5*)

Uma solução

a) Usamos diretamente o Princípio Multiplicativo: $5.5.5.5 = 5^4 = 625$ (repetições de algarismos são permitidas).

b) Sejam

x_1 = número de algarismos 1 que aparece no número de 4 algarismos

x_2 = número de algarismos 3 que aparece no número de 4 algarismos

x_3 = número de algarismos 5 que aparece no número de 4 algarismos

x_4 = número de algarismos 7 que aparece no número de 4 algarismos

x_5 = número de algarismos 9 que aparece no número de 4 algarismos

Então $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$. Uma solução desta equação está relacionada com um e só um número satisfazendo as exigências (todos os algarismos ímpares e em ordem não decrescente).

Por exemplo, a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ produz apenas o número 3379.

Assim a quantidade de números com apenas algarismos ímpares em ordem não decrescente é igual a 8! / (4!.4!) = 70 (são as distintas combinações com repetição).

5. *(valor 2,0)*

Em um armazém, há um certo número de caixas de um determinado produto, todas adquiridas do fabricante em uma mesma data. Foi recebido um comunicado do fabricante, avisando que 20% das caixas expedidas naquela data apresentavam problemas: nelas, 40% das unidades do produto estavam defeituosas, contra 5% nas caixas normais. Uma das caixas do depósito, escolhida ao acaso, foi aberta para ser examinada. Uma unidade foi escolhida, também ao acaso, desta caixa.

a) Qual é a probabilidade de que esta unidade seja defeituosa? (*0,5*)

b) Dado que a unidade é defeituosa, qual é a probabilidade de que a caixa examinada seja uma das caixas com problemas? (*0,75*)

c) Dado que a unidade não é defeituosa, qual é a probabilidade de que a caixa examinada seja uma das caixas com problemas? (*0,75*)

Uma solução:

a)

$$P(defeituosa) =$$

$$= P(defeituosa|problema).P(problema) + P(defeituosa|normal).P(normal)$$

$$= (40/100).(20/100) + P(5/100).P(80/100) = 12/100 = 12\%$$

b)

$$P(problema|defeituosa) = [P(problema \quad \text{e} \quad defeituosa)]/P(defeituosa) =$$

$$[P(problema).P(defeituosa|problema)]/(12/100) =$$

$$= 2/3$$

c)

$$P(problema|não\, defeituosa) =$$

$$[P(problema \quad \text{e} \quad não\, defeituosa)]/P(não\, defeituosa) =$$

$$\frac{[P(problema).P(não\, defeituosa|problema)]}{P(não\, defeituosa|problema).P(problema) + P(não\, defeituosa|normal).P(normal)}$$

$$= 3/22$$